Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН Препринт № 59, июнь 1999

Классификация автоморфизмов свободной группы ранга 2 по рангам групп неподвижных точек

О. В. Богопольский

Пусть F_n – свободная группа ранга n и $\mathrm{Aut}(F_n)$ – ее группа автоморфизмов. Для любого $\alpha \in \mathrm{Aut}(F_n)$ через $\mathrm{Fix}(\alpha)$ обозначим группу неподвижных точек α: $\mathrm{Fix}(\alpha) = \{x \in F_n |\, \alpha(x) = x\}$. Бествина и Хэндель [6] доказали, что $rk(\mathrm{Fix}(\alpha)) \leqslant n$. Коллинз и Тёрнер [8] классифицировали автоморфизмы α с $rk(\mathrm{Fix}(\alpha)) = n$. В данной работе мы даем классификацию автоморфизмов свободной группы ранга 2 по рангам групп неподвижных точек, классификацию групп неподвижных точек автоморфизмов и классификацию стабилизаторов элементов. В качестве следствия мы получаем эффективный алгоритм, решающий проблему сопряженности в группе $\mathrm{Aut}(F_2)$. Мы даем также алгоритм для нахождения базиса подгруппы $\mathrm{Fix}(\alpha)$ для $\alpha \in \mathrm{Aut}(F_2)$.

1. Формулировки теорем

Пусть F_2 – свободная группа с базисом $\{a, b\}$. Определим некоторые автоморфизмы F_2:

$$\beta : \begin{cases} a \mapsto a \\ b \mapsto ab \end{cases}, \quad \gamma : \begin{cases} a \mapsto b^{-1}a \\ b \mapsto b \end{cases}, \quad \rho : \begin{cases} a \mapsto ab \\ b \mapsto a^{-1} \end{cases}, \quad \tau : \begin{cases} a \mapsto b \\ b \mapsto a^{-1}b^{-1} \end{cases},$$

$$\sigma : \begin{cases} a \mapsto b^{-1} \\ b \mapsto a \end{cases}, \sigma_1 : \begin{cases} a \mapsto b \\ b \mapsto a \end{cases}, \sigma_2 : \begin{cases} a \mapsto a^{-1} \\ b \mapsto b^{-1} \end{cases}, \sigma_3 : \begin{cases} a \mapsto a^{-1} \\ b \mapsto b \end{cases}.$$

Мы используем следующее правило композиции автоморфизмов: если $\varphi, \psi \in \mathrm{Aut}(F_2)$ и $x \in F_2$, то $\varphi\psi(x) = \psi(\varphi(x))$. Для $x \in F_2$ обозначим через $\mathrm{St}(x)$ стабилизатор элемента x в группе $\mathrm{Aut}(F_2)$. Если H – свободная группа, то через $rk(H)$ обозначим ее ранг. Для произвольного подмножества X группы обозначим $\langle X \rangle$ подгруппу, порожденную X. Обозначим $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$, $x^y = y^{-1}xy$. Для $g \in F_2$ обозначим через $\widehat{g}$ автоморфизм, индуцированный сопряжением g: $\widehat{g}(x) = g^{-1}xg$, $x \in F_2$.

Пусть $- : \mathrm{Aut}(F_2) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ гомоморфизм, индуцированный абелизацией F_2. Известно, что группа внутренних автоморфизмов $\mathrm{Inn}(F_2)$ является ядром этого гомоморфизма и, что

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \cong D_4 \underset{D_2}{*} D_6 \cong \langle \bar\sigma, \bar\sigma_1 \rangle \underset{\langle \bar\sigma_2, \bar\sigma_1 \rangle}{*} \langle \bar\rho, \bar\sigma_1 \rangle, \tag{1}$$

где D_n – диэдральная группа порядка $2n$.

Лемма 1.1. 1) *Любой нетривиальный периодический автоморфизм из* $\mathrm{Aut}(F_2)$ *имеет порядок* $2, 3$ *или* 4. *Имеется ровно четыре класса сопряженности автоморфизмов порядка* 2, *один порядка* 3 *и один порядка* 4. *Автоморфизмы* $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_3\widehat{a}, \tau$ *и* σ *являются их представителями.*

2) *Любой нетривиальный периодический элемент* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ *имеет порядок* 2, 3, 4 *или* 6. *Существует ровно три класса сопряженности элементов порядка* 2 *и по одному порядка* $3, 4$ *и* 6. *Элементы* $\bar\sigma_1, \bar\sigma_2, \bar\sigma_3, \bar\tau, \bar\sigma$ *и* $\bar\rho$ *являются их представителями.*

Первое утверждение содержится в [17], второе следует из разложения (1).

Заметим, что ρ – автоморфизм порядка 6 по модулю внутренних автоморфизмов: $\rho^6 = \widehat{bab^{-1}a^{-1}}$. Следующая лемма доказана в [8].

Лемма 1.2. *Пусть* $\alpha \in \mathrm{Aut}(F_2)$. *Тогда* $rk(\mathrm{Fix}(\alpha)) = 2$ *в том и только том случае, когда* α *сопряжен с* β^t, $t \in \mathbb{Z}$. *При* $t \neq 0$ *имеем* $\mathrm{Fix}(\beta^t) = \langle a,\, [a,b] \rangle$.

Пусть α – автоморфизм такой, что α^n – внутренний автоморфизм и $n \geqslant 2$ минимально. Для $u \in F_2$ положим $w(\alpha, u) = uu^{\alpha} \dots u^{\alpha^{n-1}}$. Для $w \in F_2$, $w \neq 1$ пусть $\sqrt{w}$ обозначает слово u, такое, что $u^k = w$ и k максимально. Положим $\sqrt{1} = 1$.

Теорема 1.3. *Пусть* $\alpha \in \mathrm{Aut}(F_2) \setminus \mathrm{Inn}(F_2)$. *Если* α *фиксирует нетривиальное слово из* F_2, *то после подходящего сопряжения выполняется одно из двух:* $\alpha \in \langle \beta, \gamma \rangle$ *или* α *совпадает, по модулю внутренних автоморфизмов, с одним из следующих:*

$$\rho, \tau, \sigma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \beta^t, \beta^t\sigma_2.$$

Если $\alpha \in \langle \beta, \gamma \rangle$ *и* α *не сопряжен в* $\mathrm{Aut}(F_2)$ *со степенью* β, *то* $\mathrm{Fix}(\alpha) = \langle [a,b] \rangle$; $\mathrm{Fix}(\beta^t) = \langle a, [a,b] \rangle$ *при* $t \neq 0$. *Кроме того, выполняются следующие утверждения.*

1. $\mathrm{Fix}(\rho\widehat{u}) = \langle \sqrt{w(\rho, u^{-1})aba^{-1}b^{-1}} \rangle \neq \{1\}$.

2. *Если* $\varphi = \tau, \sigma, \sigma_1$ *или* σ_2, *то* $\mathrm{Fix}(\varphi\widehat{u}) = \langle \sqrt{w(\varphi, u^{-1})} \rangle$. *Более того,* $w(\varphi, u^{-1}) = 1 \Leftrightarrow \varphi\widehat{u}$ *сопряжено с* $\varphi \Leftrightarrow$ *существует* $x \in F_2$ *такое, что*

$$u = \begin{cases} (x^{-1})^{\varphi}x & \text{для } \varphi = \sigma \text{ и } \sigma_1, \\ (x^{-1})^{\varphi}x \text{ или } (x^{-1})^{\varphi}bx & \text{для } \varphi = \tau, \\ (x^{-1})^{\varphi}x \text{ или } (x^{-1})^{\varphi}ax, \text{ или } (x^{-1})^{\varphi}bx & \text{для } \varphi = \sigma_2. \end{cases}$$

3.

$$\mathrm{Fix}(\sigma_3\widehat{u}) = \begin{cases} \langle b^x \rangle & , \text{ если } u = (x^{-1})^{\sigma_3}x, \\ \{1\} & , \text{ если } u = (x^{-1})^{\sigma_3}ax, \\ \langle \sqrt{w(\sigma_3, u^{-1})} \rangle \neq \{1\} & , \text{ если } u \neq (x^{-1})^{\sigma_3}a^{\varepsilon}x, \end{cases}$$

где $x \in F_2, \varepsilon = 0, 1$.

В первом случае $\sigma_3\widehat{u}$ сопряжено с σ_3, во втором – с $\sigma_3\widehat{a}$, в третьем $\sigma_3\widehat{u}$ не сопряжено ни с σ_3, ни с $\sigma_3\widehat{a}$.

4. *Пусть $\beta^t\widehat{u}$ фиксирует нетривиальное слово из F_2 и $t \neq 0$. Тогда $\beta^t\widehat{u}$ сопряжено с $\beta^t\widehat{a}^s$ или с $\beta^t\widehat{w_0^s}$ для некоторого $w_0 = a^{k_1}b^{-1}a^{k_2}b\dots\ b^{-1}a^{k_{2r}}b$, где w_0 не собственная степень, $k_i \neq 0$, $i = 1,\dots,2r$ и $s \in \mathbb{Z}$. Сопрягающий элемент можно выбрать в $\mathrm{Inn}(F_2)$. Более того,*

$$\mathrm{Fix}(\beta^t\widehat{a}^s) = \begin{cases} \langle a, bab^{-1}a^{-1}\rangle & , \textit{если } s = t, \\ \langle a, a^{-1}b^{-1}ab\rangle & , \textit{если } s = 0, \\ \langle a\rangle & , \textit{если } s \neq 0, t, \end{cases}$$

$\mathrm{Fix}(\beta^t\widehat{w_0}^s) = \langle w_0\rangle$ *для* $s \neq 0$.

5. *Пусть $\beta^t\sigma_2\widehat{u}$ фиксирует нетривиальное слово из F_2 и пусть $t \neq 0$. Тогда $\beta^t\sigma_2\widehat{u}$ сопряжено с $\beta^t\sigma_2\widehat{w_1^{-1}w_0^s}$ для некоторого $w_0 = w_1w_1^{\sigma_2}$ и $s \in \mathbb{Z}$, где $w_1 = a^{k_1}b^{-1}a^{k_2}b\dots a^{k_{2m+1}}b^{-1}, k_i \neq 0, i = 1,\dots,2m+1$ и w_0 не собственная степень. Сопрягающий элемент можно выбрать в $\mathrm{Inn}(F_2)$. Более того,*

$\mathrm{Fix}(\beta^t\sigma_2\widehat{w_1^{-1}w_0^s}) = \langle w_0\rangle$.

Теорема 1.4. *Все возможные типы, с точностью до изоморфизма, стабилизаторов нетривиальных элементов из F_2 в группе $\mathrm{Aut}(F_2)$ перечислены в следующем списке: Z, $Z \times Z$, $\langle x, y \mid x^{-1}yx = y^{-1}\rangle$, $\langle x, y \mid x^2 = [x, y^2] = 1\rangle$ и $\langle x, y \mid xyx = yxy\rangle$.*

Теорема 1.5. *Существует эффективный алгоритм, позволяющий для произвольного автоморфизма $\alpha \in \mathrm{Aut}(F_2)$ находить некоторый базис его группы неподвижных точек $\mathrm{Fix}(\alpha)$.*

Теорема 1.6. *Проблема сопряженности в группе $\mathrm{Aut}(F_2)$ эффективно разрешима.*

2. Предварительные факты

A. Пусть Σ – компактная поверхность с базисной точкой x. Обозначим через $\mathrm{Homeo}(\Sigma)$ группу всех гомеоморфизмов поверхности Σ, через $\mathrm{Isot}(\Sigma)$ – группу всех гомеоморфизмов Σ, изотопных тождественному гомеоморфизму. Обозначим через $\mathrm{Homeo}(\Sigma, x)$ и $\mathrm{Isot}(\Sigma, x)$ подгруппы групп $\mathrm{Homeo}(\Sigma)$ и $\mathrm{Isot}(\Sigma)$, состоящие из всех гомеоморфизмов, фиксирующих x. Пусть $\mathrm{Isot}_x(\Sigma)$ обозначает подгруппу группы $\mathrm{Isot}(\Sigma)$ состоящую из тех гомеоморфизмов, которые изотопны, относительно x, тождественному гомеоморфизму.

Пусть ν – замкнутая кривая в Σ. Говорят, что ν находится в *общем положении*, если ν локально вложена в Σ и пересекает себя трансверсально без точек кратности три. Хасс и Скотт [13] ввели следующие комбинаторные движения, не изменяющие свободного гомотопического класса ν:

1. Элиминация моногона, ограничивающего диск в $\Sigma \setminus \nu$.
2. Элиминация бигона, ограничивающего диск в $\Sigma \setminus \nu$.
3. Гомотопия ребра треугольника в $\Sigma \setminus \nu$ через противоположную вершину (см. рис. 1).

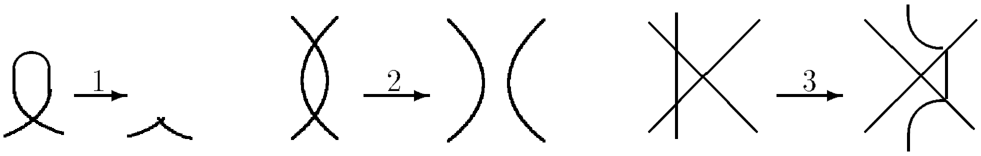


Рис. 1

Первые два движения уменьшают число точек самопересечения кривой. Третье движение называется *треугольным* и не изменяет число точек самопересечения.

Замкнутая кривая ν, находящаяся в общем положении в Σ, называется *минимальным представителем*, если она имеет минимально возможное число точек самопересечения среди всех кривых, находящихся в общем положении и свободно гомотопных ν.

Теорема 2.1 [13]. *Пусть Σ – компактная поверхность.*

(1) *Замкнутая кривая ν, находящаяся в общем положении в Σ, может быть переведена в минимальный представитель конечным числом движений вида* 1, 2 *и* 3.

(2) *Пусть ν и μ – два гомотопных минимальных представителя. Тогда существует кривая ν', полученная из ν конечным числом треугольных движений, и изотопия поверхности Σ, переводящая ν' в μ.*

B. Пусть T^0 обозначает тор с дыркой. Напомним, что F_2 обозначает свободную группу с базисом $\{a, b\}$. Зафиксируем точку x в T^0 и отождествим F_2 с $\pi_1(T^0, x)$ так, что параллель T^0 соответствует элементу b, а меридиан – элементу a. Тогда, при подходящей ориентации, граничная петля T^0 соответствует элементу $a^{-1}b^{-1}ab$. Каждый автоморфизм $\alpha \in \mathrm{Aut}(\pi_1(T^0, x))$ индуцируется некоторым гомеоморфизмом $\widetilde{\alpha} \in \mathrm{Homeo}(T^0, x)$. Более того, $\mathrm{Homeo}(T^0, x)/\mathrm{Isot}_x(T^0) \cong \mathrm{Aut}(\pi_1(T^0, x)) = \mathrm{Aut}(F_2)$ и $\mathrm{Isot}(T^0, x)/\mathrm{Isot}_x(T^0) \cong \mathrm{Inn}(F_2)$ [18].

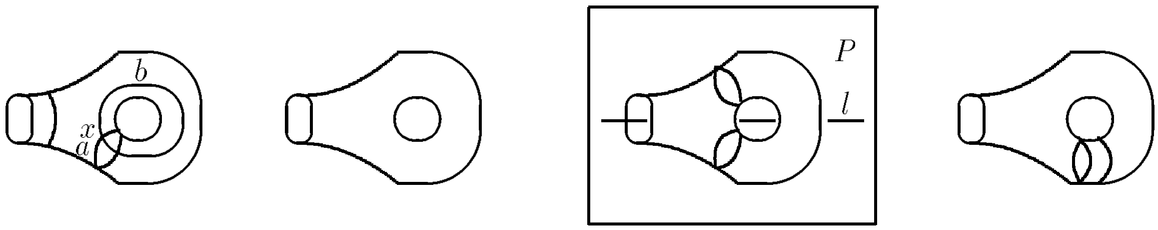
Существует взаимно однозначное соответствие между классами сопряженности элементов F_2 и свободными гомотопическими классами замкнутых кривых в T^0. Для $w \in F_2$ обозначим через $\widetilde{w}$ некоторую замкнутую кривую из свободного гомотопического класса, соответствующего классу сопряженности w. Можно считать, что $\widetilde{w}$ минимальный представитель.

Пусть $\alpha \in \mathrm{Aut}(F_2)$, $w \in F_2$ не является собственной степенью, $w \neq 1$, и пусть $\alpha(w) = w$. Тогда $\widetilde{\alpha}(\widetilde{w})$ свободно гомотопно $\widetilde{w}$. По теореме 2.1, $\widetilde{\alpha}(\widetilde{w})$ может быть передвинута в $\widetilde{w}$ с помощью конечного числа треугольных движений и изотопии. Пусть $N(\widetilde{w})$ – подповерхность T^0, являющаяся объединением регулярной окрестности кривой $\widetilde{w}$ и всех компонент дополнения к этой окрестности, гомеоморфных диску или кольцу, содержащему ∂T^0. Анализируя треугольные движения, можно заключить, что существует изотопия $\widetilde{i}$ поверхности T^0, отображающая $\widetilde{\alpha}(N(\widetilde{w}))$ на $N(\widetilde{w})$ и такая, что $\widetilde{i}(x) = x$. Более того, $(\widetilde{\alpha}\widetilde{i})(\widetilde{w})$ свободно гомотопно $\widetilde{w}$ в $N(\widetilde{w})$.

Лемма 2.2 [15]. *Следующая группа конечна:*

$$\{\varphi \in \mathrm{Homeo}(N(\widetilde{w}))\,|\, \varphi(\widetilde{w})\,\text{свободно гомотопно}\ \widetilde{w}\ \text{в}\ N(\widetilde{w})\}/\mathrm{Isot}(N(\widetilde{w})).$$

C. Все возможные типы подповерхностей $N(\widetilde{w})$, с точностью до гомеоморфизма, приведены на рис. 2 (это можно доказать с помощью аргументов, использующих род поверхности).



Сл. 1 *Сл. 2* *Сл. 3* *Сл. 4*

Рис. 2

Это влечет классификацию α и w с точностью до сопряженности в $\mathrm{Aut}(F_2)$. Рассмотрим эти случаи.

1) В этом случае $\widetilde{w}$ соответствует слову w, которое сопряжено в F_2 с $[a,b]^{\pm 1}$. Поэтому α сопряжен с некоторым элементом из $\mathrm{St}([a,b])$. По [4] этот стабилизатор равен $\langle \beta, \gamma \rangle$.

2) Так как $\mathrm{Homeo}(T^0)/\mathrm{Isot}(T^0) \cong \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, то αi – автоморфизм конечного порядка по модулю $\mathrm{Inn}(F_2)$ ввиду леммы 2.2. По лемме 1.1 α сопряжен с $\rho, \tau, \sigma, \sigma_1, \sigma_2$, σ_3 или 1 по модулю внутренних автоморфизмов.

3) В этом случае подгруппа группы $\mathrm{Homeo}(N(\widetilde{w}))$, состоящая из всех гомеоморфизмов, оставляющих границу T^0 на месте, порождена, по модулю $\mathrm{Isot}(N(\widetilde{w}))$, двумя коммутирующими гомеоморфизмами. Первый индуцируется отражением относительно плоскости P, содержащей $\widetilde{b}$, второй индуцируется вращением на 180° вокруг оси $l \in P$ (см. рис. 2). Эти гомеоморфизмы индуцируют на $\pi_1(T^0, x)$ автоморфизмы σ_3 и $\sigma_2\widehat{b}$. Любой гомеоморфизм подповерхности $N(\widetilde{w})$, фиксирующий границу $N(\widetilde{w})$, может быть продолжен до гомеоморфизма T^0 с помощью только степени скручивания Дэна вдоль простой замкнутой кривой, разделяющей $T^0 \setminus N(\widetilde{w})$. Поэтому $\alpha = \beta^t \sigma_2^p \sigma_3^q$ по модулю внутренних автоморфизмов, $p, q \in \{0, 1\}$, $t \in \mathbb{Z}$.

Автоморфизмы $\beta^t \sigma_2^p \sigma_3 \widehat{u}$, где $u \in F_2$, сопряжены с более простыми автоморфизмами:

$$\theta^{-1}(\beta^t \sigma_2^p \sigma_3 \widehat{u})\theta = \begin{cases} \sigma_3 \widehat{u^\theta} & \text{при } t = 2n, p = 0,\ \theta = \beta^n \sigma_3, \\ \sigma_1 \widehat{u^\theta} & \text{при } t = 2n+1, p = 0,\ \theta = \beta^n \gamma^{-1} \sigma_3, \\ \sigma_3 \widehat{b^{-n} u^\theta} & \text{при } t = 2n, p = 1,\ \theta = \beta^n \sigma_1, \\ \sigma_1 \widehat{a^{-1}(ab)^{-n} u^\theta} & \text{при } t = 2n+1, p = 1,\ \theta = \beta^n \sigma_1 \beta. \end{cases}$$

4) Этот случай дуален случаю 3.

3. Доказательства теорем

Лемма 3.1. *Если* $\beta^t(w)$ *сопряжено с* w, $t \neq 0$, *то* w *сопряжено с* a^k *или с* $w_0 = a^{k_1}b^{l_1}\dots a^{k_r}b^{l_r}$, *где* r *четно,* $l_i = (-1)^i$, $k_i \neq 0, i = 1, \dots, r$.

Доказательство. Слово w не может быть сопряжено с b^l при $l \neq 0$. Поэтому предположим, что w сопряжено с $w_0 = a^{k_1}b^{l_1}\dots a^{k_r}b^{l_r}$, где $k_i, l_i \neq 0, i = 1, \dots, r$. Слово w_0 сопряжено с $\beta^{nt}(w_0) = a^{k_1}(a^{nt}b)^{l_1}\dots a^{k_r}(a^{nt}b)^{l_r}$ для любого $n \in \mathbb{Z}$. Выберем такое n, чтобы $|k_i \pm nt| > \max\{|k_1|, \dots, |k_r|\}$ для всех i. Тогда b-слоги в циклическом слове $\beta^{nt}(w_0)$ не сокращаются. Поэтому $l_i = \pm 1$. Более того, $l_{i+1} = -l_i$ для всех i $(mod\, r)$, так как в противном случае существует большая степень a в циклическом слове $\beta^{nt}(w_0)$. После сопряжения получаем $l_i = (-1)^i$, $i = 1, \dots, r$. $\square$

Лемма 3.2. *Предположим* $\beta^t\widehat{u}(w) = w$, *где* $w = v^{-1}w_0v$ *и* w_0, *как в лемме* 3.1. *Если* w_0 *не собственная степень, то* $\beta^t\widehat{u} = \widehat{v}^{-1}(\beta^t\widehat{w_0}^{\,s})\widehat{v}$ *для некоторого* $s \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Используя $w_0 \in \mathrm{Fix}(\beta)$, имеем

$$v^{-1}w_0v = u^{-1}\beta^t(v^{-1}w_0v)u = u^{-1}\beta^t(v^{-1})w_0\beta^t(v)u.$$

Следовательно, $\beta^t(v)uv^{-1} = w_0^s$ для некоторого s и доказательство легко завершить. $\square$

Лемма 3.3. 1) *Пусть* w_0, *как в лемме* 3.1 *и* $s \neq 0$. *Если* w_0 *не собственная степень, то* $\mathrm{Fix}(\beta^t\widehat{w}_0^s) = \langle w_0\rangle$.

2) $\mathrm{Fix}(\beta^t) = \langle a, a^{-1}b^{-1}ab\rangle$, $\mathrm{Fix}(\beta^t\widehat{a}^t) = \langle a, ba^{-1}b^{-1}a\rangle$, $\mathrm{Fix}(\beta^t\widehat{a}^s) = \langle a\rangle$ *при* $t \neq 0$ и $s \neq 0, t$.

Доказательство. 1) Предположим $t \neq 0$. Ввиду леммы 1.2 достаточно доказать, что $\beta^t\widehat{w}_0^s$ не сопряжено со степенью β. Предположим противное: $\beta^t\widehat{w}_0^s = \alpha^{-1}\beta^l\alpha$. Матричные вычисления показывают, что $l = \pm t$. Так как $\beta^{-1} = \sigma_3^{-1}\beta\sigma_3$, мы можем считать, что $l = t$. Снова используя матрицы, получаем $\alpha = \beta^r\widehat{x}$ или $\alpha = \beta^r\sigma_2\widehat{x}$ для некоторых $x \in F_2$ и $r \in \mathbb{Z}$. В первом случае $w_0^s = (x^{-1})^{\beta^t}x$, во втором $w_0^s = (x^{-1}b)^{\beta^t}(b^{-1}x)$.

Итак, рассмотрим уравнение $w_0^s = (z^{-1})^{\beta^t}z$. Пусть z – его решение минимальной длины. Тогда последняя буква z^{-1} есть b или b^{-1}: $z^{-1} = a^{p_1}b^{q_1}\dots a^{p_s}b^{q_s}$, $p_2, \dots, p_s \neq 0, q_1, \dots, q_s \neq 0$. Так как $w_0 \in \mathrm{Fix}(\beta)$, то $w_0^s = (z^{-1})^{\beta^{kt}}z^{\beta^{(k-1)t}}$ для любого $k \in \mathbb{Z}$. Перемножая эти равенства при $k = 1, \dots, n$, получаем

$$w_0^{ns} = (z^{-1})^{\beta^{nt}}z = a^{p_1}(a^{nt}b)^{q_1}\dots a^{p_s}(a^{nt}b)^{q_s}\cdot b^{-q_s}a^{-p_s}\dots b^{-q_1}a^{-p_1}.$$

Взяв достаточно большое n, мы можем считать, что нет сокращений между b-буквами в $(z^{-1})^{\beta^{nt}}$. Если $q_s \leqslant -1$, то нет сокращений на стыке между $(z^{-1})^{\beta^{nt}}$ и z. Если $q_s \geqslant 2$, то имеется сокращение только одной пары букв между $(z^{-1})^{\beta^{nt}}$ и z. Так как b – последняя буква w_0^{ns}, то $p_1 = 0$ в обоих случаях. Так как $a^{\pm 1}$ – первая буква w_0^{ns}, то $q_1 > 0$. Но тогда первый слог w_0^{ns} есть a^{nt}, что приводит к противоречию при больших n. Если $q_s = 1$, то $q_{s-1} < 0$, иначе w_0^{ns} содержало бы слог a^{nt}. Тогда $z = b^{-1}a^{-p_s}bz_1$, $|z_1| < |z|$ и $w_0^s = (z_1^{-1})^{\beta^t}z_1$ – противоречие.

2) Это утверждение следует из алгоритма в [20]. $\square$

Лемма 3.4. *Пусть w не собственная степень, $w \neq 1$ и $t \neq 0$. Слово $(\beta^t\sigma_2)(w)$ сопряжено с w тогда и только тогда, когда w сопряжено с $w_0 = w_1 w_1^{\sigma_2}$, где $w_1 = a^{k_1}b^{-1}a^{k_2}b\dots a^{k_{2m+1}}b^{-1}$, $k_i \neq 0, i = 1,\dots,2m+1$, b^{-1} и b перемежаются.*

Доказательство. Использовать $(\beta^t\sigma_2)^2 = \beta^{2t}\widehat{a}^t$ и лемму 3.1. $\square$

Лемма 3.5. *Предположим $(\beta^t\sigma_2\widehat{u})(w) = w$, где $w = v^{-1}w_0v$ и w_0, как в лемме 3.4. Если w_0 не собственная степень, то $\beta^t\sigma_2\widehat{u} = \widehat{v}^{-1}(\beta^t\sigma_2\widehat{w_1^{-1}w_0^s})\widehat{v}$ для некоторого $s \in \mathbb{Z}$.*

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 3.2 и использует тот факт, что $(\beta^t\sigma_2)(w_0) = w_1^{-1}w_0w_1$. $\square$

Лемма 3.6. *Пусть w_0, как в лемме 3.4, $s,t \in \mathbb{Z}$. Если w_0 не собственная степень, то* $\mathrm{Fix}(\beta^t\sigma_2\widehat{w_1^{-1}w_0^s}) = \langle w_0\rangle$.

Доказательство. Обозначим $x = \beta^t\sigma_2\widehat{w_1^{-1}w_0^s}$. Тогда $x^2 = \beta^{2t}\widehat{w_0}^{2s-1}$, что следует из равенств $(\beta^t\sigma_2)^2 = \beta^{2t}\widehat{a}^t$, $(w_1^{-1})^{\beta^t\sigma_2} = a^{-t}(w_1^{-1})^{\sigma_2}$ и $(w_0)^{\beta^t\sigma_2} = w_1^{-1}w_0w_1$. Следовательно, $\mathrm{Fix}(x) \subseteq \mathrm{Fix}(x^2) = \langle w_0\rangle$. Обратное включение очевидно. $\square$

Доказательство теоремы 1.3. Утверждения теоремы до слов “Кроме того” следуют из пункта 2.C и леммы 1.2. Пункты 4 и 5 теоремы следуют из лемм 3.1 – 3.6. Докажем пункты 1, 2 и 3. Пункты 2 и 3 рассматриваются ниже совместно.

1) Так как $\rho^6 = \widehat{bab^{-1}a^{-1}}$, то $w(\rho,u^{-1})\cdot\widehat{aba^{-1}b^{-1}} = (\widehat{u}^{-1}\rho^{-1})^6$. Это влечет $\langle\sqrt{w(\rho,u^{-1})\cdot aba^{-1}b^{-1}}\,\rangle \leqslant \mathrm{Fix}(\rho\widehat{u})$. Более того, $w(\rho,u^{-1})\cdot aba^{-1}b^{-1} \neq 1$, так как в $\mathrm{Aut}(F_2)$ не существует элемента порядка 6 (см. лемму 1.1). Так как $\rho\widehat{u}$ и β^t не сопряжены при любом t, мы получаем $\mathrm{Fix}(\rho\widehat{u}) = \langle\sqrt{w(\rho,u^{-1})\cdot aba^{-1}b^{-1}}\,\rangle$ ввиду леммы 1.2.

2) Пусть $|\varphi| = n$. Тогда $w(\varphi,u^{-1}) = (\widehat{u}^{-1}\varphi^{-1})^n$. В частности, если $\varphi\widehat{u}$ сопряжено с φ, то $w(\varphi,u^{-1}) = 1$. Кроме того, отсюда следует, что $\langle\sqrt{w(\varphi,u^{-1})}\,\rangle \leqslant \mathrm{Fix}(\varphi\widehat{u})$. Если $w(\varphi,u^{-1}) \neq 1$, то $\langle\sqrt{w(\varphi,u^{-1})}\rangle = \mathrm{Fix}(\varphi\widehat{u})$.

Теперь предположим, что $w(\varphi,u^{-1}) = 1$. Тогда $|\varphi\widehat{u}| = n$.

Случай 1. Пусть $\varphi \in \{\tau,\sigma,\sigma_1,\sigma_2\}$.

По лемме 1.1 $\varphi\widehat{u} = \psi^{-1}\varphi\psi$ для некоторого $\psi \in \mathrm{Aut}(F_2)$. Поэтому $\mathrm{Fix}(\varphi\widehat{u}) = (\mathrm{Fix}(\varphi))^\psi = \{1\}$, так как $\mathrm{Fix}(\sigma_1) = \{1\}$, $\mathrm{Fix}(\sigma) \leqslant \mathrm{Fix}(\sigma^2) = \mathrm{Fix}(\sigma_2) = \{1\}$ и $\mathrm{Fix}(\tau) = \{1\}$ ввиду теоремы 1 из [1].

Из матриц следует, что если $\varphi = \sigma$, то $\psi = \sigma^i\widehat{x}$ для некоторых $i \in \{0,1,2,3\}$ и $x \in F_2$. Это влечет $u = (x^{-1})^\sigma x$.

Если $\varphi = \tau$, то $\psi = \rho^t\widehat{y} = \tau^{t_1}\rho^{t_2}\widehat{x}$ для некоторых $t \in \{0,\dots,5\}$, $t_1 \in \{0,1,2\}, t_2 \in \{0,1\}, y, x \in F_2$. Это влечет $\widehat{u} = (\widehat{x}^{-1})^\tau\tau^{-1}\rho^{-t_2}\tau\rho^{t_2}\widehat{x}$. Если $t_2 = 0$, то $u = (x^{-1})^\tau x$. Если $t_2 = 1$, то $u = (x^{-1})^\tau bx$.

Если $\varphi = \sigma_1$ или σ_2, то $w(\varphi,u^{-1}) = 1$ влечет $u^\varphi = u^{-1}$. С помощью простого анализа слов или матриц легко вывести желаемую форму u.

Случай 2. Пусть $\varphi = \sigma_3$.

По лемме 1.1 существует $\psi \in \mathrm{Aut}(F_2)$ такое, что $\sigma_3\widehat{u} = \psi^{-1}\sigma_3\psi$ (подслучай 1) или $\sigma_3\widehat{u} = \psi^{-1}(\sigma_3\widehat{a})\psi$ (подслучай 2). Из матриц следует, что $\psi = \sigma_3^{\varepsilon_3}\sigma_2^{\varepsilon_2}\widehat{x}$ для некоторых

$\varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \{0,1\}, x \in F_2$. Так как σ_2 и σ_3 коммутируют, то $u = (x^{-1})^{\sigma_3} x$ в подслучае 1 и $u = (x^{-1})^{\sigma_3} a^{\pm 1} x$ в подслучае 2. Заметим, что $(x^{-1})^{\sigma_3} a^{-1} x = (x_1^{-1})^{\sigma_3} a x_1$, где $x_1 = a^{-1}x$.

В первом подслучае $\sigma_3 \widehat{u} = \widehat{x}^{-1} \sigma_3 \widehat{x}$ и $\mathrm{Fix}(\sigma_3 \widehat{u}) = (\mathrm{Fix}(\sigma_3))^x = \langle b^x \rangle$.

Во втором подслучае $\sigma_3 \widehat{u} = \widehat{x}^{-1}(\sigma_3 \widehat{a}) \widehat{x}$ и $\mathrm{Fix}(\sigma_3 \widehat{u}) = (\mathrm{Fix}(\sigma_3 \widehat{a}))^x = \{1\}$.

Если $u \neq (x^{-1})^{\sigma_3} x$ и $u \neq (x^{-1})^{\sigma_3} a x$, где $x \in F_2$, то $|\sigma_3 \widehat{u}| \neq 2$. В этом случае $w(\sigma_3, u^{-1}) \neq 1$ и $\mathrm{Fix}(\sigma_3 \widehat{u}) = \langle \sqrt{w(\sigma_3, u^{-1})} \rangle$. Теорема доказана. $\square$

Теорема 1.4. *Все возможные типы, с точностью до изоморфизма, стабилизаторов нетривиальных элементов из* F_2 *в группе* $\mathrm{Aut}(F_2)$ *перечислены в следующем списке:* Z, $Z \times Z$, $\langle x, y \mid x^{-1} y x = y^{-1} \rangle$, $\langle x, y \mid x^2 = [x, y^2] = 1 \rangle$ *и* $\langle x, y \mid xyx = yxy \rangle$.

Доказательство. Пусть $w \in F_2, w \neq 1$ и w не собственная степень. Обозначим через $\overline{\mathrm{St}}(w)$ образ $\mathrm{St}(w)$ в $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$. Ясно, что $\overline{\mathrm{St}}(w) \cong \mathrm{St}(w)/\langle \widehat{w} \rangle$.

Сначала рассмотрим случай, когда w сопряжено с $[a,b]^{\pm 1}$. Мы можем считать, что $w = [a,b]$. Известно, что $\mathrm{St}(w) = \langle \beta, \gamma \rangle$ (см., например, [4]; это же следует из [16]). Докажем, что

$$\mathrm{St}(w) = \langle \beta, \gamma \mid \gamma\beta\gamma = \beta\gamma\beta \rangle.$$

Заметим, что соотношение $\gamma\beta\gamma = \beta\gamma\beta$ влечет соотношения $[(\beta\gamma\beta)^4, \beta] = 1$ и $[(\beta\gamma\beta)^4, \gamma] = 1$. Так как $\mathrm{St}(w) \cap \mathrm{Inn}(F_2) = \langle \widehat{[a,b]} \rangle = \langle (\beta\gamma\beta)^4 \rangle$, то достаточно доказать, что $\overline{\mathrm{St}}(w) = \langle \overline{\beta}, \overline{\gamma} \mid \overline{\beta}\overline{\gamma}\overline{\beta} = \overline{\gamma}\overline{\beta}\overline{\gamma},\ (\overline{\beta}\overline{\gamma}\overline{\beta})^4 = 1 \rangle$. Это следует из разложения

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cong Z_4 \underset{Z_2}{*} Z_6 \cong \langle \bar{\sigma} \rangle \underset{\langle \bar{\sigma}_2 \rangle}{*} \langle \bar{\rho} \rangle$$

и выражений $\overline{\beta}\overline{\gamma}\overline{\beta} = \overline{\sigma}$ и $\overline{\gamma}\overline{\beta} = \overline{\rho}^{-1}$.

Теперь предположим, что w не сопряжено с $[a,b]^{\pm 1}$.

Утверждение 1. Группа $\overline{\mathrm{St}}(w)$ не содержит подгруппы, изоморфной $Z_2 \times Z_2$.

Доказательство. Предположим, что $\mathrm{St}(w)/\langle \widehat{w} \rangle$ содержит $Z_2 \times Z_2$. Из (1) следует, что $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ содержит только два класса сопряженности подгрупп изоморфных $Z_2 \times Z_2$. Один класс содержит подгруппу $\langle \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2 \rangle$, второй – подгруппу $\langle \bar{\sigma}_3, \bar{\sigma}_2 \rangle$. После подходящего сопряжения необходимо рассмотреть два случая.

1) $\mathrm{St}(w)$ содержит $\sigma_1 \widehat{u}_1$ и $\sigma_2 \widehat{u}_2$ для некоторых $u_1, u_2 \in F_2$.

Тогда σ_1 и σ_2 фиксируют одно и то же слово w с точностью до сопряжения. Легко показать, что w сопряжено с циклически приведенными словами вида $v_i v_i^{\sigma_i}$ для $i = 1, 2$. Поэтому существует нетривиальное разложение $v_1 = w_1 w_2$ такое, что $v_2 = w_2 w_1^{\sigma_1}$ и $v_2^{\sigma_2} = w_2^{\sigma_1} w_1$. Это влечет $v_2^{\sigma_2 \sigma_1} = v_2$. Так как $\mathrm{Fix}(\sigma_2 \sigma_1) = \{1\}$, мы получаем $v_2 = w = 1$ – противоречие.

2) $\mathrm{St}(w)$ содержит $\sigma_3 \widehat{u}_3$ и $\sigma_2 \widehat{u}_2$ для некоторого $u_3, u_2 \in F_2$.

Так как w^{σ_3} сопряжено с w, то слово w сопряжено со степенью b или со словом вида $v_3 v_3^{\sigma_3}$. С другой стороны, w сопряжено со словом вида $v_2 v_2^{\sigma_2}$. Поэтому w не сопряжено со степенью b. Аргументируя, как и выше, заключаем, что $v_2^{\sigma_2 \sigma_3} = v_2$. Отсюда следует, что v_2 – степень a и $w = 1$. Мы снова получаем противоречие. $\square$

Утверждение 2. Если $w \neq 1$ не собственная степень и $\mathrm{St}(w)$ содержит инволюцию, то w – примитивный элемент и $\mathrm{St}(w)$ имеет представление $\langle x, y \mid x^2 = [x, y^2] = 1 \rangle$.

Доказательство. По лемме 1.1 любая инволюция в $\mathrm{Aut}(F_2)$ сопряжена с $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ или с $\sigma_3\widehat{a}$. Так как каждая инволюция $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\widehat{a}$ фиксирует только 1 и $\mathrm{Fix}(\sigma_3) = \langle b\rangle$, то w – примитивный элемент. Теперь утверждение 2 следует из [21] или из случая 3 ниже. □

Последняя часть доказательства теоремы 1.4 имеет дело с двумя случаями, где группа $\overline{\mathrm{St}}(w)$ конечна и бесконечна.

1) Предположим, что группа $\overline{\mathrm{St}}(w)$ конечна. Список всех конечных подгрупп в $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, с точностью до изоморфизма, следующий: $\{1\}$, Z_2, Z_3, Z_4, Z_6, D_2, D_3, D_4 и D_6. Если $\overline{\mathrm{St}}(w) = \{1\}$, то $\mathrm{St}(w) = \langle\widehat{w}\rangle \cong Z$. Группы D_2, D_4 и D_6 отвергаются по утверждению 1. Другие случаи рассматриваются с помощью следующих утверждений.

(i) Любая конечно порожденная почти свободная группа изоморфна фундаментальной группе конечного графа конечных групп [18].

(ii) Любой элемент порядка 3 в $\mathrm{Aut}(F_2)$ сопряжен с τ и, следовательно, фиксирует только тривиальное слово.

(iii) Любой элемент порядка 4 в $\mathrm{Aut}(F_2)$ сопряжен с σ и, следовательно, фиксирует только тривиальное слово.

Предположим, что $\mathrm{St}(w)/\langle\widehat{w}\rangle$ изоморфно D_3, Z_2, Z_3, Z_4 или Z_6. Тогда вершинные группы соответствующего графа групп изоморфны $\{1\}$ или Z_2. По утверждению 2 вершинные группы могут быть только тривиальны. Отсюда следует, что $\mathrm{St}(w) \cong Z$.

2) Предположим, что группа $\overline{\mathrm{St}}(w)$ бесконечна. Тогда существует элемент $\alpha \in \mathrm{St}(w)$ такой, что $|\overline{\alpha}| = \infty$. По теореме 1.3, α сопряжен с элементом из $\langle\beta, \gamma\rangle$ или α сопряжен с $\beta^t\widehat{u}$ или с $\beta^t\sigma_2\widehat{u}$ для некоторых $t \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}, u \in F_2$. В первом случае α фиксирует некоторый элемент, сопряженный с $[a,b]$. Напомним, что α фиксирует слово w, которое не сопряжено с любой степенью $[a,b]$. По лемме 1.2, $rk(\mathrm{Fix}(\alpha)) = 2$ и α сопряжен со степенью β. В любом случае из теоремы 1.3 и предположения, что w не собственная степень, следует, что w автоморфно сопряжено с $w_0 = a^{k_1}b^{-1}a^{k_2}b\ldots b^{-1}a^{k_{2r}}b$, где $k_1,\ldots,k_{2r} \neq 0$, или с $w_0 = a$. Итак, без потери общности считаем, что $w = w_0$. Заметим, что $\beta \in \mathrm{St}(w_0)$.

Группа $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ содержит свободную неабелеву нормальную подгруппу F конечного индекса $n \geqslant 5$. Предположим, что $\overline{\mathrm{St}}(w_0) \cap F$ не циклическая группа. Тогда существует $\bar{\delta} \in \overline{\mathrm{St}}(w_0) \cap F$ такое, что $\langle\bar{\delta}, \bar{\beta}^n\rangle$ – свободная группа ранга 2. В частности, $|\bar{\delta}| = \infty$ и $|\bar{\beta}^n\bar{\delta}| = \infty$. Как было показано выше, любой элемент из $\mathrm{St}(w_0)$, чей образ в $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ имеет бесконечный порядок, сопряжен с $\beta^t\widehat{u}$ или с $\beta^t\sigma_2\widehat{u}$ для некоторых $t \in \mathbb{Z}, u \in F_2$. Взяв δ^2 вместо δ, можно считать, что δ сопряжено со степенью β по модулю внутренних автоморфизмов. Тогда $\mathrm{Tr}(\bar{\delta}) = 2$ и $\mathrm{Tr}(\bar{\beta}^n\bar{\delta}) = \pm 2$.

Используя легкие матричные вычисления, можно вывести, что $\bar{\delta} = \bar{\beta}^s$. Получаем противоречие. Поэтому группа $\overline{\mathrm{St}}(w_0)$ почти циклическая и содержит $\langle\bar{\beta}\rangle$ в качестве подгруппы конечного индекса. Поэтому любое $\bar{\alpha} \in \overline{\mathrm{St}}(w_0)$ коммутирует с $\bar{\beta}^n$ или обращает $\bar{\beta}^n$. Тогда $\bar{\alpha} = \bar{\beta}^k$ или $\bar{\beta}^k\bar{\sigma}_i$ для некоторых $k \in \mathbb{Z}, i = 2,3,4$, где $\sigma_4 = \sigma_2\sigma_3$. По утверждению 1, $\mathrm{St}(w_0) = \langle\widehat{w}_0, \beta\rangle \cong Z \times Z$ или $\mathrm{St}(w_0) = \langle\widehat{w}_0, \beta, \sigma_i\widehat{u}\rangle$ для некоторых $u \in F_2$, $i = 2,3,4$. Рассмотрим эти три случая.

Случай 1. $\mathrm{St}(w_0) = \langle \widehat{w}_0, \beta, \sigma_2\widehat{u}\rangle$.

Тогда $w_0 = w_1 w_1^{\sigma_2}$, где $w_1 = a^{k_1}b^{-1}a^{k_2}b\dots a^{k_r}b^{-1}$, r нечетно и $u = w_1^{-1}w_0^l$. Обозначим $\sigma_2\widehat{w}_1^{-1}$ через σ_2'. Тогда $\mathrm{St}(w_0) = \langle \widehat{w}_0, \beta, \sigma_2' \,|\, (\sigma_2')^2 = \widehat{w}_0^{-1},\ [\sigma_2', \beta] = [\widehat{w}_0, \beta] = 1\rangle \cong \langle \beta, \sigma_2' \,|\, [\sigma_2', \beta] = 1\rangle$.

Случай 2. $\mathrm{St}(w_0) = \langle \widehat{w}_0, \beta, \sigma_3\widehat{u}\rangle$.

Тогда $w_0 = w_1 w_1^{\sigma_3}$, где $w_1 = a^{k_1}b^{-1}a^{k_2}b\dots a^{k_r}b$, r четно и $u = w_1^{-1}w_0^l$. Обозначим $\sigma_3\widehat{w}_1^{-1}$ через σ_3'. Тогда $\mathrm{St}(w_0) = \langle \widehat{w}_0, \beta, \sigma_3' \,|\, (\sigma_3')^2 = \widehat{w}_0^{-1}, (\sigma_3')^{-1}\beta\sigma_3' = \beta^{-1}, [\widehat{w}_0, \beta] = 1\rangle \cong \langle \beta, \sigma_3' \,|\, (\sigma_3')^{-1}\beta\sigma_3' = \beta^{-1}\rangle$.

Случай 3. $\mathrm{St}(w_0) = \langle \widehat{w}_0, \beta, \sigma_4\widehat{u}\rangle$.

Рассмотрим два подслучая.

(1) $w_0 = a$.

Тогда $u = a^k$ и $\mathrm{St}(w_0) = \langle \widehat{a}, \beta, \sigma_4 \,|\, (\beta\sigma_4)^2 = \widehat{a}^{-1},\ \sigma_4^2 = 1,\ [\beta, \widehat{a}] = [\sigma_4, \widehat{a}] = 1\rangle$. Используя преобразования Тице, получаем $\mathrm{St}(w_0) = \langle \beta_1, \sigma_4 \mid (\sigma_4)^2 = [\sigma_4, \beta_1^2] = 1\rangle$, где $\beta_1 = \beta\sigma_4$.

(2) $w_0 = a^{k_1}b^{-1}a^{k_2}b\dots b^{-1}a^{k_{2r}}b$.

Тогда $w_0 = w_1 w_1^{\sigma_4}$, где $w_1 = a^{k_1}b^{-1}a^{k_2}b\dots a^{k_r}b^{-1}$, r нечетно и $u = w_1^{-1}w_0^l$. Обозначим $\sigma_4\widehat{w}_1^{-1}$ через σ_4'. Тогда $\mathrm{St}(w_0) = \langle \widehat{w}_0, \beta, \sigma_4' \,|\, (\sigma_4')^2 = \widehat{w}_0^{-1}, (\beta\sigma_4')^2 = \widehat{w}_0^{-1},\ [\beta, \widehat{w}_0] = 1\rangle$. Обозначим $\beta\sigma_4'$ через β'. Тогда, используя преобразования Тице, получаем $\mathrm{St}(w_0) = \langle \beta', \sigma_4' \,|\, (\beta')^2 = (\sigma_4')^2\rangle$. Эта группа имеет также представление $\langle x, y \,|\, x^{-1}yx = y^{-1}\rangle$.

Заметим, что все группы в теореме 1.4 реализуются. Теорема доказана. $\square$

Лемма 3.7. *Пусть $\alpha \in \mathrm{Aut}(F_2)$ и $|\alpha| = 2$. Тогда можно эффективно решать, с каким из автоморфизмов $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_3\widehat{a}$ сопряжен α, а также эффективно находить один из сопрягающих элементов, если таковой существует.*

Доказательство. По лемме 1.1, α сопряжен с одним из автоморфизмов $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_3\widehat{a}$, и эти автоморфизмы попарно не сопряжены. Используя канонический гомоморфизм $- : \mathrm{Aut}(F_2) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, можно найти $\psi \in \mathrm{Aut}(F_2), y \in F_2$ и $i \in \{1, 2, 3\}$ такие, что $\alpha = \psi\sigma_i\psi^{-1}\widehat{y} = \psi\sigma_i\widehat{y^{\psi}}\psi^{-1}$. Обозначив $u = y^{\psi}$, можно считать, что $\alpha = \sigma_i\widehat{u}$. Далее мы используем п. 2 и 3 из теоремы 1.3.

1) $i = 1$. Тогда можно найти $x \in F_2$ такой, что $u = (x^{-1})^{\sigma_1}x$. В этом случае $\alpha = \widehat{x}^{-1}\sigma_1\widehat{x}$.

2) $i = 2$. Тогда можно найти $x \in F_2$ такой, что u равно $(x^{-1})^{\sigma_2}x$, $(x^{-1})^{\sigma_2}ax$ или $(x^{-1})^{\sigma_2}bx$. В первом случае $\alpha = \widehat{x}^{-1}\sigma_2\widehat{x}$, во втором $\alpha = \widehat{x}^{-1}\beta\sigma_2\beta^{-1}\widehat{x}$, в третьем $\alpha = \widehat{x}^{-1}\sigma_1\beta\sigma_2\beta^{-1}\sigma_1^{-1}\widehat{x}$.

3) $i = 3$. Тогда можно найти $x \in F_2$ такой, что u равно $(x^{-1})^{\sigma_3}x$ или $(x^{-1})^{\sigma_3}ax$. В первом случае $\alpha = \widehat{x}^{-1}\sigma_3\widehat{x}$, во втором $\alpha = \widehat{x}^{-1}(\sigma_3\widehat{a})\widehat{x}$.

Обозначения. Обозначим через $\mathrm{SAut}(F_2)$ полный прообраз $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ относительно гомоморфизма $- : \mathrm{Aut}(F_2) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$. Для $\alpha \in \mathrm{SAut}(F_2)$ обозначим через $C(\alpha)$ централизатор α в группе $\mathrm{SAut}(F_2)$, а через $\overline{C(\alpha)}$ – образ $C(\alpha)$ в $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ при указанном гомоморфизме.

Для $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ обозначим через $C(A)$ централизатор матрицы A в $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$. Известно, что если $A \neq \pm E$, то $C(A) = \langle \pm A_1\rangle$, где $A = A_1^k$ и k – максимально.

Лемма 3.8. 1) *Для произвольного элемента биавтоматной группы можно эффективно найти конечное множество, порождающее его централизатор* [12].

2) *Проблема сопряженности в биавтоматной группе эффективно разрешима* [10].

3) *Группа кос B_n с n нитями биавтоматна* [19, 7].

4) $\mathrm{SAut}(F_2) \cong B_4/Z(B_4)$, *где* $Z(B_4)$ – *центр группы* B_4 [14].

Теорема 1.5. *Существует эффективный алгоритм, который для данного автоморфизма $\alpha \in \mathrm{Aut}(F_2)$ находит некоторый базис его группы неподвижных точек* $\mathrm{Fix}(\alpha)$.

Доказательство. Считаем, что $\alpha \neq 1$ и $\alpha \neq \sigma_2\widehat{u}$ (по теореме 1.3 имеем $\mathrm{Fix}(\sigma_2\widehat{u}) = \langle\sqrt{w(\sigma_2, u^{-1})}\,\rangle$). С помощью матриц и утверждений 2 – 4 леммы 3.8 можно определить, сопряжен ли α с β^t для некоторого $t \neq 0$. Если $\alpha = \psi^{-1}\beta^t\psi$, то $\mathrm{Fix}(\alpha) = (\mathrm{Fix}(\beta^t))^{\psi} = (\mathrm{Fix}(\beta))^{\psi} = \langle a, [a,b]\rangle^{\psi}$. Поэтому далее мы считаем, что α не сопряжен с β^t для всех t. Тогда $rk(\mathrm{Fix}(\alpha)) \leqslant 1$ по лемме 1.2.

Сначала рассмотрим случай, где $\alpha \in \mathrm{SAut}(F_2)$. С помощью утверждения 1 леммы 3.8 найдем конечное множество порождающих $c_1, \dots, c_k$ централизатора $C(\alpha)$. Так как $C(\bar{\alpha})$ – почти циклическая группа и $\overline{C(\alpha)} \leqslant C(\bar{\alpha})$, то можно найти конечное представление для $\overline{C(\alpha)}$ в порождающих $\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_k$:

$$\overline{C(\alpha)} = \langle \bar{c}_1, \dots, \bar{c}_k \,|\, w_1(\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_k) = \dots = w_s(\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_k) = 1\rangle.$$

Группа $\mathrm{Fix}(\alpha)$ является ядром канонического гомоморфизма $C(\alpha) \to \overline{C(\alpha)}$, и, следовательно, совпадает с нормальным замыканием элементов

$$w_1(c_1, \dots, c_k), \dots, w_s(c_1, \dots, c_k)$$

в группе $C(\alpha)$. Если все $w_i(c_1, \dots, c_k) = 1$, то $\mathrm{Fix}(\alpha) = \{1\}$. Если же $w_i(c_1, \dots, c_k) \neq 1$ для некоторого i, то $\mathrm{Fix}(\alpha) = \langle\sqrt{w_i(c_1, \dots, c_k)}\,\rangle$.

Пусть теперь $\alpha \in \mathrm{Aut}(F_2) \setminus \mathrm{SAut}(F_2)$ и α имеет бесконечный порядок. Тогда $rk(\mathrm{Fix}(\alpha^2)) \leqslant 1$. В самом деле, если $rk(\mathrm{Fix}(\alpha^2)) = 2$, то α^2 сопряжен с β^k для некоторого $k \neq 0$. Из матриц следует, что k четно и α сопряжен с $\beta^{k/2}\widehat{v}$ или с $\beta^{k/2}\sigma_2\widehat{v}$ для некоторого $v \in F_2$. В частности, $\alpha \in \mathrm{SAut}(F_2)$. Противоречие. Так как $\mathrm{Fix}(\alpha) \leqslant \mathrm{Fix}(\alpha^2)$, то мы можем найти порождающий группы $\mathrm{Fix}(\alpha)$.

Наконец, пусть $\alpha \in \mathrm{Aut}(F_2) \setminus \mathrm{SAut}(F_2)$ и α имеет конечный порядок. По лемме 1.1, α сопряжен с σ_1, σ_3 или с $\sigma_3\widehat{a}$, и с помощью леммы 3.7 мы можем найти базис $\mathrm{Fix}(\alpha)$ и в этом случае. Теорема 1.5 доказана.

Теорема 1.6. *Проблема сопряженности в группе* $\mathrm{Aut}(F_2)$ *эффективно разрешима.*

Доказательство. По утверждениям 2 – 4 леммы 3.8 (см. также [3]) проблема сопряженности в группе $\mathrm{SAut}(F_2)$ решается эффективно. Также эффективно решается проблема сопряженности двух автоморфизмов из $\mathrm{SAut}(F_2)$ элементом из $\mathrm{Aut}(F_2)$.

Пусть теперь $\varphi, \psi \in \mathrm{Aut}(F_2) \setminus \mathrm{SAut}(F_2)$. Необходимым условием сопряженности элементов φ и ψ в группе $\mathrm{Aut}(F_2)$ является сопряженность матриц $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$ в группе

$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$. Пусть $\bar{\nu}^{-1}\bar{\psi}\bar{\nu} = \bar{\varphi}$ для некоторого $\nu \in \mathrm{Aut}(F_2)$. Найдем $y \in F_2$ такой, что $\nu^{-1}\psi\nu = \varphi\widehat{y}$. Отсюда следует, что элементы φ и ψ сопряжены тогда и только тогда, когда элементы φ и $\varphi\widehat{y}$ сопряжены. Предположим, что $c^{-1}\varphi c = \varphi\widehat{y}$. Используя разложение $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \cong D_4 \underset{D_2}{*} D_6$, можно найти такую матрицу $\bar{\varphi}_1$, что $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_1^k$ и k – максимально. Так как $\bar{\varphi} \neq \pm E$, то $C(\bar{\varphi}) = \langle \pm\bar{\varphi}_1 \rangle$. Тогда $\bar{c} = \pm\bar{\varphi}_1^j$ для некоторого целого j. Пусть $j = qk + r$, $0 \leqslant r < k$. Заменяя c на $\varphi^{-q}c$, можно считать, что $\bar{c} = \pm\bar{\varphi}_1^r$. Тогда $c = \sigma_2^\varepsilon\varphi_1^r\widehat{f}$ для некоторых $f \in F_2$, $\varepsilon \in \{0, 1\}$.

Итак, φ и $\varphi\widehat{y}$ сопряжены тогда и только тогда, когда для некоторых r и ε, $0 \leqslant r < k$, $\varepsilon \in \{0, 1\}$, и элемента $f \in F_2$ выполняется $\widehat{f}^{-1}(\varphi_1^{-r}\sigma_2^{-\varepsilon}\varphi\sigma_2^\varepsilon\varphi_1^r)\widehat{f} = \varphi\widehat{y}$. Так как образы элементов $\varphi_1^{-r}\sigma_2^{-\varepsilon}\varphi\sigma_2^\varepsilon\varphi_1^r$ и $\varphi\widehat{y}$ в группе $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ совпадают, то они отличаются на элемент из $\mathrm{Inn}(F_2)$. Поэтому достаточно научиться решать следующий вопрос:

Для данных $\alpha \in \mathrm{Aut}(F_2)$ и $x \in F_2$ существует ли $f \in F_2$ такой, что

$$\widehat{f}^{-1}\alpha\widehat{f} = \alpha\widehat{x}? \tag{2}$$

Следствием последнего равенства является равенство

$$\widehat{f}^{-1}\alpha^2\widehat{f} = (\alpha\widehat{x})^2. \tag{3}$$

Докажем, что можно эффективно распознавать существование $f \in F_2$, удовлетворяющего равенству (3). Элементы α^2 и $(\alpha x)^2$ принадлежат $\mathrm{SAut}(F_2)$ и для них эффективно разрешима проблема сопряженности в $\mathrm{SAut}(F_2)$. Предположим, эти элементы сопряжены в $\mathrm{SAut}(F_2)$ и найден некоторый элемент $g_0 \in \mathrm{SAut}(F_2)$ такой, что $g_0^{-1}\alpha^2 g_0 = (\alpha\widehat{x})^2$. Элемент g_0 может не принадлежать $\mathrm{Inn}(F_2)$. Множество всех решений уравнения $g^{-1}\alpha^2 g = (\alpha\widehat{x})^2$, $g \in \mathrm{SAut}(F_2)$, совпадает с правым смежным классом $C(\alpha^2)g_0$, где $C(\alpha^2)$ – централизатор α^2 в группе $\mathrm{SAut}(F_2)$. Поэтому решение уравнения (3) в группе F_2 существует тогда и только тогда, когда $\bar{g}_0^{-1} \in \overline{C(\alpha^2)}$. По лемме 3.8 можно найти конечное множество порождающих для $C(\alpha^2)$ и, следовательно, для $\overline{C(\alpha^2)}$. Так как $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ – почти свободная группа, то проблема вхождения в ее конечно порожденную подгруппу $\overline{C(\alpha^2)}$ эффективно разрешима. Предположим, что $\bar{g}_0^{-1} \in \overline{C(\alpha^2)}$, то есть $\bar{g}_0^{-1} = \bar{c}$ для некоторого $c \in C(\alpha^2)$. Полагая $f_0 = cg_0$, получаем, что f_0 – решение уравнения (3), лежащее в F_2.

Итак, пусть существует решение f_0 уравнения (3), лежащее в F_2. Все решения уравнения (3), лежащие в F_2, имеют вид hf_0, где $h \in \mathrm{Fix}(\alpha^2)$. Поэтому все решения уравнения $\widehat{f}^{-1}\alpha\widehat{f} = \alpha\widehat{x}$, если они существуют, имеют вид hf_0 для некоторых $h \in \mathrm{Fix}(\alpha^2)$.

Таким образом, вопрос (2) сводится к вопросу о существовании такого элемента $h \in \mathrm{Fix}(\alpha^2)$, что $\widehat{f}_0^{-1}\widehat{h}^{-1}\alpha\widehat{h}\widehat{f}_0 = \alpha\widehat{x}$. Положим $z = f_0 x^{-1}(f_0^{-1})^\alpha$. Тогда надо решить следующий вопрос:

существует ли такой элемент $h \in \mathrm{Fix}(\alpha^2)$, что $h^{-1}h^\alpha = z$?

Необходимым условием существования такого h является равенство $z^\alpha = z^{-1}$. Предположим, что оно выполнено (в частности, $z \in \mathrm{Fix}(\alpha^2)$) и $z \neq 1$. Тогда $rk(\mathrm{Fix}(\alpha^2)) = 1$ или 2. Найдем базис $\mathrm{Fix}(\alpha^2)$ по теореме 1.5. Если $rk(\mathrm{Fix}(\alpha^2)) = 1$, то α обращает любой элемент $\mathrm{Fix}(\alpha^2)$, так как $z^\alpha = z^{-1}$. Следовательно, желаемый h в этом случае существует тогда и только тогда, когда z является квадратом. Предположим, что $rk(\mathrm{Fix}(\alpha^2)) = 2$. Сменим обозначения: ограничение α на $\mathrm{Fix}(\alpha^2)$ обозначим через α, группу $\mathrm{Fix}(\alpha^2)$ обозначим через F_2. Тогда $|\alpha| = 2$. Ввиду леммы 3.7, после подходящего сопряжения можно считать, что α равен $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ или $\sigma_3\widehat{a}$. В каждом из этих случаев вопрос исследуется легко. □

Литература

[1] **Богопольский О. В.** К проблеме сопряженности автоморфизмов свободных групп // Алгебра и логика. 1989. Т. 28, № 1. С. 18–28.

[2] **Линдон Р., Шупп Р.** Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.

[3] **Маканин Г. С.** О нормализаторах группы кос // Мат. Сб. 1971. Т. 86, № 2. С. 171–179.

[4] **Мальцев А. И.** Об уравнении $zxyx^{-1}y^{-1}z^{-1} = aba^{-1}b^{-1}$ в свободной группе // Алгебра и Логика. 1962. Т. 1, № 5. С. 45–50.

[5] **Цишанг Х., Фогт Е., Колдевай Х.-Д.** Поверхности и разрывные группы. М.: Наука, 1988.

[6] **Bestvina M., Handel M.** Train tracks and automorphisms of free groups // Annals of Math. 1992. V. 135, № 2. P. 1–53.

[7] **Charney R.** Artin groups of finite type are biautomatic // Math. Ann. 1992. V. 292, № 4, 671–684.

[8] **Collins D. J., Turner E. C.** All automorphisms of free groups with maximal rank fixed point subgroups // Math. Proc. Camb. Soc. 1996. V. 119, № 4. P. 615–630.

[9] **Dyer J. L., Scott G. P.** Periodic automorphisms of free groups // Comm. Alg. 1975. V. 3. P. 195–201.

[10] **Epstein D., Cannon J., Holt D., Levy S., Paterson M., Thurston W.** Word processing in Groups. Boston: Jones and Barlett, 1992.

[11] **Garside F. A.** The braid group and other groups // Quart. J. of Math. 1969. V. 20, № 78. P. 235–254.

[12] **Gersten S. M., Short H.** Rational subgroups of biautomatic groups // Annals of mathematics. 1991. V. 134. P. 125–158.

[13] **Hass J., Scott P.** Shortening curves on surfaces // Topology. 1994. V. 33, № 1. P. 25–43.

[14] **Karrass A., Pietrowski A, Solitar D.** Some remarks on braid groups // Contemporary Math. 1984. V. 33. P. 341–352.

[15] **Levitt G., Vogtmann K.** A Whitehead algorithm for surface groups, Preprint, 1997.

[16] **McCool J.** Some finitely presented subgroups of the automorphism group of a free group // J. Algebra. 1975. V. 35. P. 205-213.

[17] **Meskin S.** Periodic automorphisms of the two-generator free group // Proc. Conf. Canberra, 1973. Berlin: Springer, 1974. P. 494–498 (Lecture Notes in Math. V. 1974).

[18] **Stallings J. R.** Group theory and three dimensional manifolds // Yale Math. monographs. № 4. New Heaven: Yale Univ. Press, 1971.

[19] **Thurston W. P.** Circulated note.

[20] **Turner E. C.** Finding indivisible Nielsen paths for a train track map // Proc. of a workshop held at Heriot - Watt Univ., Edinburg, 1993. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995. P. 300–313 (Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser. V. 204).

[21] **Zieschang H.** Über Worte $S_1^{a_1} S_2^{a_2} \dots S_p^{a_p}$ in einer freien Gruppen mit p freien Erzeugenden // Math. Ann. 1962. V. 147. P. 143–153.

Адрес автора:
БОГОПОЛЬСКИЙ Олег Владимирович
Институт математики СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск

E-mail: groups@math.nsc.ru