УДК 517.444

Дата поступления
18 *ноября* 1999 *г.*

Вертгейм Л. Б.
ЗАДАЧА ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ И НЕЛИНЕЙНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ В ВЕКТОРНОМ РАССЛОЕНИИ. — Новосибирск, 1999. — 23 с. — (Препринт / РАН. Сиб. отд-ние. Институт математики; N 64).

Рассматривается задача определения линейного оператора, действующего в слоях конечномерного комплексного эрмитова векторного расслоения над компактным римановым многообразием с краем по известным интегралам от него с операторными весами вдоль всевозможных геодезических, соединяющих пары граничных точек. При некоторых ограничениях на веса и на кривизны многообразия и расслоения установлена теорема единственности и устойчивости. Рассмотрена нелинейная задача восстановления оператора в расслоении, если известны граничные значения решений некоторых дифференциальных уравнений для операторов вдоль геодезических. При априорной оценке малости на искомый оператор доказана теорема единственности и устойчивости восстановления.

Ключевые слова и фразы: интегральная геометрия, операторы в векторном расслоении, тензорные поля.

Адрес автора: Институт математики им. С. Л. Соболева, пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия; e-mail: vert@math.nsc.ru

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН   Препринт N 64, ноябрь 1999

Задача интегральной геометрии и нелинейная обратная задача для операторов в векторном расслоении

Л. Б. Вертгейм

1. Введение и напоминания из теории расслоений

В работе автора [1] установлены теоремы единственности и устойчивости для задачи интегральной геометрии матриц с матричным весом и нелинейной задачи восстановления матриц в двумерном случае. В настоящем препринте изучаются аналогичные задачи в случае произвольной размерности для линейных операторов в конечномерном эрмитовом комплексном векторном расслоении над компактным римановым многообразием. Наряду с развитием методов автора из [1], в работе существенно используется теория и методы работы [3], в которой рассмотрена родственная задача восстановления связности на расслоении по известным операторам параллельного переноса между граничными точками.

Напомним некоторые понятия из [3], которые будут использоваться в дальнейшем.

Компактное риманово многообразие $(M, \tilde{g})$ называется *компактным рассеивающим*, если его край строго выпукл и для любой точки $x \in M$ и любого вектора $0 \neq \xi \in T_xM$ максимальная геодезическая $\gamma_{x,\xi}$, определенная условиями $\gamma_{x,\xi}(0) = x$, $\dot{\gamma}_{x,\xi}(0) = \xi$, определена на конечном отрезке $[\tau_-(x,\xi), \tau_+(x,\xi)]$.

Пусть η — гладкое комплексное m-мерное расслоение над M, η^* — двойственное к нему расслоение. Введем в рассмотрение сопряженное расслоение $\bar{\eta}$, слой которого $\bar{\eta}_x$ над $x \in M$ получается из слоя η_x антиизоморфизмом $u \to \bar{u}$, который теоретико-множественно есть тождественное отображение и по отношению к векторным операциям ведет себя так: $\overline{u+v} = \bar{u} + \bar{v}$, $\bar{\alpha} \cdot \bar{u} = \overline{\alpha u}$. Пусть τ_M — касательное расслоение M, τ — его комплексификация.

Определение 1.1. *Расслоением η-тензоров над M степени $(r, \rho, \lambda; s, \sigma, \mu)$ (все эти числа неотрицательные целые) называется следующее расслоение*

$$\tau^{(r,\rho,\lambda)}_{(s,\sigma,\mu)}\eta := \underbrace{\tau \otimes \ldots \otimes \tau}_{r} \otimes \underbrace{\tau^* \otimes \ldots \otimes \tau^*}_{s} \otimes \underbrace{\eta \otimes \ldots \otimes \eta}_{\rho} \otimes \underbrace{\eta^* \otimes \ldots \otimes \eta^*}_{\sigma} \otimes$$

$$\otimes \underbrace{\bar{\eta} \otimes \ldots \otimes \bar{\eta}}_{\lambda} \otimes \underbrace{\bar{\eta}^* \otimes \ldots \otimes \bar{\eta}^*}_{\mu}.$$

Для η-тензорных полей, сечений определенного выше расслоения, имеется рассматриваемое далее локальное представление. Пусть $(x^1, \dots, x^n)$ — система координат в области $U \subset M$, $(e_1, \dots, e_m)$ — тривиализация η над U, $(\theta^1, \dots, \theta^m)$ — двойственная тривиализация η^* над U. Тогда сечение $u \in C^\infty(\tau^{(r,\rho,\lambda)}_{(s,\sigma,\mu)}\eta; U)$ представляется однозначно в виде

$$u = u^{i_1\dots i_r \alpha_1\dots\alpha_\rho|\gamma_1\dots\gamma_\lambda}_{j_1\dots j_s\beta_1\dots\beta_\sigma|\delta_1\dots\delta_\mu} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s} \otimes$$

$$\otimes e_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_\rho} \otimes \theta^{\beta_1} \otimes \dots \otimes \theta^{\beta_\sigma} \otimes \bar{e}_{\gamma_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{\gamma_\lambda} \otimes \bar{\theta}^{\delta_1} \otimes \dots \otimes \bar{\theta}^{\delta_\mu}. \tag{1.1}$$

Здесь и далее используется правило суммирования Эйнштейна: подразумевается суммирование по одинаковым верхним и нижним индексам, встретившимся в одном мономе, латинским — от 1 до n ($n = \dim M$), греческим — от 1 до m.

Расслоение η называется *эрмитовым*, если в слоях η задана эрмитова положительно определенная форма $g = (g_{\alpha|\beta}) \in C^\infty(\tau^{(0,0,0)}_{(0,1,1)}\eta)$, $g_{\alpha|\beta} = \overline{g_{\beta|\alpha}}$. Тензор g называется *метрическим тензором* эрмитова расслоения. Определено эрмитово скалярное произведение на слоях η:

$$\langle u|v\rangle = g_{\alpha|\beta} u^{\alpha|}\overline{v^{\beta|}},\ u, v \in \eta_x.$$

Оно распространяется на слои произвольного расслоения $\tau^{(r,\rho,\lambda)}_{(s,\sigma,\mu)}\eta$ по правилу:

$$\langle u|v\rangle = \tilde{g}_{i_1k_1}\dots\tilde{g}_{i_rk_r}\tilde{g}^{j_1l_1}\dots\tilde{g}^{j_sl_s}g_{\alpha_1|\varepsilon_1}\dots g_{\alpha_\rho|\varepsilon_\rho}g_{\nu_1|\gamma_1}\dots g_{\nu_\lambda|\gamma_\lambda}g^{\beta_1|\theta_1}\dots g^{\beta_\sigma|\theta_\sigma}g^{\pi_1|\delta_1}\dots g^{\pi_\mu|\delta_\mu}\times$$

$$\times u^{i_1\dots i_r\alpha_1\dots\alpha_\rho|\gamma_1\dots\gamma_\lambda}_{j_1\dots j_s\beta_1\dots\beta_\sigma|\delta_1\dots\delta_\mu}\overline{v^{k_1\dots k_r\varepsilon_1\dots\varepsilon_\rho|\nu_1\dots\nu_\lambda}_{l_1\dots l_s\theta_1\dots\theta_\sigma|\pi_1\dots\pi_\mu}}. \tag{1.2}$$

Здесь $(g^{\alpha|\beta})$ обозначает обратную матрицу к $(\overline{g_{\alpha|\beta}})$: $g^{\alpha|\gamma}g_{\beta|\gamma} = \delta^\alpha_\beta$. Определяем далее

$$|u|^2 = \langle u|u\rangle. \tag{1.3}$$

Предполагаем, что на многообразии $(M, \tilde{g})$ рассматривается связность Леви — Чивита $\widetilde{\nabla}$ (согласованная с метрикой $\tilde{g}$), а на расслоении η — связность ∇, согласованная с метрикой g. Расслоение *полубазисных η-тензоров* определяется с помощью проекции $p : TM \to M$. Полагаем

$$\beta^{(r,\rho,\lambda)}_{(s,\sigma,\mu)}\eta = p^*(\tau^{(r,\rho,\lambda)}_{(s,\sigma,\mu)}\eta).$$

Локальное представление для сечений этого расслоения отличается от представления (1.1) лишь тем, что компоненты зависят от (x, ξ) — локальных координат на TM.

Определяем вертикальную и горизонтальную ковариантные производные.

Вертикальная производная $\overset{v}{\nabla} : C^\infty(\beta^{(r,\rho,\lambda)}_{(s,\sigma,\mu)}\eta) \to C^\infty(\beta^{(r,\rho,\lambda)}_{(s+1,\sigma,\mu)}\eta)$ определяется равенством

$$\overset{v}{\nabla}_k u^{i_1\dots i_r\alpha_1\dots\alpha_\rho|\gamma_1\dots\gamma_\lambda}_{j_1\dots j_s\beta_1\dots\beta_\sigma|\delta_1\dots\delta_\mu} = \frac{\partial}{\partial \xi^k} u^{i_1\dots i_r\alpha_1\dots\alpha_\rho|\gamma_1\dots\gamma_\lambda}_{j_1\dots j_s\beta_1\dots\beta_\sigma|\delta_1\dots\delta_\mu}. \tag{1.4}$$

Горизонтальная производная $\overset{h}{\nabla} : C^\infty(\beta^{(r,\rho,\lambda)}_{(s,\sigma,\mu)}\eta) \to C^\infty(\beta^{(r,\rho,\lambda)}_{(s+1,\sigma,\mu)}\eta)$ определяется исходя из заданных связностей $\widetilde{\nabla}$ на M и ∇ на η следующим образом:

$$\overset{h}{\nabla}_k u^{i_1\dots i_r\alpha_1\dots\alpha_\rho|\gamma_1\dots\gamma_\lambda}_{j_1\dots j_s\beta_1\dots\beta_\sigma|\delta_1\dots\delta_\mu} = \frac{\partial}{\partial x^k} u^{i_1\dots i_r\alpha_1\dots\alpha_\rho|\gamma_1\dots\gamma_\lambda}_{j_1\dots j_s\beta_1\dots\beta_\sigma|\delta_1\dots\delta_\mu} - \widetilde{\Gamma}^p_{kq}\xi^q \frac{\partial}{\partial \xi^p} u^{i_1\dots i_r\alpha_1\dots\alpha_\rho|\gamma_1\dots\gamma_\lambda}_{j_1\dots j_s\beta_1\dots\beta_\sigma|\delta_1\dots\delta_\mu} +$$

$$+\sum_{m=1}^{r} \widetilde{\Gamma}^{i_m}_{kp} u^{i_1\dots i_{m-1}\,p\,i_{m+1}\dots i_r\alpha_1\dots\alpha_\rho|\gamma_1\dots\gamma_\lambda}_{j_1\dots j_s\beta_1\dots\beta_\sigma|\delta_1\dots\delta_\mu} - \sum_{m=1}^{s} \widetilde{\Gamma}^{p}_{kj_m} u^{i_1\dots i_r\alpha_1\dots\alpha_\rho|\gamma_1\dots\gamma_\lambda}_{j_1\dots j_{m-1}\,p\,j_{m+1}\dots j_s\beta_1\dots\beta_\sigma|\delta_1\dots\delta_\mu} +$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\rho} \Gamma^{\alpha_\nu}_{k\varepsilon} u^{i_1\dots i_r\alpha_1\dots\alpha_{\nu-1}\,\varepsilon\,\alpha_{\nu+1}\dots\alpha_\rho|\gamma_1\dots\gamma_\lambda}_{j_1\dots j_s\beta_1\dots\beta_\sigma|\delta_1\dots\delta_\mu} - \sum_{\nu=1}^{\sigma} \Gamma^{\varepsilon}_{k\beta_\nu} u^{i_1\dots i_r\alpha_1\dots\alpha_\rho|\gamma_1\dots\gamma_\lambda}_{j_1\dots j_s\beta_1\dots\beta_{\nu-1}\,\varepsilon\,\beta_{\nu+1}\dots\beta_\sigma|\delta_1\dots\delta_\mu} +$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\lambda} \bar{\Gamma}^{\gamma_\nu}_{k\varepsilon} u^{i_1\dots i_r\alpha_1\dots\alpha_\rho|\gamma_1\dots\gamma_{\nu-1}\,\varepsilon\,\gamma_{\nu+1}\dots\gamma_\lambda}_{j_1\dots j_s\beta_1\dots\beta_\sigma|\delta_1\dots\delta_\mu} - \sum_{\nu=1}^{\mu} \bar{\Gamma}^{\varepsilon}_{k\delta_\nu} u^{i_1\dots i_r\alpha_1\dots\alpha_\rho|\gamma_1\dots\gamma_\lambda}_{j_1\dots j_s\beta_1\dots\beta_\sigma|\delta_1\dots\delta_{\nu-1}\,\varepsilon\,\delta_{\nu+1}\dots\delta_\mu}. \qquad (1.5)$$

2. Задача интегральной геометрии для линейных операторов в расслоении

Пусть $(M,\tilde{g})$ — компактное рассеивающее n-мерное риманово многообразие с краем; (η,g) — комплексное эрмитово m-мерное векторное расслоение над M. Рассмотрим $P=P(x,\xi)$, $Q=Q(x,\xi)\in C^\infty(\beta^{(0,1,0)}_{(0,1,0)}\eta)$ — известные операторнозначные веса. $P(x,\xi)$ для фиксированной точки $(x,\xi)\in TM$ считаем оператором, действующим в слое η_x. Предполагаем положительную однородность весов P,Q по второму аргументу:

$$P(x,\lambda\xi)=P(x,\xi)\,,\ Q(x,\lambda\xi)=Q(x,\xi)\,,\ (\lambda>0\,,\ \lambda\in R). \qquad (2.1)$$

Пусть $A=A(x)\in C^\infty(\tau^{(0,1,0)}_{(0,1,0)}\eta)$ — неизвестный оператор, действующий в слоях η так, что $A(x)$ — линейный оператор в слое η_x. Рассмотрим следующее интегральное преобразование. Пусть $(x,\xi)\in\partial_+\Omega M$, где

$$\Omega M := \{(x,\xi)\in TM \mid |\xi|=1\}\,,$$

$$\partial_+\Omega M := \{(x,\xi)\in\Omega M \mid x\in\partial M,\ \xi\ \textit{направлено вне}\ M\ (\text{т. е.}\ \langle\xi,\nu_x\rangle>0,$$

$$\text{где}\ \nu_x\ \text{— единичный вектор внешней нормали к}\ \partial M)\ \}.$$

Пусть $\gamma=\gamma_{x,\xi}\colon[\tau_-(x,\xi),\tau_+(x,\xi)]\to M$ — такая геодезическая, что $\gamma_{x,\xi}(0)=x, \dot\gamma_{x,\xi}(0)=\xi$ и обозначим I^{t_1,t_2}_γ — оператор параллельного переноса вдоль γ для расслоения (η,g) и соответствующей согласованной с g связности ∇ из точки $\gamma_{x,\xi}(t_1)$ в точку $\gamma_{x,\xi}(t_2)$.

Интегральное преобразование $\mathcal{F}:C^\infty(\tau^{(0,1,0)}_{(0,1,0)}\eta)\to C^\infty(\beta^{(0,1,0)}_{(0,1,0)}\eta|_{\partial_+\Omega M})$ определим следующим образом: для $A\in C^\infty(\tau^{(0,1,0)}_{(0,1,0)}\eta)$ и для точки $(x,\xi)\in\partial_+\Omega M$ оператор $\mathcal{F}A(x,\xi)$ действует в слое η_x и задается равенством:

$$\mathcal{F}A(x,\xi):=\int\limits_{\tau_-(x,\xi)}^{0} I^{t,0}_\gamma\cdot P(\gamma(t),\dot\gamma(t))A(\gamma(t))Q(\gamma(t),\dot\gamma(t))\cdot I^{0,t}_\gamma dt \qquad (\gamma=\gamma_{x,\xi}). \qquad (2.2)$$

Здесь произведения понимаются, как произведения операторов из одного слоя расслоения в другой или в одном слое η. Возникает следующая задача интегральной геометрии.

Задача 1. *Восстановить* $A(x)$ *по известной на* $\partial_+\Omega M$ *функции* $\mathcal{F}A = \mathcal{F}A(x,\xi)$.

Следуя общему методу, применимому для решения многих задач интегральной геометрии, сведем данную задачу к обратной задаче для кинетического уравнения.

Пусть $(x,\xi) \in T_0M := \{(x,\xi) \in TM | \xi \neq 0\}$. Определим $U \in C^\infty(\beta^{(0,1,0)}_{(0,1,0)}\eta)$, продолжая интеграл из (2.2) на более широкое множество:

$$U(x,\xi) = \int\limits_{\tau_-(x,\xi)}^{0} I_\gamma^{t,0} \cdot P(\gamma(t),\dot\gamma(t))A(\gamma(t))Q(\gamma(t),\dot\gamma(t)) \cdot I_\gamma^{0,t}dt \qquad (\gamma = \gamma_{x,\xi}). \tag{2.3}$$

Имеем, очевидно, следующие краевые условия:

$$U(x,\xi) = 0 \ \textit{при} \ (x,\xi) \in \partial_-\Omega M =$$

$$= \{(x,\xi) \in \Omega M \mid x \in \partial M, \ \xi \ \textit{направлено внутрь} \ M \ (\langle \xi, \nu_x\rangle < 0)\}; \tag{2.4}$$

$$U(x,\xi) = \mathcal{F}A(x,\xi) \ \textit{при} \ (x,\xi) \in \partial_+\Omega M. \tag{2.5}$$

Докажем, что U удовлетворяет следующему кинетическому уравнению:

$$HU(x,\xi) = P(x,\xi)A(x)Q(x,\xi), \tag{2.6}$$

где $H = \xi^k \overset{h}{\nabla}_k$ — оператор геодезического потока, $\overset{h}{\nabla}_k$ определяется в (1.5).

Действительно, пусть $(x_0,\xi_0) \in T_0M$ — произвольная точка. Рассмотрим геодезическую $\gamma_{x_0,\xi_0} = \gamma_0$ и применим к равенству (2.3), записанному для точки $(\gamma_0(t),\dot\gamma_0(t))$, слева и справа операторы сдвига следующим образом:

$$I_{\gamma_0}^{t,0}U(\gamma_0(t),\dot\gamma_0(t))I_{\gamma_0}^{0,t} = \int\limits_{\tau_-(x,\xi)}^{t} I_{\gamma_0}^{\tau,0} \cdot P(\gamma_0(\tau),\dot\gamma_0(\tau))A(\gamma_0(\tau))Q(\gamma_0(\tau),\dot\gamma_0(\tau)) \cdot I_{\gamma_0}^{0,\tau}d\tau. \tag{2.7}$$

(в формуле (2.3) произвели соответствующую замену переменной вдоль геодезической). Дифференцируя равенство (2.7) по t при $t = 0$, получаем

$$HU(x_0,\xi_0) = P(x_0,\xi_0)A(x_0)Q(x_0,\xi_0),$$

что и требовалось.

Для формулировки условий малости в доказываемой далее теореме нам необходимы следующие определения. Пусть $R : T_xM \otimes \eta_x \to T_x^*M \otimes \eta_x$ — оператор кривизны для связности в расслоении η, согласованной с метрикой g; для $v \in T_xM$, $u \in \eta_x$ его значение на элементе $v \otimes u$ есть

$$(R(v\otimes u))_j^\alpha = R^\alpha_{ij\beta}v^iu^\beta \,,$$

$$R^\alpha_{ij\beta} = \frac{\partial \Gamma^\alpha_{j\beta}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{i\beta}}{\partial x^j} + \Gamma^\alpha_{i\gamma}\Gamma^\gamma_{j\beta} - \Gamma^\alpha_{j\gamma}\Gamma^\gamma_{i\beta}, \tag{2.8}$$

где $\Gamma^\alpha_{i\beta}$ — символы Кристоффеля связности ∇, определяемые равенствами $\nabla_{\partial_i}e_\beta = \Gamma^\alpha_{i\beta}e_\alpha$, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$. Пусть далее $\widetilde{R}$ — оператор кривизны для многообразия

$(M,\tilde g)$; $\tilde R : T_xM\otimes T_xM\to T^*_xM\otimes T^*_xM$ и для $v,w\in T_xM$ его значение на соответствующем элементе есть

$$(\tilde R(v\otimes w))_{ik}=\tilde R_{ijkl}v^jw^l. \tag{2.9}$$

Определим теперь следующие величины, которые будут характеризовать малость кривизн:

$$\rho=\rho(M,\tilde g,\eta,g,\nabla)=\sup_{(x,\xi)\in\Omega M}\int\limits_0^{\tau_+(x,\xi)} t\,\|R(\gamma_{x,\xi}(t))\|dt \tag{2.10}$$

(в интеграле стоит соответствующая операторная норма);

$$\tilde\rho=\tilde\rho(M,\tilde g)=\sup_{(x,\xi)\in\Omega M}\int\limits_0^{\tau_+(x,\xi)} t\,\|\tilde R(\gamma_{x,\xi}(t))\|dt. \tag{2.11}$$

Определим также следующую характеристику малости весов P,Q:

$$\mu=\sup_{(x,\xi)\in\Omega M}(|\overset{v}{\nabla}P(x,\xi)P^{-1}(x,\xi)|+|Q^{-1}(x,\xi)\overset{v}{\nabla}Q(x,\xi)|). \tag{2.12}$$

(Здесь норма определяется равенствами (1.2), (1.3)).

Теорема 2.1. *Пусть $(M,\tilde g)$ — компактное рассеивающее риманово многообразие с краем; (η,g) — гладкое комплексное эрмитово векторное расслоение над M; $P,Q\in C^\infty(\beta^{(0,1,0)}_{(0,1,0)}\eta)$ — операторнозначные веса, удовлетворяющие следующим условиям:*

1. *Для любого $(x,\xi)\in T_0M$ операторы $P(x,\xi)$ и $Q(x,\xi)$, действующие в слое η_x, невырождены.*

2. *$P(x,\xi)$, $Q(x,\xi)$ положительно однородны по аргументу ξ:*

$$P(x,\lambda\xi)=P(x,\xi)\,,\ Q(x,\lambda\xi)=Q(x,\xi)\,,\ (\lambda>0,\ \lambda\in R).$$

3. *Величина μ, определяемая весами в (2.12), удовлетворяет условию малости:*

$$(\tilde\rho+2\rho)(\mu+1)^2+2\mu<1. \tag{2.13}$$

Тогда задача 1 имеет не более одного решения и выполнена оценка устойчивости

$$\|A\|_{L^2(M)}:=\left(\int\limits_M|A(x)|^2dx\right)^{\frac12}\le C\|\mathcal FA\|_{H^1(\partial_+\Omega M)} \tag{2.14}$$

для некоторой константы C, не зависящей от A.

Доказательство. Запишем тождество Пестова для U, определенной в (2.3) (формулировку и доказательство этого тождества в более общем виде см. в [3]; для получения из него нижеследующего тождества необходимо изменить некоторые индексы на ковариантные с помощью метрического тензора расслоения).

$$2Re\langle\overset{h}{\nabla}U|\overset{v}{\nabla}HU\rangle = |\overset{h}{\nabla}U|^2 + \overset{h}{\nabla}_k V^k + \overset{v}{\nabla}_k W^k -$$

$$-\widetilde{R}_{kplq}\xi^p\xi^q\overset{v}{\nabla}{}^k U^{\alpha|}_{\beta|}\overset{v}{\nabla}{}^l\overline{U^{|\beta}_{|\alpha}} + Re\left[(R^{\alpha|}_{kl\varepsilon|}U^{\varepsilon|}_{\gamma|} + \overline{R^{|\varepsilon}_{kl|\gamma}}U^{\alpha|}_{\varepsilon|})\xi^l\overset{v}{\nabla}{}^k\overline{U^{|\gamma}_{|\alpha}}\right]. \tag{2.15}$$

Здесь обозначено $R^{|\varepsilon}_{kl|\gamma} = g_{\lambda|\gamma}g^{\mu|\varepsilon}R^{\lambda|}_{kl\mu|}$ и $U^{|\beta}_{|\alpha} = g_{\mu|\alpha}g^{\lambda|\beta}U^{\mu|}_{\lambda|}$.

$$V^k = Re\left[\xi^k\overset{h}{\nabla}{}^l U^{\alpha|}_{\beta|}\overset{v}{\nabla}_l\overline{U^{|\beta}_{|\alpha}} - \xi^l\overset{v}{\nabla}{}^k U^{\alpha|}_{\beta|}\overset{h}{\nabla}_l\overline{U^{|\beta}_{|\alpha}}\right]; \tag{2.16}$$

$$W^k = Re\left[\xi^l\overset{h}{\nabla}{}^k U^{\alpha|}_{\beta|}\overset{h}{\nabla}_l\overline{U^{|\beta}_{|\alpha|}}\right]. \tag{2.17}$$

Далее для получения оценки устойчивости восстановления и доказательства утверждения о единственности нам необходимо будет оценить по норме некоторые члены в этом тождестве и затем проинтегрировать получившееся неравенство по ΩM.

1. Оценка левой части тождества.

Получаем в силу (2.6)

$$HU = PAQ\ ,\ A = P^{-1}(HU)Q^{-1}.$$

$$\overset{v}{\nabla}(HU) = \overset{v}{\nabla}(PAQ) = \overset{v}{\nabla}P\cdot AQ + PA\cdot\overset{v}{\nabla}Q = (\overset{v}{\nabla}P\cdot P^{-1})HU + HU(Q^{-1}\overset{v}{\nabla}Q),$$

с учетом независимости A от ξ. Имеем

$$\langle\overset{h}{\nabla}U|\overset{v}{\nabla}HU\rangle = \langle\overset{h}{\nabla}U|(\overset{v}{\nabla}P\cdot P^{-1})HU\rangle + \langle\overset{h}{\nabla}U|HU(Q^{-1}\overset{v}{\nabla}Q)\rangle; \tag{2.18}$$

$$|Re\langle\overset{h}{\nabla}U|\overset{v}{\nabla}HU\rangle| \le |\langle\overset{h}{\nabla}U|\overset{v}{\nabla}HU\rangle|.$$

Для оценки выражения $|\langle\overset{h}{\nabla}U|(\overset{v}{\nabla}P\cdot P^{-1})HU\rangle|$ сделаем такую локальную замену координат на многообразии и тривиализаций расслоения, чтобы в *данной фиксированной точке* $x_0 \in M$ метрические тензоры g и $\tilde{g}$ задавались бы единичными матрицами. Тогда нормы в точке (x_0, ξ_0) задаются равенствами вида

$$|HU(x_0,\xi_0)|^2 = \sum_{\alpha,\beta}|(HU)^{\alpha|}_{\beta|}(x_0,\xi_0)|^2,$$

$$|\overset{h}{\nabla}U(x_0,\xi_0)|^2 = \sum_{k,\alpha,\beta}|\overset{h}{\nabla}{}^k U^{\alpha|}_{\beta|}(x_0,\xi_0)|^2$$

и тому подобными. Оценку

$$|\langle\overset{h}{\nabla}U|(\overset{v}{\nabla}P\cdot P^{-1})HU\rangle| = |\langle\overset{h}{\nabla}{}^k U|(\overset{v}{\nabla}_k P\cdot P^{-1})HU\rangle| \le$$

$$\le |\overset{h}{\nabla}{}^k U|\cdot|\overset{v}{\nabla}_k P\cdot P^{-1}|\cdot|HU| \tag{2.19}$$

получаем в силу следующей леммы.

Лемма 2.1. *Пусть A, B, C — комплексные квадратные матрицы размера $m\times m$; обозначим $|A|^2 := \sum\limits_{ij}|a_{ij}|^2$, $\langle A|F\rangle := \sum\limits_{ij}a_{ij}\bar{f}_{ij}$. Тогда*

$$|A\cdot B| \le |A|\cdot|B|; \tag{2.20}$$

$$|\langle A|BC\rangle| \le |A|\cdot|B|\cdot|C|. \tag{2.21}$$

Доказательство. В самом деле,

$$|A\cdot B|^2 = \sum_{ij}|\sum_k a_{ik}b_{kj}|^2 \le \sum_{ij}\sum_k |a_{ik}|^2\cdot\sum_l |b_{lj}|^2 = \sum_{ijkl}|a_{ik}|^2|b_{lj}|^2 =$$

$$= \sum_{ik}|a_{ik}|^2\cdot\sum_{lj}|b_{lj}|^2 = |A|^2\cdot|B|^2,$$

в силу неравенства Коши — Буняковского. Далее получим

$$|\langle A|BC\rangle|^2 \le |A|^2\cdot|BC|^2 \le |A|^2\cdot|B|^2\cdot|C|^2.$$

Лемма доказана.

Продолжая неравенство (2.19) и используя вновь неравенство Коши — Буняковского, приходим к неравенству

$$|\langle \overset{h}{\nabla}U|(\overset{v}{\nabla}P\cdot P^{-1})HU\rangle| \le |\overset{h}{\nabla}U|\cdot|\overset{v}{\nabla}P\cdot P^{-1}|\cdot|HU|. \tag{2.22}$$

Поскольку величины, фигурирующие в этом неравенстве, имеют инвариантный характер, оно справедливо независимо от выбора нами специальной системы координат.

Аналогичное неравенство

$$|\langle \overset{h}{\nabla}U|HU(Q^{-1}\overset{v}{\nabla}Q)\rangle| \le |\overset{h}{\nabla}U|\cdot|HU|\cdot|Q^{-1}\overset{v}{\nabla}Q|. \tag{2.23}$$

получаем и для второго слагаемого в (2.18).

По определению оператора H имеем $HU = \xi^i\overset{h}{\nabla}_i U$. Используя $|\xi| = 1$ (тождество Пестова рассматриваем на ΩM) и неравенство Коши — Буняковского, получим неравенство

$$|HU| \le |\overset{h}{\nabla}U|. \tag{2.24}$$

(Вновь проводим рассуждение, связанное с выбором специальных координат и тривиализаций в окрестности данной точки). В силу неравенств (2.22)–(2.24), находим

$$|Re\langle \overset{h}{\nabla}U|\overset{v}{\nabla}HU\rangle| \le (|\overset{v}{\nabla}P\cdot P^{-1}| + |Q^{-1}\overset{v}{\nabla}Q|)\,|\overset{h}{\nabla}U|^2. \tag{2.25}$$

2. Рассмотрим теперь слагаемое $\widetilde{R}_{kplq}\xi^p\xi^q\overset{v}{\nabla}{}^k U^{\alpha|}_{\beta|}\overset{v}{\nabla}{}^l\overline{U^{|\beta}_{|\alpha}}$. Вспоминая определение (2.9) оператора кривизны $\widetilde{R}$, можем записать оценку

$$\left|\,\widetilde{R}_{kplq}\xi^p\xi^q\overset{v}{\nabla}{}^k U^{\alpha|}_{\beta|}\overset{v}{\nabla}{}^l\overline{U^{|\beta}_{|\alpha}}\,\right| \le \|\widetilde{R}(x)\|\cdot|\overset{v}{\nabla}U|^2. \tag{2.26}$$

В силу неравенства Пуанкаре (см. [2], с.129 ; учитываем краевые условия $\overset{v}{\nabla}U|_{\partial_-\Omega M} = 0$) имеем следующую оценку

$$\int\limits_{\Omega M}\|\widetilde{R}(x)\|\cdot|\overset{v}{\nabla}U|^2 d\Sigma^{2n-1} \le \tilde{\rho}\int\limits_{\Omega M}|H\overset{v}{\nabla}U|^2 d\Sigma^{2n-1}. \tag{2.27}$$

Здесь $d\Sigma^{2n-1}$ — форма объема на ΩM, заданная следующим равенством:

$$d\Sigma^{2n-1} = det(\tilde{g}_{kj}) \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \xi^i d\xi^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{d\xi^i} \wedge \ldots \wedge d\xi^n \wedge dx, \tag{2.28}$$

а величина $\tilde{\rho}$ определена в (2.11).

3. Оценим теперь выражение

$$Re\left[(R^{\alpha|}_{kl\varepsilon|} U^{\varepsilon|}_{\gamma|} + \overline{R^{|\varepsilon}_{kl|\gamma}} U^{\alpha|}_{\varepsilon|}) \xi^l \overset{v}{\nabla}{}^k \overline{U^{|\gamma}_{|\alpha}} \right]. \tag{2.29}$$

В силу того, что $P(x,\xi)$, $Q(x,\xi)$ положительно однородны степени 0 по ξ, $U(x,\xi)$ является положительно однородной функцией степени (-1) от ξ (см. определение (2.3)). В силу тождества Эйлера справедливо соотношение

$$\xi^i \overset{v}{\nabla}_i U = -U.$$

Отсюда получаем $|U| \leq |\overset{v}{\nabla} U|$. Вспоминая определение (2.8) для оператора кривизны R, приходим к неравенству (вновь используя для оценок подходящие координаты и тривиализации):

$$\left| R^{\alpha|}_{kl\varepsilon|} U^{\varepsilon|}_{\gamma|} \xi^l \overset{v}{\nabla}{}^k \overline{U^{|\gamma}_{|\alpha}} \right| \leq \|R(x)\| \cdot |U| \cdot |\overset{v}{\nabla} U| \leq \|R(x)\| \cdot |\overset{v}{\nabla} U|^2. \tag{2.30}$$

Второе слагаемое в (2.29) можно записать в виде

$$Re\left[R^{|\varepsilon}_{kl|\gamma} \overline{U^{\alpha|}_{\varepsilon|}} \xi^l \overset{v}{\nabla}{}^k U^{|\gamma}_{|\alpha} \right] = Re\left[g_{\lambda|\gamma} g^{\mu|\varepsilon} R^{\lambda|}_{kl\mu|} \cdot \overline{U^{\alpha|}_{\varepsilon|}} \xi^l \overset{v}{\nabla}{}^k U^{|\gamma}_{|\alpha} \right] = Re\left[R^{\lambda|}_{kl\mu|} \overline{U^{\alpha|\mu}} \xi^l \overset{v}{\nabla}{}^k U_{\lambda|\alpha} \right].$$

Отсюда выводим оценку:

$$\left| Re(\overline{R^{|\varepsilon}_{kl|\gamma}} U^{\alpha|}_{\varepsilon|} \xi^l \overset{v}{\nabla}{}^k \overline{U^{|\gamma}_{|\alpha}}) \right| \leq \|R(x)\| \cdot |\overset{v}{\nabla} U|^2. \tag{2.31}$$

Объединяя (2.30) и (2.31), получаем оценку сверху абсолютной величины выражения (2.29): $2\|R(x)\| \cdot |\overset{v}{\nabla} U|^2$. Для интеграла по ΩM в силу неравенства Пуанкаре, получим следующую оценку сверху

$$2 \int_{\Omega M} \|R(x)\| \cdot |\overset{v}{\nabla} U|^2 d\Sigma^{2n-1} \leq 2\rho \int_{\Omega M} |H \overset{v}{\nabla} U|^2 d\Sigma^{2n-1}. \tag{2.32}$$

(ρ определено в (2.10)).

4. Нетрудно убедиться в справедливости следующей коммутационной формулы

$$\overset{v}{\nabla} H - H \overset{v}{\nabla} = \overset{h}{\nabla}. \tag{2.33}$$

Имеем $H\overset{v}{\nabla} U = \overset{v}{\nabla} HU - \overset{h}{\nabla} U$ и, следовательно,

$$|H\overset{v}{\nabla} U| \leq |\overset{v}{\nabla} HU| + |\overset{h}{\nabla} U| =$$

$$= |\overset{v}{\nabla}(PAQ)| + |\overset{h}{\nabla}U| \le (|\overset{v}{\nabla}P \cdot P^{-1}| + |Q^{-1} \cdot \overset{v}{\nabla}Q| + 1)|\overset{h}{\nabla}U|. \tag{2.34}$$

(см. оценки в пункте 1).

5. При интегрировании тождества Пестова по ΩM необходимо будет примененить формулы Гаусса — Остроградского для горизонтальной и вертикальной дивергенций (см. [2], III, 6, с.106): если (V^k) , (W^k) — векторные поля, то

$$\int\limits_{\Omega M} \overset{h}{\nabla}_k V^k d\Sigma^{2n-1} = \int\limits_{\partial\Omega M} \langle V, \nu\rangle d\Sigma^{2n-2}.$$

Здесь ν — единичный вектор внешней нормали к ∂M и

$$d\Sigma^{2n-2} = -det(\tilde{g}_{kj}) \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \xi^i d\xi^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{d\xi^i} \wedge \ldots \wedge d\xi^n \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{n-1},$$

если $(x^1, \ldots, x^{n-1}, x^n)$ — полугеодезическая система координат в окрестности точки границы ∂M.

Если однородность W^k по ξ есть λ (в нашем конкретном случае $\lambda = -1$, поскольку U имеет однородность -1), то справедливо равенство

$$\int\limits_{\Omega M} \overset{v}{\nabla}_k W^k \, d\Sigma^{2n-1} = (\lambda + n - 1) \int\limits_{\Omega M} \langle W, \xi\rangle \, d\Sigma^{2n-1} = (n-2) \int\limits_{\Omega M} \langle W, \xi\rangle \, d\Sigma^{2n-1}. \tag{2.35}$$

6. Для последующей оценки выражения в (2.35) напишем

$$\langle W, \xi\rangle = \xi_k W^k = \xi_k \cdot Re \left[\xi^l \overset{h}{\nabla}{}^k U^{\alpha|}_{\beta|} \overset{h}{\nabla}_l \overline{U^{|\beta}_{|\alpha|}} \right] = Re \left[\xi_k \overset{h}{\nabla}{}^k U^{\alpha|}_{\beta|} \cdot \xi^l \overset{h}{\nabla}_l \overline{U^{|\beta}_{|\alpha}} \right] =$$

$$= Re \left[\xi_k \overset{h}{\nabla}{}^k U^{\alpha|}_{\beta|} \cdot \xi^l \overset{h}{\nabla}_l \overline{g_{\lambda|\alpha} g^{\mu|\beta} U^{\lambda|}_{\mu|}} \right] = Re \left[g_{\alpha|\lambda} g^{\beta|\mu} \xi_k \overset{h}{\nabla}{}^k U^{\alpha|}_{\beta|} \cdot \xi^l \overset{h}{\nabla}_l \overline{U^{\lambda|}_{\mu|}} \right] =$$

$$= Re \left[g_{\alpha|\lambda} g^{\beta|\mu} (HU)^{\alpha|}_{\beta|} \overline{(HU)^{\lambda|}_{\mu|}} \right] = |HU|^2, \tag{2.36}$$

в силу определений (1.2), (1.3).

7. Оценим следующий интеграл

$$\int\limits_{\partial\Omega M} \langle V, \nu\rangle \, d\Sigma^{2n-2}.$$

Обратимся к определению (2.16) для V. В силу того, что вертикальные производные вида $\overset{v}{\nabla}{}^k U^{\alpha|}_{\beta|}(x, \xi) = 0$ при $(x, \xi) \in \partial_-\Omega M$ ($x \in \partial M, \xi$ направлено внутрь M), имеем $V(x, \xi) = 0$ при $(x, \xi) \in \partial_-\Omega M$. Принимая во внимание краевое условие (2.5), покажем, что на $\partial_+\Omega M$ величина $\langle V(x, \xi), \nu\rangle$ выражается как некоторая квадратичная форма с непрерывными коэффициентами от функции $\mathcal{F}A(x, \xi)$ и ее производных по x и ξ. В самом деле, запишем выражение $\langle V(x, \xi), \nu\rangle$ для $(x, \xi) \in \partial_+\Omega M$ в полугеодезической системе координат $(x^1, \ldots, x^{n-1}, x^n)$ в окрестности $x \in \partial M$. Тогда $\nu = (0, \ldots, 0, -1)$ и

$$\langle V(x, \xi), \nu\rangle = -V^n(x, \xi) =$$

$$= -Re\left[\xi^n \overset{h}{\nabla}{}^l U^{\alpha|}_{\beta|} \overset{v}{\nabla}_l \overline{U^{|\beta}_{|\alpha}} - \xi^l \overset{v}{\nabla}{}^n U^{\alpha|}_{\beta|} \overset{h}{\nabla}_l \overline{U^{|\beta}_{|\alpha}}\right]. \tag{2.37}$$

Рассмотрим такую тривиализацию расслоения η, чтобы в точке x метрический тензор g выражался бы единичной матрицей. Ясно, что вертикальные производные от U можно выразить через производные $\mathcal{F}A$ на $\partial_+\Omega M$, а также все компоненты $\overset{h}{\nabla}{}^l$ горизонтальной производной при $1 \le l \le n-1$. Чтобы показать, что величину из (2.37) можно выразить лишь через $\mathcal{F}A$ и ее производные, надо убедиться, что производные по x^n от компонент U участвовать не будут. В самом деле, они могли бы появиться лишь в слагаемом

$$-Re\left[\xi^n \frac{\partial}{\partial x^n} U^{\alpha|}_{\beta|} \frac{\partial}{\partial \xi^n} \overline{U^{|\beta}_{|\alpha}} - \xi^n \frac{\partial}{\partial \xi^n} U^{\alpha|}_{\beta|} \frac{\partial}{\partial x^n} \overline{U^{|\beta}_{|\alpha}}\right].$$

Если теперь записать $U^{\alpha|}_{\beta|} = g_{\beta|\lambda} g^{\alpha|\mu} U^{|\lambda}_{|\mu}$, то часть этого слагаемого, содержащая производные по x^n, перепишется в следующем виде (с учетом выбора тривиализаций):

$$-Re\left[\xi^n \frac{\partial}{\partial x^n} U^{|\beta}_{|\alpha} \frac{\partial}{\partial \xi^n} \overline{U^{|\beta}_{|\alpha}} - \xi^n \frac{\partial}{\partial \xi^n} U^{|\beta}_{|\alpha} \frac{\partial}{\partial x^n} \overline{U^{|\beta}_{|\alpha}}\right] = 0.$$

Таким образом, в выражении (2.37) производные по x^n отсутствуют, и оно является квадратичной формой от $\mathcal{F}A$ и ее производных. Поскольку коэффициенты этой формы определяются лишь метрическими свойствами $(M, \tilde{g})$ и (η, g), имеем для некоторой постоянной $C_0 = C(M, \tilde{g}, \eta, g, \nabla)$ и соответствующей Соболевской нормы $\mathcal{F}A$ следующую оценку:

$$\left| \int\limits_{\partial\Omega M} \langle V, \nu \rangle d\Sigma^{2n-2} \right| \le C_0 \|\mathcal{F}A\|^2_{H^1(\partial_+\Omega M)}. \tag{2.38}$$

8. Запишем теперь тождество Пестова в виде

$$-\overset{h}{\nabla}_k V^k = |\overset{h}{\nabla} U|^2 - 2Re\langle \overset{h}{\nabla} U | \overset{v}{\nabla} HU \rangle + \overset{v}{\nabla}_k W^k -$$
$$-\widetilde{R}_{kplq} \xi^p \xi^q \overset{v}{\nabla}{}^k U^{\alpha|}_{\beta|} \overset{v}{\nabla}{}^l \overline{U^{|\beta}_{|\alpha}} + Re\left[\, (R^{\alpha|}_{kl\varepsilon|} U^{\varepsilon}_{\gamma|} + \overline{R^{|\varepsilon}_{kl|\gamma}} U^{\alpha|}_{\varepsilon|}) \xi^l \overset{v}{\nabla}{}^k \overline{U^{|\gamma}_{|\alpha}} \,\right] \tag{2.39}$$

и проинтегрируем по ΩM, используя все полученные ранее оценки. Необходим учет особенностей производных $U(x,\xi)$ при $x \in \partial M$. Для этого можно использовать метод из книги [2], с.136–138: проинтегрируем сначала по ΩM_δ, где $M_\delta = \{x \in M \mid$ расстояние от x до ∂M не меньше $\delta\}$ и затем осуществим предельный переход при $\delta \to 0$. Наметим лишь общую схему рассуждения. Первое слагаемое из правой части (2.39) неотрицательно; третье можно заменить неотрицательным при интегрировании в силу (2.35), (2.36); второе оценивается через первое в силу (2.25); четвертое и пятое слагаемое ограничены в силу ограниченности вертикальных производных U (см. определение (2.3) и лемму 1.3 на с.120 из [2]). Левая часть сводится после интегрирования по ΩM_δ к интегралу по $\partial\Omega M_\delta$ и окажется ограниченной в силу рассуждений, аналогичных приведенным в пункте 7.

Таким образом, после предельного перехода при $\delta \to 0$ получаем, что в (2.39) возможно интегрирование по ΩM, в результате которого найдем

$$C_0\|\mathcal{F}A\|^2_{H^1(\partial_+\Omega M)} \geq \left| \int\limits_{\partial\Omega M} \langle V,\nu\rangle d\Sigma^{2n-2} \right| \geq \int\limits_{\Omega M} |\overset{h}{\nabla}U|^2 d\Sigma^{2n-1} +$$

$$+(n-2)\int\limits_{\Omega M} |HU|^2 d\Sigma^{2n-1} - 2\int\limits_{\Omega M} (|\overset{v}{\nabla}P\cdot P^{-1}| + |Q^{-1}\cdot\overset{v}{\nabla}Q|)|\overset{h}{\nabla}U|^2 d\Sigma^{2n-1} -$$

$$-\tilde\rho\int\limits_{\Omega M} (|\overset{v}{\nabla}P\cdot P^{-1}| + |Q^{-1}\cdot\overset{v}{\nabla}Q| + 1)^2|\overset{h}{\nabla}U|^2 d\Sigma^{2n-1} -$$

$$-2\rho\int\limits_{\Omega M} (|\overset{v}{\nabla}P\cdot P^{-1}| + |Q^{-1}\cdot\overset{v}{\nabla}Q| + 1)^2|\overset{h}{\nabla}U|^2 d\Sigma^{2n-1} \geq$$

$$\geq (1-2\mu-(\tilde\rho+2\rho)(\mu+1)^2)\int\limits_{\Omega M} |\overset{h}{\nabla}U|^2 d\Sigma^{2n-1} + (n-2)\int\limits_{\Omega M} |HU|^2 d\Sigma^{2n-1} \geq$$

$$\geq (n-1-(\tilde\rho+2\rho)(\mu+1)^2-2\mu)\cdot\int\limits_{\Omega M} |HU|^2 d\Sigma^{2n-1}, \tag{2.40}$$

в силу условия (2.13) доказываемой теоремы, неравенств (2.24), (2.27), (2.32), в последних двух из которых использовалась оценка (2.34). Воспользовавшись равенством

$$A(x) = P^{-1}(x,\xi)HU(x,\xi)Q^{-1}(x,\xi)$$

и оценкой (2.20) леммы 2.2, получим

$$|A(x)| \leq |P^{-1}(x,\xi)|\cdot|HU(x,\xi)|\cdot|Q^{-1}(x,\xi)|.$$

Отсюда найдем

$$|HU(x,\xi)| \geq |P^{-1}(x,\xi)|^{-1}|Q^{-1}(x,\xi)|^{-1}\cdot|A(x)| \geq C_1|A(x)|, \tag{2.41}$$

где $C_1 = \inf\limits_{(x,\xi)\in\Omega M} |P^{-1}(x,\xi)|^{-1}|Q^{-1}(x,\xi)|^{-1} > 0,$ в силу соображений компактности.

Продолжая (2.40), получим оценку

$$C_0\|\mathcal{F}A\|^2_{H^1(\partial_+\Omega M)} \geq (n-1-(\tilde\rho+2\rho)(\mu+1)^2-2\mu)\cdot C_1^2\sigma_n\int\limits_M |A(x)|^2 dx,$$

где σ_n — площадь поверхности единичной сферы в R^n. Отсюда приходим к искомой оценке устойчивости

$$\|A\|_{L^2(M)} \leq C\|\mathcal{F}A\|_{H^1(\partial_+\Omega M)}$$

и утверждению о единственности. Теорема доказана.

3. Нелинейная обратная задача для операторов в расслоении

Пусть $A = A(x) \in C^\infty(\eta \otimes \eta^*) = C^\infty(\tau^{(0,1,0)}_{(0,1,0)}\eta)$ — неизвестный оператор, действующий в слоях комплексного m-мерного векторного эрмитова расслоения (η, g) над компактным рассеивающим римановым многообразием с краем.

Рассмотрим $U = U(x,\xi) \in C^\infty(\beta^{(0,1,0)}_{(0,1,0)}\eta)$ и следующую систему для U:

$$\begin{cases} HU(x,\xi) = A(x)U(x,\xi), & (x,\xi) \in T_0M, \\ U(x,\xi) = E, & (x,\xi) \in \partial_- T_0M. \end{cases} \tag{3.1}$$

Здесь $\partial_- T_0M := \{(x,\xi) \in T_0M \mid x \in \partial M, \xi \text{ направлено внутрь } M \;(\langle \xi, \nu_x\rangle < 0\,)\}$, E — тождественный оператор, $H = \xi^k \overset{h}{\nabla}_k$ — оператор геодезического потока, записываемый в координатах так:

$$HU^{\alpha|}_{\beta|} = \xi^k \frac{\partial}{\partial x^k} U^{\alpha|}_{\beta|} - \widetilde{\Gamma}^p_{kq}\xi^k\xi^q \frac{\partial}{\partial \xi^p} U^{\alpha|}_{\beta|} + \xi^k \Gamma^\alpha_{k\varepsilon} U^{\varepsilon|}_{\beta|} - \xi^k \Gamma^\varepsilon_{k\beta} U^{\alpha|}_{\varepsilon|}. \tag{3.2}$$

(см. определение (1.5)).

Пусть известны значения $F(x,\xi) = U(x,\xi)$ при $(x,\xi) \in \partial_+\Omega M$.

Задача 2. *Восстановить $A = A(x)$ по известной операторнозначной функции $F = F(x,\xi)$, $(x,\xi) \in \partial_+\Omega M$.*

Для операторнозначной функции $A \in C^\infty(\tau^{(0,1,0)}_{(0,1,0)}\eta)$ определим следующие величины $M_j(A)$, $j = 1,2,3$:

$$M_1(A) := \sup_{(x,\xi)\in\partial_-\Omega M} \frac{\tau_+(x,\xi)}{|\langle \xi, \nu_x\rangle|} |A(x)|, \tag{3.3}$$

где ν_x — единичный вектор внешней нормали к ∂M в точке $x \in \partial M$;

$$M_2(A) := \sup_{(x,\xi)\in\partial_-\Omega M} \int\limits_0^{\tau_+(x,\xi)} |A(\gamma_{x,\xi}(t))| dt; \tag{3.4}$$

$$M_3(A) := \sup_{(x,\xi)\in\partial_-\Omega M} \int\limits_0^{\tau_+(x,\xi)} t\, |\overset{h}{\nabla} A(\gamma_{x,\xi}(t), \dot\gamma_{x,\xi}(t))| dt. \tag{3.5}$$

С помощью этих величин определим множество $\mathcal{M} = \mathcal{M}(M_1, M_2, M_3)$ операторнозначных функций из $C^\infty(\tau^{(0,1,0)}_{(0,1,0)}\eta)$ следующим образом

$$A \in \mathcal{M} \Leftrightarrow M_j(A) \le M_j \text{ для } j = 1,2,3. \tag{3.6}$$

Теорема 3.1. *Пусть $(M, \tilde g)$ — компактное рассеивающее риманово многообразие с краем и для величины $\tilde\rho$, определенной в (2.11), справедливо условие $\tilde\rho < 1$. Пусть (η, g) — m-мерное комплексное эрмитово векторное расслоение над M. Предположим, что величины M_1, M_2, M_3 удовлетворяют неравенству*

$$(\tilde\rho + 2\rho)(\tilde\mu + 1)^2 + 2\tilde\mu < 1, \text{ где} \tag{3.7}$$

$$\tilde\mu = \frac{2}{1-\tilde\rho}(M_1 + me^{2M_2}(M_3 + m\rho) + \sqrt{m}\rho). \tag{3.8}$$

(ρ определено в (2.10)).

Тогда задача 2 имеет в множестве $\mathcal{M}$, определенном в (3.6), не более одного решения и справедлива оценка устойчивости:

$$\|A_1 - A_2\|_{L^2(M)} \le C(M_1, M_2, M_3) \cdot \|F_1 - F_2\|_{H^1(\partial_+\Omega M)}. \tag{3.9}$$

Здесь $A_1, A_2 \in \mathcal{M}$; F_1, F_2 — соответствующие операторнозначные функции.

Доказательство.

1. Установим сначала следующее свойство:

Лемма 3.1. *Для любых $U, V \in C^\infty(\beta^{(0,1,0)}_{(0,1,0)}\eta)$ выполняется правило дифференцирования:*

$$\overset{h}{\nabla}_k(U \cdot V) = (\overset{h}{\nabla}_k U) \cdot V + U \cdot (\overset{h}{\nabla}_k V), \tag{3.10}$$

где произведения понимаются в смысле умножения операторов.

Доказательство. По определению вычисляем

$$\overset{h}{\nabla}_k(U\cdot V)^{\alpha|}_{\beta|} = \frac{\partial}{\partial x^k}(U\cdot V)^{\alpha|}_{\beta|} - \widetilde{\Gamma}^p_{kq}\xi^q\frac{\partial}{\partial \xi^p}(U\cdot V)^{\alpha|}_{\beta|} + \Gamma^\alpha_{k\varepsilon}(U\cdot V)^{\varepsilon|}_{\beta|} - \Gamma^\varepsilon_{k\beta}(U\cdot V)^{\alpha|}_{\varepsilon|} = (\frac{\partial}{\partial x^k}U^{\alpha|}_{\gamma|})\cdot V^{\gamma|}_{\beta|} +$$

$$+U^{\alpha|}_{\gamma|}\cdot\frac{\partial}{\partial x^k}V^{\gamma|}_{\beta|} - \widetilde{\Gamma}^p_{kq}\xi^q\left[(\frac{\partial}{\partial \xi^p}U^{\alpha|}_{\gamma|})\cdot V^{\gamma|}_{\beta|} + U^{\alpha|}_{\gamma|}\cdot\frac{\partial}{\partial \xi^p}V^{\gamma|}_{\beta|}\right] + \Gamma^\alpha_{k\varepsilon}U^{\varepsilon|}_{\gamma|}V^{\gamma|}_{\beta|} - \Gamma^\varepsilon_{k\beta}U^{\alpha|}_{\gamma|}V^{\gamma|}_{\varepsilon|} =$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x^k}U^{\alpha|}_{\gamma|} - \widetilde{\Gamma}^p_{kq}\xi^q\frac{\partial}{\partial \xi^p}U^{\alpha|}_{\gamma|} + \Gamma^\alpha_{k\varepsilon}U^{\varepsilon|}_{\gamma|} - \Gamma^\varepsilon_{k\gamma}U^{\alpha|}_{\varepsilon|}\right]\cdot V^{\gamma|}_{\beta|} +$$

$$+U^{\alpha|}_{\gamma|}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial x^k}V^{\gamma|}_{\beta|} - \widetilde{\Gamma}^p_{kq}\xi^q\frac{\partial}{\partial \xi^p}V^{\gamma|}_{\beta|} + \Gamma^\gamma_{k\varepsilon}V^{\varepsilon|}_{\beta|} - \Gamma^\varepsilon_{k\beta}V^{\gamma|}_{\varepsilon|}\right] +$$

$$+\Gamma^\varepsilon_{k\gamma}U^{\alpha|}_{\varepsilon|}V^{\gamma|}_{\beta|} - U^{\alpha|}_{\gamma|}\Gamma^\gamma_{k\varepsilon}V^{\varepsilon|}_{\beta|} = (\overset{h}{\nabla}_k U)^{\alpha|}_{\gamma|}V^{\gamma|}_{\beta|} + U^{\alpha|}_{\gamma|}(\overset{h}{\nabla}_k V)^{\gamma|}_{\beta|}.$$

Лемма доказана.

Применяя эту лемму к оператору $H = \xi^k\overset{h}{\nabla}_k$, получаем

$$H(U\cdot V) = (HU)\cdot V + U\cdot(HV). \tag{3.11}$$

Поскольку $U^{-1}\cdot U = E$, получаем

$$(HU^{-1})\cdot U + U^{-1}\cdot(HU) = 0$$

и, следовательно,

$$HU^{-1} = -U^{-1}(HU)U^{-1}. \tag{3.12}$$

2. Покажем, что если $U = U(x,\xi)$ — решение системы (3.1), то для любых $(x,\xi)\in T_0M$, оператор $U(x,\xi)$ обратим.

В самом деле, рассмотрим $V(x,\xi)$ — решение системы

$$\begin{cases} HV(x,\xi) = -V(x,\xi)A(x), & (x,\xi)\in T_0M, \\ V(x,\xi) = E, & (x,\xi)\in\partial_-T_0M. \end{cases} \tag{3.13}$$

Рассмотрим далее $P(x,\xi)=V(x,\xi)U(x,\xi)$. Тогда в силу (3.11) получим

$$HP(x,\xi)=HV(x,\xi)U(x,\xi)+V(x,\xi)HU(x,\xi)=$$

$$=-V(x,\xi)A(x)U(x,\xi)+V(x,\xi)A(x)U(x,\xi)=0;$$

$$P(x,\xi)=E, \quad \text{для } (x,\xi)\in\partial_-T_0M. \tag{3.14}$$

Отсюда, рассматривая систему обыкновенных дифференциальных уравнений, получающуюся из (3.14) для геодезической γ_{x_0,ξ_0}, $(x_0,\xi_0)\in\partial_-T_0M$, и применяя теорему единственности, убеждаемся, что $P(x,\xi)=E$ для любых $(x,\xi)\in T_0M$. Итак, имеем $V(x,\xi)=U^{-1}(x,\xi)$ и, таким образом, оператор U всюду имеет гладкий обратный.

3. Пусть теперь $A_1(x),A_2(x)$ удовлетворяют условиям теоремы: $A_1(x),A_2(x)\in\mathcal{M}=\mathcal{M}(M_1,M_2,M_3)$; $U_1(x,\xi)$, $U_2(x,\xi)$ — решения системы (3.1) для A_1 и A_2; $F_1(x,\xi),F_2(x,\xi)$ — соответствующие известные функции на $\partial_+\Omega M$.

В силу предыдущего пункта мы можем ввести в рассмотрение

$$R(x,\xi)=U_1^{-1}(x,\xi)U_2(x,\xi)-E. \tag{3.15}$$

Вычисляем далее

$$HR=-U_1^{-1}(HU_1)U_1^{-1}\cdot U_2+U_1^{-1}HU_2=$$

$$=-U_1^{-1}\cdot A_1U_1U_1^{-1}\cdot U_2+U_1^{-1}A_2U_2=U_1^{-1}(A_2-A_1)U_2 \tag{3.16}$$

всюду на T_0M.

Имеем также следующие краевые условия

$$R(x,\xi)=0, \text{ при } (x,\xi)\in\partial_-\Omega M; \tag{3.17}$$

$$R(x,\xi)=F_1^{-1}(x,\xi)F_2(x,\xi)-E, \text{ при } (x,\xi)\in\partial_+\Omega M. \tag{3.18}$$

Рассмотрим получившуюся задачу, как частный случай задачи 1 относительно операторнозначной функции $(A_2(x)-A_1(x))$ с весами $P(x,\xi)=U_1^{-1}(x,\xi)$, $Q(x,\xi)=U_2(x,\xi)$ (в силу теоремы единственности решение R уравнения (3.16) с краевым условием (3.17) представляется интегралом вида (2.3) и значения $R(x,\xi)$ при $(x,\xi)\in\partial_+\Omega M$ известны из (3.18)).

Замечание. Веса P,Q зависят от неизвестных операторнозначных функций A_1,A_2.

Для применения теоремы 2.1 необходимо убедиться в справедливости для получившихся весов условия (2.13), а также показать, что константа C_1 из оценки (2.41) может быть универсально оценена снизу для $A_1(x)$, $A_2(x)$, удовлетворяющих условиям доказываемой теоремы.

Итак, необходимо оценить

$$\mu=\sup_{(x,\xi)\in\Omega M}(|\overset{v}{\nabla}P(x,\xi)P^{-1}(x,\xi)|+|Q^{-1}(x,\xi)\overset{v}{\nabla}Q(x,\xi)|).$$

Находим

$$\overset{v}{\nabla}P\cdot P^{-1}=\overset{v}{\nabla}(U_1^{-1})U_1=-U_1^{-1}(\overset{v}{\nabla}U_1)U_1^{-1}\cdot U_1=-U_1^{-1}\overset{v}{\nabla}U_1,$$

поэтому достаточно оценивать лишь второе слагаемое.

Обозначим далее для краткости $U_2(x,\xi) = U(x,\xi)$, $A_2(x) = A(x)$ и

$$W(x,\xi) = U^{-1}(x,\xi)\overset{v}{\nabla}U(x,\xi). \tag{3.19}$$

4. Вычислим HW. Имеем в силу (3.11) и коммутационной формулы (2.33):

$$HW = HU^{-1}\cdot\overset{v}{\nabla}U + U^{-1}\cdot H\overset{v}{\nabla}U = -U^{-1}(AU)U^{-1}\overset{v}{\nabla}U + U^{-1}\left[\overset{v}{\nabla}(HU) - \overset{h}{\nabla}U\right] =$$

$$= -U^{-1}A\overset{v}{\nabla}U + U^{-1}A\overset{v}{\nabla}U - U^{-1}\overset{h}{\nabla}U = -U^{-1}\overset{h}{\nabla}U. \tag{3.20}$$

В вычислении использовалась независимость $A = A(x)$ от ξ.

Обозначим

$$Y = U^{-1}\overset{h}{\nabla}U \tag{3.21}$$

и вычислим HY:

$$HY = HU^{-1}\cdot\overset{h}{\nabla}U + U^{-1}H\overset{h}{\nabla}U = -U^{-1}A\overset{h}{\nabla}U + U^{-1}H\overset{h}{\nabla}U. \tag{3.22}$$

Докажем формулу коммутации:

$$[H,\overset{h}{\nabla}_l] := H\overset{h}{\nabla}_l - \overset{h}{\nabla}_l H = \xi^k[\overset{h}{\nabla}_k,\overset{h}{\nabla}_l]. \tag{3.23}$$

В самом деле,

$$\overset{h}{\nabla}_l H = \overset{h}{\nabla}_l(\xi^k\overset{h}{\nabla}_k) = \overset{h}{\nabla}_l(\xi^k)\overset{h}{\nabla}_k + \xi^k\overset{h}{\nabla}_l\overset{h}{\nabla}_k = \xi^k\overset{h}{\nabla}_l\overset{h}{\nabla}_k$$

и, следовательно,

$$H\overset{h}{\nabla}_l - \overset{h}{\nabla}_l H = \xi^k\overset{h}{\nabla}_k\overset{h}{\nabla}_l - \xi^k\overset{h}{\nabla}_l\overset{h}{\nabla}_k = \xi^k[\overset{h}{\nabla}_k,\overset{h}{\nabla}_l].$$

Напомним следующую формулу коммутации (частный случай формулы из [3], с. 12): для $U \in C^\infty(\beta^{(0,1,0)}_{(0,1,0)}\eta)$ имеет место соотношение

$$[\overset{h}{\nabla}_k,\overset{h}{\nabla}_l]\, U^{\alpha|}_{\beta|} = -\widetilde{R}^p_{qkl}\xi^q\overset{v}{\nabla}_p U^{\alpha|}_{\beta|} + R^\alpha_{kl\varepsilon}U^{\varepsilon|}_{\beta|} - R^\varepsilon_{kl\beta}U^{\alpha|}_{\varepsilon|}. \tag{3.24}$$

В силу равенства (3.22) можно получить

$$HY_l = H(U^{-1}\overset{h}{\nabla}_l U) = -U^{-1}A\overset{h}{\nabla}_l U + U^{-1}H\overset{h}{\nabla}_l U =$$

$$= U^{-1}(\overset{h}{\nabla}_l A)U + U^{-1}\xi^k\,[\overset{h}{\nabla}_k,\overset{h}{\nabla}_l]\,U. \tag{3.25}$$

Записывая подробнее с использованием (3.24), имеем

$$HY^{\alpha|}_{l\beta|} = (U^{-1}(\overset{h}{\nabla}_l A)U)^{\alpha|}_{\beta|} + (U^{-1})^{\alpha|}_{\gamma|}\cdot\xi^k\cdot(-\widetilde{R}^p_{qkl}\xi^q\overset{v}{\nabla}_p U^{\gamma|}_{\beta|} + R^\gamma_{kl\varepsilon}U^{\varepsilon|}_{\beta|} - R^\varepsilon_{kl\beta}U^{\gamma|}_{\varepsilon|}) =$$

$$= (U^{-1}(\overset{h}{\nabla}_l A)U)^{\alpha|}_{\beta|} - \widetilde{R}^p_{qkl}\xi^q\xi^k(U^{-1})^{\alpha|}_{\gamma|}\overset{v}{\nabla}_p U^{\gamma|}_{\beta|} + R^\gamma_{kl\varepsilon}\xi^k(U^{-1})^{\alpha|}_{\gamma|}U^{\varepsilon|}_{\beta|} - R^\alpha_{kl\beta}\xi^k. \tag{3.26}$$

В итоге получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} HW = -Y, \\ HY^{\alpha|}_{l\beta|} = (U^{-1}(\overset{h}{\nabla}_l A)U)^{\alpha|}_{\beta|} - \widetilde{R}^p_{qkl}\xi^q\xi^k W^{\alpha|}_{p\beta|} + R^{\gamma}_{kl\varepsilon}\xi^k(U^{-1})^{\alpha|}_{\gamma|}U^{\varepsilon|}_{\beta|} - R^{\alpha}_{kl\beta}\xi^k. \end{cases} \tag{3.27}$$

Ясно, что $W(x,\xi) = 0$ для $(x,\xi) \in \partial_-\Omega M$, поскольку $U(x,\xi) = E$ при всех $(x,\xi) \in \partial_-T_0M$ и поэтому $\overset{v}{\nabla}_k U(x,\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi^k}U(x,\xi) = 0$ для всех $(x,\xi) \in \partial_-\Omega M$.

Необходимо теперь оценить $Y(x,\xi) = U^{-1}(x,\xi)\cdot\overset{h}{\nabla}U(x,\xi)$ для $(x,\xi) \in \partial_-\Omega M$.

Выберем полугеодезическую систему координат в окрестности $(\overset{0}{x},\overset{0}{\xi}) \in \partial_-\Omega M$ так, чтобы уравнение границы M записывалось в виде $x^n = 0$. Учитывая, что $U(\overset{0}{x},\overset{0}{\xi}) = E$, получим

$$Y^{\alpha|}_{l\beta|}(\overset{0}{x},\overset{0}{\xi}) = \overset{h}{\nabla}_l U^{\alpha|}_{\beta|}(\overset{0}{x},\overset{0}{\xi}) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^l}U^{\alpha|}_{\beta|}(\overset{0}{x},\overset{0}{\xi}) - \widetilde{\Gamma}^p_{kq}\overset{0}{\xi}{}^q\frac{\partial}{\partial \xi^p}U^{\alpha|}_{\beta|}(\overset{0}{x},\overset{0}{\xi}) + \Gamma^{\alpha}_{k\varepsilon}U^{\varepsilon|}_{\beta|}(\overset{0}{x},\overset{0}{\xi}) - \Gamma^{\varepsilon}_{k\beta}U^{\alpha|}_{\varepsilon|}(\overset{0}{x},\overset{0}{\xi}) = \frac{\partial}{\partial x^l}U^{\alpha|}_{\beta|}(\overset{0}{x},\overset{0}{\xi}). \tag{3.28}$$

В силу основного уравнения (3.1) находим

$$\overset{0}{\xi}{}^k\frac{\partial}{\partial x^k}U(\overset{0}{x},\overset{0}{\xi}) = A(\overset{0}{x}). \tag{3.29}$$

Также имеем нулевые производные по касательным направлениям:

$$\frac{\partial}{\partial x^k}U(\overset{0}{x},\overset{0}{\xi}) = 0 \textit{ при } k = 1,\ldots,n-1.$$

Получаем

$$\frac{\partial}{\partial x^n}U(\overset{0}{x},\overset{0}{\xi}) = \frac{A(\overset{0}{x})}{\overset{0}{\xi}{}^n} = \frac{A(\overset{0}{x})}{|\langle\overset{0}{\xi},\nu\rangle|}, \tag{3.30}$$

где ν — единичный вектор внешней нормали.

Итак, справедливо равенство

$$Y_l(\overset{0}{x},\overset{0}{\xi}) = \begin{cases} 0, & \textit{при } l = 1,\ldots,n-1; \\ \frac{A(\overset{0}{x})}{|\langle\overset{0}{\xi},\nu\rangle|}, & \textit{при } l = n. \end{cases}$$

Поэтому получаем следующее значение нормы

$$|Y(\overset{0}{x},\overset{0}{\xi})| = \frac{1}{|\langle\overset{0}{\xi},\nu\rangle|}|A(\overset{0}{x})|. \tag{3.31}$$

5. Докажем формулу интегрального представления для функции $W(x,\xi)$: если $(x,\xi) \in T_0M$, то

$$W(x,\xi) = \int\limits_{\tau_-(x,\xi)}^{0} \widetilde{I}^{t,0}_{\gamma}\cdot(-Y(\gamma(t),\dot{\gamma}(t))\cdot\widetilde{I}^{0,t}_{\gamma}dt \qquad (\gamma = \gamma_{x,\xi}). \tag{3.32}$$

Здесь $\widetilde{I}$ — операторы перехода из одного слоя расслоения $C^{\infty}(\beta_{(1,1,0)}^{(0,1,0)}\eta)$ в другой, индуцированные операторами параллельного переноса вдоль $\gamma_{x,\xi}$ для связностей $\nabla, \widetilde{\widetilde{\nabla}}$. В самом деле, подобно выводу кинетического уравнения (2.6) для функции (2.3) можно показать, что правая часть равенства (3.32) удовлетворяет первому уравнению системы (3.27). При этом имеем нулевые краевые условия на $\partial_{-}T_0M$. Поскольку то же самое выполняется для функции $W(x,\xi)$, то по теореме единственности для систем обыкновенных дифференциальных уравнений получаем (3.32) (рассмотрев кинетическое уравнение вдоль геодезической).

Поскольку операторы параллельного переноса для связностей, согласованных с эрмитовой метрикой g и метрикой на многообразии $\tilde{g}$, являются изометриями, $\widetilde{I}$ также являются изометриями и мы получаем в силу (3.32)

$$|W(x,\xi)| \le \int\limits_{\tau_{-}(x,\xi)}^{0} |Y(\gamma(t),\dot{\gamma}(t))|dt. \tag{3.33}$$

Если обозначить правую часть второго уравнения системы (3.27) через Z, то аналогичным образом получим представление для Y

$$Y(x,\xi) = \widetilde{I}_{\gamma}^{\tau_{-}(x,\xi),0} Y(\gamma(\tau_{-}(x,\xi)),\dot{\gamma}(\tau_{-}(x,\xi)))\widetilde{I}_{\gamma}^{0,\tau_{-}(x,\xi)} +$$
$$+ \int\limits_{\tau_{-}(x,\xi)}^{0} \widetilde{I}_{\gamma}^{t,0} Z(\gamma(t),\dot{\gamma}(t)) \cdot \widetilde{I}_{\gamma}^{0,t} dt$$

и оценку нормы

$$|Y(x,\xi)| \le |Y(\gamma(\tau_{-}(x,\xi)),\dot{\gamma}(\tau_{-}(x,\xi)))| + \int\limits_{\tau_{-}(x,\xi)}^{0} |Z(\gamma(t),\dot{\gamma}(t))|dt \qquad (\gamma = \gamma_{x,\xi}). \tag{3.34}$$

6. Оценим теперь норму Z.

Для начала оценим величину $|U(x,\xi)|$. Используя систему (3.1) и, рассуждая как выше, получим

$$|U(x,\xi)| \le \sqrt{m} + \int\limits_{\tau_{-}(x,\xi)}^{0} |A(\gamma(t))| \cdot |U(\gamma(t),\dot{\gamma}(t))|dt \qquad (\gamma = \gamma_{x,\xi}). \tag{3.35}$$

Здесь $\sqrt{m} = |E|$, m — размерность расслоения η (см. определение нормы (1.2), (1.3)).

Подставляя вместо $|U(\gamma(t),\dot{\gamma}(t))|$ в интеграле в оценке (3.35) саму эту оценку в соответствующей точке, повторяя этот прием и получая ряд Неймана для экспоненты, приходим к следующему неравенству

$$|U(x,\xi)| \le \sqrt{m}\, exp(\int\limits_{\tau_{-}(x,\xi)}^{0} |A(\gamma(t))|dt\ ) \le \sqrt{m}\, e^{M_2(A)}. \tag{3.36}$$

Поскольку $U^{-1}(x,\xi)$ удовлетворяет системе (3.13), то аналогично получим оценку

$$|U^{-1}(x,\xi)| \le \sqrt{m}\, exp(\int\limits_{\tau_{-}(x,\xi)}^{0} |A(\gamma(t))|dt\ ) \le \sqrt{m}\, e^{M_2(A)}. \tag{3.37}$$

Используя (3.36), (3.37), приходим к неравенству

$$|U^{-1}(\overset{h}{\nabla}A)U| \le m\, e^{2M_2(A)}|\overset{h}{\nabla}A|. \tag{3.38}$$

Теперь оценим оставшиеся три слагаемые в Z. Вспоминая определение (2.9) оператора кривизны $\widetilde{R}$, имеем оценку для нормы следующего сечения из $C^\infty(\beta^{(0,1,0)}_{(1,1,0)}\eta)$ (заданного своими компонентами с индексами l, α, β) в точке (x,ξ):

$$\Big|\,(\widetilde{R}^p_{qkl}\xi^q\xi^k W^{\alpha|}_{p\beta|})\,\Big| = \Big|\,(\widetilde{R}_{pqkl}\xi^q\xi^k W^{p\alpha|}_{\beta|})\,\Big| \le \|\widetilde{R}(x)\|\cdot|W(x,\xi)|. \tag{3.39}$$

В силу определения (2.8) оператора R находим для нормы сечения того же расслоения в точке (x,ξ):

$$\Big|\,(R^\gamma_{kl\varepsilon}\xi^k(U^{-1})^{\alpha|}_{\gamma|}U^{\varepsilon|}_{\beta|})\,\Big| \le \|R(x)\|\cdot|U^{-1}(x,\xi)|\cdot|U(x,\xi)| \le \|R(x)\|\, m\, e^{2M_2(A)}. \tag{3.40}$$

Аналогично,

$$|(R^\alpha_{kl\beta}\xi^k)| \le \sqrt{m}\,\|R(x)\|. \tag{3.41}$$

Для доказательства последнего неравенства в определении R выбираем в качестве u векторы e_ν для $\nu = 1,\dots,m$ и для нормы сечения из $C^\infty(\beta^{(0,1,0)}_{(1,0,0)}\eta)$ (при фиксированном ν) получаем

$$|(R^\alpha_{kl\nu}\xi^k)_{\text{фикс.}\,\nu}| \le \|R(x)\|. \tag{3.42}$$

Подобно встречавшимся ранее ситуациям, считаем матрицы g и $\tilde{g}$ в данной точке (x,ξ) единичными и тогда, извлекая квадратный корень из суммы квадратов норм из (3.42) по ν от 1 до m, получаем (3.41).

7. Возвращаясь к системе (3.27) и учитывая равенство (3.31) и оценки (3.33), (3.34), (3.38)–(3.41), получаем следующие неравенства

$$\begin{aligned}
|W(x,\xi)| &\le \int\limits_{\tau_-(x,\xi)}^{0} |Y(\gamma(t),\dot\gamma(t))|dt \le \int\limits_{\tau_-(x,\xi)}^{0} \Bigg[\frac{1}{|\langle\dot\gamma(\tau_-(x,\xi)),\nu\rangle|}|A(\gamma(\tau_-(x,\xi)))|+ \\
&+ \int\limits_{\tau_-(x,\xi)}^{t} |Z(\gamma(\tau),\dot\gamma(\tau))|d\tau\Bigg]\,dt \le \frac{|\tau_-(x,\xi)|}{|\langle\dot\gamma(\tau_-(x,\xi)),\nu\rangle|}|A(\gamma(\tau_-(x,\xi)))|+ \\
&+ \int\limits_{\tau_-(x,\xi)}^{0}\int\limits_{\tau_-(x,\xi)}^{t} \Big[m\, e^{2M_2(A)}|\overset{h}{\nabla}A(\gamma(\tau),\dot\gamma(\tau))| + \|\widetilde{R}(\gamma(\tau))\|\cdot|W(\gamma(\tau),\dot\gamma(\tau))|+ \\
&+\|R(\gamma(\tau))\|\cdot(\sqrt{m}+m\, e^{2M_2(A)})\Big]\,d\tau dt \le \\
&\le \int\limits_{\tau_-(x,\xi)}^{0} |\tau|\,\|\widetilde{R}(\gamma(\tau))\|\cdot|W(\gamma(\tau),\dot\gamma(\tau))|d\tau + M_1(A) + m\, e^{2M_2(A)}\cdot M_3(A)+ \\
&+(\sqrt{m}+m\, e^{2M_2(A)})\rho \qquad (\gamma=\gamma_{x,\xi}).
\end{aligned} \tag{3.43}$$

В связи с рассмотрением величины $M_1(A)$ заметим, что для $x \in \partial M$ выражение

$$k(x) = \sup_{\xi:(x,\xi)\in\partial_-\Omega M} \frac{\tau_+(x,\xi)}{|\langle \xi, \nu_x\rangle|}$$

конечно и ограничено сверху для компактных многообразий со строго выпуклой границей (см. [2], лемма 1.2 на с.120). Из неравенства (3.43) выводим оценку

$$|W(x,\xi)| \le \tilde\rho \max_{\tau\in[\tau_-(x,\xi),0]} |W(\gamma(\tau),\dot\gamma(\tau))| + M_1(A) +$$

$$+ m\, e^{2M_2(A)} \cdot (M_3(A) + m\rho) + \sqrt{m}\rho.$$

Отсюда, учитывая условие $\tilde\rho < 1$, получаем ($A = A_2$)

$$\max_{(x,\xi)\in\Omega M} |W(x,\xi)| \le \frac{1}{1-\tilde\rho}(M_1(A) + m\, e^{2M_2(A)} \cdot (M_3(A) + m\rho) + \sqrt{m}\rho). \qquad (3.44)$$

Ясно, что аналогичная оценка (с заменой A на A_1) имеется и для величины $\max\limits_{(x,\xi)\in\Omega M} |\overset{v}{\nabla} P(x,\xi)\cdot P^{-1}(x,\xi)|$. Таким образом, для величины μ (см. (2.12)), получается оценка

$$\mu \le \frac{2}{1-\tilde\rho}(M_1 + m\, e^{2M_2} \cdot (M_3 + m\rho) + \sqrt{m}\rho) = \tilde\mu$$

(см. (3.6) и (3.8)).

В силу условия (3.7) находим $(\tilde\rho + 2\rho)(\mu+1)^2 + 2\mu < 1$, т. е. выполнено условие (2.13) из теоремы 2.1.

Что касается оценки для C_1 в (2.41), равномерной по $A_1, A_2 \in \mathcal{M}$, то для $Q^{-1}(x,\xi) = U_2^{-1}(x,\xi)$ мы имеем оценку (3.37), а для $P^{-1}(x,\xi) = U_1(x,\xi)$ — оценку (3.36) (где показатели экспонент надо заменить на M_2), поэтому в качестве C_1 можно взять величину $\frac{1}{m}e^{-2M_2}$.

Применяя теорему 2.1, получаем

$$\|A_1 - A_2\|_{L^2(M)} \le C_2(M_1, M_2, M_3)\, \|R\|_{H^1(\partial_+\Omega M)} =$$

$$= C_2(M_1, M_2, M_3)\, \|F_1^{-1}\cdot(F_2 - F_1)\|_{H^1(\partial_+\Omega M)}. \qquad (3.45)$$

Заметим, что $F^{-1}(x,\xi) = V(x,\xi)$, $(x,\xi) \in \partial_+\Omega M$, где $V(x,\xi)$ — решение системы (3.13) с $A = A_1$. $|V|$ оценивается сверху равномерно на множестве $\mathcal{M}$ с помощью (3.37), а равномерная оценка на $\mathcal{M}$ производных V получается, если мы напишем уравнение вариаций для (3.13) и учтем условие (3.6). Тогда, продолжая неравенство (3.45), приходим к искомой оценке устойчивости (3.9), из которой также следует единственность решения:

$$\|A_1 - A_2\|_{L^2(M)} \le C(M_1, M_2, M_3)\cdot \|F_1 - F_2\|_{H^1(\partial_+\Omega M)}.$$

Теорема полностью доказана.

Автор благодарен В. А. Шарафутдинову за обсуждение работы.

Литература

1. *Вертгейм Л. Б.* Интегральная геометрия с матричным весом и одна нелинейная задача восстановления матриц // Докл. АН СССР. 1991. Т.319, N 3. С. 531–534.

2. *Шарафутдинов В. А.* Интегральная геометрия тензорных полей. Новосибирск: Наука, 1993.

3. *Sharafutdinov V. A.* On an inverse problem of determining a connection on a vector bundle // Max-Planck Institut fur Mathematik. Preprint Series. 1997 (109).

Вертгейм Лев Борисович

Задача интегральной геометрии и нелинейная обратная задача
для операторов в векторном расслоении

Препринт N 64

Подписано в печать 19.11.99. *Формат* 60×84 1/8. *Печать офсетная.*
Усл. печ. л. 3,1. Уч.-изд. л. 1. Тираж 100 экз. Заказ N 68.

Лицензия ЛР N 065614 от 8 января 1998 г.
Издательство ИМ СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия.

Лицензия ПЛД N 57-43 от 22 апреля 1998 г.
Отпечатано на полиграфическом участке ИМ СО РАН.
пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия.