УДК 517.444

Дата поступления
7 декабря 1999 *г.*

Вертгейм Л. Б.
ЗАДАЧА ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ВДОЛЬ НЕСКОЛЬКИХ СЕМЕЙСТВ КРИВЫХ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВЛАСОВА. — Новосибирск, 1999. — 15 с. — (Препринт / РАН. Сиб. отд-ние. Институт математики; N 66).

Рассматривается задача определения векторнозначной функции в плоской односвязной ограниченной области по известным интегралам от нее с векторными весами вдоль нескольких регулярных семейств ориентированных кривых. При некоторых ограничениях на веса доказана теорема единственности и устойчивости. Полученный результат применяется к одному частному случаю обратной задачи для системы кинетических уравнений, возникающей из системы уравнений Власова для равновесной плазмы.

Ключевые слова и фразы: интегральная геометрия, обратные задачи, система уравнений Власова.

Адрес автора: Институт математики им. С. Л. Соболева, пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия; e-mail: vert@math.nsc.ru

Задача интегральной геометрии вдоль нескольких семейств кривых и ее применение к обратной задаче для системы уравнений Власова.

Л. Б. Вертгейм

Данный препринт является подробным изложением основной части работы автора [4]. В работе автора [3] изучалась задача интегральной геометрии матриц с матричным весом в плоской области вдоль регулярного семейства кривых. В настоящей статье рассмотрена аналогичная задача интегральной геометрии векторов вдоль нескольких регулярных семейств ориентированных кривых в плоской области и дано ее применение к одной обратной задаче для системы кинетических уравнений, возникающей из линеаризованной системы уравнений Власова, описывающей равновесную плазму.

Заметим, что в книге В. Г. Романова [10] изучена задача интегральной геометрии вдоль нескольких семейств кривых в полосе, инвариантных относительно сдвигов.

1. Интегральная геометрия векторов вдоль нескольких семейств кривых

Рассмотрим плоскую односвязную ограниченную область D с C^2-гладкой границей Γ, параметризованной длиной дуги следующим образом:

$$x = \xi(l)\ ,\ y = \eta(l),\ l \in [0, L]\ .$$

Определим понятие регулярного семейства ориентированных кривых в области D. Пусть γ — семейство ориентированных кривых в D такое, что уравнение кривой семейства, выходящей из точки $(x_0, y_0) \in \bar{D}$ с направляющим вектором $(\cos\theta, \sin\theta)$ имеет вид

$$x = \phi(x_0, y_0, s, \theta)\ ,\ y = \psi(x_0, y_0, s, \theta)\ ,$$

где s — параметр длины дуги вдоль кривой. При этом, если $(x_0, y_0) \in D$, то область изменения переменных s, θ описывается неравенствами

$$0 \leq \theta \leq 2\pi \ , \ -S^-(x_0, y_0, \theta) \leq s \leq S^+(x_0, y_0, \theta) \ ,$$

а если $(x_0, y_0) = (\xi(l), \eta(l)) \in \partial D$, то угол θ, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ принимает такие значения, что вектор $(\cos\theta, \sin\theta)$, отложенный от точки (x_0, y_0), направлен внутрь области; $0 \leq s \leq S^+(x_0, y_0, \theta)$.

Обозначим через G область в $\boldsymbol{R}^4$, заданную этими условиями.

Определение. Семейство кривых γ в области $\bar{D}$ называется *регулярным*, если выполнены следующие условия:

1. Через любую внутреннюю точку D в любом направлении проходит единственная кривая семейства, а для граничных точек — единственная в произвольном направлении внутрь области. Для любой упорядоченной пары точек (x_0, y_0), (x_1, y_1) замкнутой области $\bar{D}$ существует единственная кривая семейства, проходящая через них так, что точка (x_1, y_1) следует за (x_0, y_0) в направлении ориентации кривой.

Кривая семейства $\gamma(l_1, l_2)$ соединяет точки границы $(\xi(l_1), \eta(l_1))$ и $(\xi(l_2), \eta(l_2))$ так, что вторая из этих точек следует за первой в порядке ориентации кривой и при этом остальные точки кривой лежат внутри области. Длины кривых ограничены в совокупности.

2. Функции ϕ, ψ — дважды дифференцируемы в G и их производные непрерывны в $\bar{G}$ (ϕ, $\psi \in C^2(\bar{G})$).

3. Для якобиана функций ϕ, ψ по переменным s, θ справедливо неравенство

$$\frac{1}{s}\left|\frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(s, \theta)}\right| \geq C > 0 \ ,$$

для некоторой постоянной C.

Рассмотрим теперь постановку задачи интегральной геометрии векторов вдоль нескольких регулярных семейств ориентированных кривых в области D. Пусть имеется n таких семейств кривых: $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$.

Задаются n-мерные весовые вектор-функции, которые мы будем записывать в виде строк

$$p_1(x, y, l), \ldots, p_n(x, y, l), \ (x, y) \in D, \ l \in [0, L]$$

с компонентами из $C^1(\bar{\Omega})$, $\Omega = D \times [0, L]$.

Задача 1. *Определить n-мерную вектор-функцию $u(x, y)$ с компонентами из $C^2(\bar{D})$ (записанную в виде столбца) в области D по всевозможным интегралам вдоль кривых семейств*

$$I_k(l_1, l_2) = \int\limits_{(x,y)\in\gamma_k(l_1,l_2)} p_k(x, y, l_1) \cdot u(x, y)\, ds =$$

$$= \int\limits_{(x,y)\in\gamma_k(l_1,l_2)} (p_{k1}u_1 + \ldots + p_{kn}u_n)\, ds \ , \tag{1.1}$$

где $k = 1, \ldots, n$; $l_1, l_2 \in [0, L]$; $\gamma_k(l_1, l_2)$ — кривая семейства γ_k, соединяющая точки *границы* $(\xi(l_1),\eta(l_1))$ *и* $(\xi(l_2),\eta(l_2))$*;* ds *— элемент длины на ней.*

Введем в рассмотрение определенную на $\bar{\Omega}$ $n\times n$ матрицу $P(x,y,l)$, k-я строка которой есть $p_k(x,y,l)$ и вектор-функцию (столбец) $I=(I_1,\ldots,I_n)^t$, определенную на $[0,L]\times[0,L]$.

Теорема 1.1. *Пусть семейства ориентированных кривых* $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$ *регулярны, а весовые вектор-функции* $p_1,\ldots,p_n$ *удовлетворяют условиям:*

$$1.\ \det P(x,y,l)\neq 0 \quad \text{при всех } (x,y,l)\in\Omega\,,$$

$$2.\ |\tilde{p}_{ii}|+\sum_{j\neq i,j=1}^{n}\left(|\tilde{p}_{ij}|+|\tilde{p}_{ji}|\right)<\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial\theta_i}{\partial l} \quad \text{при } i=1,\ldots,n;\ (x,y,l)\in\Omega\,, \tag{1.2}$$

где матрица $\tilde{P}=\frac{\partial P}{\partial l}\cdot P^{-1}$*, а* $\theta_i=\theta_i(x,y,l)$ *— это угол, образованный осью абсцисс и касательной в точке* (x,y) *к кривой* i*-го семейства, начинающейся в граничной точке* $(\xi(l),\eta(l))$ *и проходящей через* (x,y)*. Предполагаем при этом* $\frac{\partial\theta_i}{\partial l}\in C(\bar{\Omega})$*.*

Тогда задача 1 имеет не более одного решения и справедлива оценка устойчивости

$$\iint\limits_D |u(x,y)|^2\,dxdy\leq C\int\limits_0^L\int\limits_0^L\frac{\partial I^t}{\partial l_1}\cdot\frac{\partial I}{\partial l_2}\,dl_1dl_2\,, \tag{1.3}$$

с постоянной C*, зависящей от области* D*, семейств кривых и весовых функций.*

Доказательство. Предположим вначале, что компоненты векторов p_k принадлежат $C^2(\bar{\Omega})$. Пусть $\gamma_k(x,y,l)$ — часть кривой k-го семейства, начинающейся в граничной точке $(\xi(l),\eta(l))$ и проходящей через точку (x,y), между этими точками.

Определим функцию

$$w_k(x,y,l)=\int\limits_{\gamma_k(x,y,l)}p_k(x,y,l)\cdot u(x,y)\,ds\,. \tag{1.4}$$

Введем в рассмотрение следующие области

$$\Omega'=\bar{\Omega}\setminus\{(\xi(l),\eta(l),l)\mid l\in[0,L]\},$$

$$\Omega_\varepsilon=\{(x,y,l)\in\bar{\Omega}\mid \operatorname{dist}((x,y),(\xi(l),\eta(l)))\geq\varepsilon\}\,.$$

Установим свойства гладкости функции w_k и выведем для нее кинетическое уравнение.

Лемма 1.1. *Функция* $w_k\in C^2(\bar{\Omega}_\varepsilon)$ *для любого* ε*,* $w_k\in C(\bar{\Omega})$ *и имеет равномерно ограниченные на* Ω' *производные* $w_{k,x}$*,* $w_{k,y}$*,* $w_{k,l}$*.*

Доказательство. Поскольку семейство γ_k считаем фиксированным, индекс k у γ и функций w, p указывать не будем. Пусть $S(x,y,l)$ обозначает длину кривой $\gamma(x,y,l)$. Тогда имеем

$$w(x,y,l)=\int\limits_{-S(x,y,l)}^{0}p(\tilde{x},\tilde{y},l)\cdot u(\tilde{x},\tilde{y})\,ds\,, \tag{1.5}$$

где в правой части обозначено

$$\tilde{x} = \phi(x, y, s, \theta(x, y, l))\,,\ \tilde{y} = \psi(x, y, s, \theta(x, y, l))\,.$$

(Функции ϕ, ψ задают семейство γ.)

Имеем в силу (1.5)

$$w_x(x, y, l) = S_x(x, y, l)\, p(\xi(l), \eta(l), l)\, u(\xi(l), \eta(l)) +$$

$$+ \int\limits_{-S(x,y,l)}^{0} [\, f_1(x, y, s, l) + \theta_x(x, y, l)\, f_2(x, y, s, l)\,]\, ds\,, \tag{1.6}$$

где f_1, f_2 — функции класса C^1, получающиеся соответствующим образом из функций p, u, их производных p_x, p_y, p_l, u_x, u_y, и производных ϕ_x, ϕ_θ, ψ_x, ψ_θ.

Оценим теперь S_x и θ_x. Утверждаем, что S_x ограничено в области Ω', а θ_x оценивается в Ω' следующим образом

$$|\theta_x(x, y, l)| \le \frac{C_0}{S(x, y, l)}\,.$$

В самом деле, функции $S(x, y, l)$ и $\theta(x, y, l)$ находятся из системы

$$\begin{cases} \phi(x, y, -S(x, y, l), \theta(x, y, l)) = \xi(l)\,, \\ \psi(x, y, -S(x, y, l), \theta(x, y, l)) = \eta(l)\,. \end{cases}$$

Дифференцируя, получаем следующие соотношения при соответствующих значениях аргументов:

$$\begin{cases} -\phi_s \cdot S_x + \phi_\theta \cdot \theta_x = -\phi_x\,, \\ -\psi_s \cdot S_x + \psi_\theta \cdot \theta_x = -\psi_x\,. \end{cases}$$

Отсюда имеем

$$S_x(x, y, l) = \left(\frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(s, \theta)}\right)^{-1} \begin{vmatrix} \phi_x & \phi_\theta \\ \psi_x & \psi_\theta \end{vmatrix}\,,$$

$$\theta_x(x, y, l) = -\left(\frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(s, \theta)}\right)^{-1} \begin{vmatrix} \phi_s & \phi_x \\ \psi_s & \psi_x \end{vmatrix}\,.$$

(Функции в правых частях берутся при значениях аргументов

$$(x, y, -S(x, y, l), \theta(x, y, l))\,,$$

что имеет смысл в силу $\phi, \psi \in C^2(\bar{G})$.)

Имеем

$$\phi_\theta(x, y, 0, \theta) = 0,\ \psi_\theta(x, y, 0, \theta) = 0\,.$$

В силу условия $\phi, \psi \in C^2(\bar{G})$ получаем неравенства

$$|\phi_\theta(x, y, s, \theta)| \le C_1 s\,,\ |\psi_\theta(x, y, s, \theta)| \le C_2 s\,,$$

где

$$C_1 = \max_{\bar{G}} |\phi_{s\theta}(x, y, s, \theta)|\,,$$

$$C_2 = \max_{\bar G} |\psi_{s\theta}(x,y,s,\theta)| \, .$$

Используя условие регулярности

$$|\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(s,\theta)}| \geq Cs$$

и ограниченность производных ϕ, ψ, получаем ограниченность $S_x(x,y,l)$ и неравенство

$$|\theta_x(x,y,l)| \leq \frac{C_0}{S(x,y,l)} \, .$$

В силу равенства (1.6) и условий на вес p и функцию u, получаем ограниченность w_x на Ω'. Аналогичные рассуждения проводятся для w_y и w_l.

Дифференцируя выражение для w_x и соответствующие равенства для w_y, w_l, получаем C^2-гладкость w в Ω'. Непрерывность w в замкнутой области $\bar\Omega$ очевидна.

Лемма доказана.

Выведем теперь кинетическое уравнение, которому удовлетворяет функция $w(x,y,l)$. Подставим в формулу (1.5) значение аргументов

$$(x,y,l) = (\phi(x,y,s_1,\theta(x,y,l)),\ \psi(x,y,s_1,\theta(x,y,l))\ ,\ l)\, .$$

Тогда в силу того, что интегрирование ведется вдоль одной и той же кривой семейства, проходящей через $(\xi(l),\ \eta(l))$ и (x,y), получаем

$$w(\phi(x,y,s_1,\theta(x,y,l)),\ \psi(x,y,s_1,\theta(x,y,l)),\ l) - w(x,y,l) =$$

$$= \int_0^{s_1} p(\tilde x,\tilde y,l) u(\tilde x,\tilde y)\, ds\, .$$

Дифференцируя это равенство по s_1 при $s_1 = 0$ и учитывая, что

$$\frac{\partial\phi}{\partial s}(x,y,0,\theta) = \cos\theta\ ,\ \frac{\partial\psi}{\partial s}(x,y,0,\theta) = \sin\theta\ ,$$

$$\phi(x,y,0,\theta) = x\ ,\ \psi(x,y,0,\theta) = y\ ,$$

получаем в области Ω' следующее уравнение:

$$\cos\theta(x,y,l)\, w_x(x,y,l) + \sin\theta(x,y,l)\, w_y(x,y,l) = p(x,y,l)\, u(x,y)\, . \tag{1.7}$$

Это и есть искомое кинетическое уравнение. Запишем совокупность этих уравнений для $w = w_k$, $k = 1,\ldots,n$ в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_1 w_{1,x} + \sin\theta_1 w_{1,y} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cos\theta_n w_{n,x} + \sin\theta_n w_{n,y} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{pmatrix}\, . \tag{1.8}$$

В силу равенств (1.1) и (1.4), имеем также граничные условия

$$w_k(\xi(l_2),\eta(l_2),l_1)=I_k(l_1,l_2)\,. \tag{1.9}$$

Функции u_j не зависят от l, поэтому, домножая (1.8) на P^{-1} и дифференцируя по l, получим

$$\frac{\partial}{\partial l}\left[P^{-1}\begin{pmatrix}\cos\theta_1 w_{1,x}+\sin\theta_1 w_{1,y}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \cos\theta_n w_{n,x}+\sin\theta_n w_{n,y}\end{pmatrix}\right]=0\,. \tag{1.10}$$

Используем далее следующее тождество, впервые выведенное в работах Р. Г. Мухометова [8], [9] (см. также его матричный аналог в работе [3]). Для функций $w(x,y,l)$, $\theta(x,y,l)\in C^2(\Omega)$ имеет место тождество

$$2(-\sin\theta\, w_x+\cos\theta\, w_y)\,\frac{\partial}{\partial l}(\cos\theta\, w_x+\sin\theta\, w_y)\equiv\frac{\partial\theta}{\partial l}\,(w_x^2+w_y^2)+w_{xl}\,w_y-w_{yl}\,w_x+$$

$$+\frac{\partial}{\partial l}\,[\,(-\sin\theta\, w_x+\cos\theta\, w_y)(\cos\theta\, w_x+\sin\theta\, w_y)\,]\ .$$

Используя это тождество, можно получить из (1.10) следующее соотношение

$$2(-\sin\theta_1 w_{1,x}+\cos\theta_1 w_{1,y},\ldots,-\sin\theta_n w_{n,x}+\cos\theta_n w_{n,y})\times$$

$$\times P\frac{\partial}{\partial l}\left[P^{-1}\begin{pmatrix}\cos\theta_1 w_{1,x}+\sin\theta_1 w_{1,y}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \cos\theta_n w_{n,x}+\sin\theta_n w_{n,y}\end{pmatrix}\right]=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}2(-\sin\theta_k w_{k,x}+\cos\theta_k w_{k,y})\frac{\partial}{\partial l}(\cos\theta_k w_{k,x}+\sin\theta_k w_{k,y})-$$

$$-2(-\sin\theta_1 w_{1,x}+\cos\theta_1 w_{1,y},\ldots,-\sin\theta_n w_{n,x}+\cos\theta_n w_{n,y})\times$$

$$\times P_l P^{-1}\begin{pmatrix}\cos\theta_1 w_{1,x}+\sin\theta_1 w_{1,y}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \cos\theta_n w_{n,x}+\sin\theta_n w_{n,y}\end{pmatrix}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[\,\frac{\partial\theta_k}{\partial l}\,(w_{k,x}^2+w_{k,y}^2)+w_{k,xl}w_{k,y}-w_{k,yl}w_{k,x}+\right.$$

$$\left.+\,\frac{\partial}{\partial l}[(-\sin\theta_k w_{k,x}+\cos\theta_k w_{k,y})(\cos\theta_k w_{k,x}+\sin\theta_k w_{k,y})]\right]-$$

$$-2\sum_{k,j=1}^{n}(-\sin\theta_k w_{k,x}+\cos\theta_k w_{k,y})\,\tilde{p}_{kj}\,(\cos\theta_j w_{j,x}+\sin\theta_j w_{j,y})=$$

$$= \Phi(w_x, w_y) + \frac{\partial}{\partial x} \sum_{k=1}^{n} w_{k,l} w_{k,y} - \frac{\partial}{\partial y} \sum_{k=1}^{n} w_{k,l} w_{k,x} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial l} \sum_{k=1}^{n} (-\sin\theta_k w_{k,x} + \cos\theta_k w_{k,y})(\cos\theta_k w_{k,x} + \sin\theta_k w_{k,y}) \,. \qquad (1.11)$$

Здесь введено обозначение Φ для квадратичной формы от $2n$ переменных $(w_{k,x},\ w_{k,y})$, которая имеет вид

$$\Phi(w_x, w_y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \theta_k}{\partial l} \, (w_{k,x}^2 + w_{k,y}^2) -$$

$$-2 \sum_{k,j=1}^{n} (-\sin\theta_k w_{k,x} + \cos\theta_k w_{k,y}) \, \tilde{p}_{kj} \, (\cos\theta_j w_{j,x} + \sin\theta_j w_{j,y}) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \Phi_{ij}^{xx} w_{i,x} w_{j,x} + 2 \sum_{i,j=1}^{n} \Phi_{ij}^{xy} w_{i,x} w_{j,y} + \sum_{i,j=1}^{n} \Phi_{ij}^{yy} w_{i,y} w_{j,y} \,. \qquad (1.12)$$

Нетрудно получить следующие выражения для ее коэффициентов:

$$\Phi_{ii}^{xx} = \frac{\partial \theta_i}{\partial l} + 2 \sin\theta_i \cos\theta_i \, \tilde{p}_{ii} \,,$$

$$\Phi_{ij}^{xx} = \sin\theta_i \cos\theta_j \, \tilde{p}_{ij} + \sin\theta_j \cos\theta_i \, \tilde{p}_{ji} \,, \ i \neq j \,,$$

$$\Phi_{ij}^{xy} = \sin\theta_i \sin\theta_j \, \tilde{p}_{ij} - \cos\theta_j \cos\theta_i \, \tilde{p}_{ji} \,,$$

$$\Phi_{ii}^{yy} = \frac{\partial \theta_i}{\partial l} - 2 \sin\theta_i \cos\theta_i \, \tilde{p}_{ii} \,,$$

$$\Phi_{ij}^{yy} = -\cos\theta_i \sin\theta_j \, \tilde{p}_{ij} - \cos\theta_j \sin\theta_i \, \tilde{p}_{ji} \,, \ i \neq j \,.$$

Докажем строгую положительную определенность формы Φ. Воспользуемся теоремой Гершгорина о локализации спектра матрицы (см. [7], с. 26): все собственные числа произвольной матрицы $B = \|b_{ij}\|$ лежат в объединении кругов $\{\lambda \in C \mid |\lambda - b_{ii}| < \sum\limits_{j \neq i} |b_{ij}|\}$ по всем диагональным элементам b_{ii}.

Необходимо, таким образом, доказать оценки:

$$\Phi_{ii}^{xx} > \sum_{j \neq i, j=1}^{n} |\Phi_{ij}^{xx}| + \sum_{j=1}^{n} |\Phi_{ij}^{xy}| \,,$$

$$\Phi_{ii}^{yy} > \sum_{j \neq i, j=1}^{n} |\Phi_{ij}^{yy}| + \sum_{j=1}^{n} |\Phi_{ij}^{xy}| \,.$$

Для доказательства первой из них, напишем

$$2|\sin\theta_i \cos\theta_i||\tilde{p}_{ii}| + \sum_{j \neq i, j=1}^{n} |\Phi_{ij}^{xx}| + \sum_{j=1}^{n} |\Phi_{ij}^{xy}| \leq$$

$$\leq (2|\sin\theta_i \cos\theta_i| + |\sin^2\theta_i - \cos^2\theta_i|)|\tilde{p}_{ii}| + \sum_{j \neq i, j=1}^{n} (|\sin\theta_i \cos\theta_j||\tilde{p}_{ij}| +$$

$$+|\sin\theta_j\cos\theta_i||\tilde p_{ji}|)+\sum_{j\neq i,j=1}^{n}(|\sin\theta_i\sin\theta_j||\tilde p_{ij}|+|\cos\theta_j\cos\theta_i||\tilde p_{ji}|)=$$

$$=(|\sin 2\theta_i|+|\cos 2\theta_i|)|\tilde p_{ii}|+\sum_{j\neq i,j=1}^{n}[|\sin\theta_i|(|\cos\theta_j|+|\sin\theta_j|)|\tilde p_{ij}|+$$

$$+|\cos\theta_i|(|\sin\theta_j|+|\cos\theta_j|)|\tilde p_{ji}|]\leq\sqrt{2}(|\tilde p_{ii}|+\sum_{j\neq i,j=1}^{n}(|\tilde p_{ij}|+|\tilde p_{ji}|))<\frac{\partial\theta_i}{\partial l}$$

по условию теоремы и в силу элементарной оценки $|\cos\theta|+|\sin\theta|\leq\sqrt{2}$.

Используя непрерывность весовых функций, а также функций $\frac{\partial\theta_i}{\partial l}$, компактность $\bar\Omega$ и теорему Вейерштрасса, получаем, что спектр квадратичной формы Φ, коэффициенты которой зависят от $(x,y,l)\in\bar\Omega$, равномерно на $\bar\Omega$ отграничен от 0. Поэтому для некоторой константы $C'>0$, имеем

$$\Phi(w_x,w_y)\geq C'\sum_{k=1}^{n}(w_{k,x}^2+w_{k,y}^2)\,. \tag{1.13}$$

(C' не зависит от точки $(x,y,l)\in\bar\Omega$.)

Пусть теперь функции w_k определяются равенством (1.4). Они удовлетворяют, как мы знаем, уравнению (1.10) и краевым условиям (1.9). Применив неравенство Коши — Буняковского, получим

$$\sum_{k=1}^{n}(w_{k,x}^2+w_{k,y}^2)\geq\sum_{k=1}^{n}(\cos\theta_k w_{k,x}+\sin\theta_k w_{k,y})^2=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(p_k(x,y,l)\cdot u(x,y))^2\geq C''\sum_{k=1}^{n}u_k^2(x,y)=C''\,|u(x,y)|^2 \tag{1.14}$$

для некоторой постоянной C'', поскольку матрица $P(x,y,l)$ невырождена и $P^{-1}(x,y,l)$ непрерывно зависит от точки (x,y,l). В качестве C'' можно взять обратную величину к максимуму по Ω L^2-нормы линейных операторов $P^{-1}(x,y,l)$: $\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^n$.

Применяем тождество (1.11) к функциям w_k, определенным в (1.4) и используем неравенства (1.13) и (1.14). Проинтегрируем полученное неравенство по области Ω_ε и используем формулу Гаусса — Остроградского. Получаем

$$C'C''\int\limits_{\Omega_\varepsilon}|u(x,y)|^2\,dxdydl\leq\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\Bigg[-\frac{\partial}{\partial x}\sum_{k=1}^{n}w_{k,l}w_{k,y}+\frac{\partial}{\partial y}\sum_{k=1}^{n}w_{k,l}w_{k,x}-$$

$$-\frac{\partial}{\partial l}\sum_{k=1}^{n}(-\sin\theta_k w_{k,x}+\cos\theta_k w_{k,y})(\cos\theta_k w_{k,x}+\sin\theta_k w_{k,y})\Bigg]\,dxdydl=$$

$$=\int\limits_{\partial\Omega_\varepsilon}\Bigg[\sum_{k=1}^{n}w_{k,l}(-\bar n_1(x,y,l)w_{k,y}+\bar n_2(x,y,l)w_{k,x})-$$

$$-\bar n_3(x,y,l)\sum_{k=1}^{n}(-\sin\theta_k w_{k,x}+\cos\theta_k w_{k,y})(\cos\theta_k w_{k,x}+\sin\theta_k w_{k,y})\Bigg]\,dS\,. \tag{1.15}$$

Здесь $\bar{n}(x,y,l)$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega_\varepsilon$.

Разобьем границу области $\partial\Omega_\varepsilon$ на три компоненты

$$\partial\Omega_\varepsilon = \Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_2^\varepsilon \cup \Gamma_3^\varepsilon,$$

где

$$\Gamma_1^\varepsilon = \{(x,y,l) \in \partial\Omega_\varepsilon \mid \operatorname{dist}((x,y),(\xi(l),\eta(l))) = \varepsilon\},$$
$$\Gamma_2^\varepsilon = \{(x,y,l) \mid (x,y) \in \bar{D}, l = 0 \text{ } или \text{ } l = L\},$$
$$\Gamma_3^\varepsilon \text{ — остальная часть } \partial\Omega_\varepsilon.$$

Тогда при $\varepsilon \to 0$ интеграл в (1.15) по Γ_1^ε стремится к нулю в силу ограниченности W_x, W_y, W_l, а интеграл по Γ_2^ε равен нулю в силу того, что $\bar{n}(x,y,0) = -\bar{n}(x,y,L)$, а все остальные функции совпадают при $l=0$ и $l=L$.

Итак, поскольку производные w_k ограниченные, в неравенстве (1.15) возможен переход к пределу при $\varepsilon \to 0$, в результате которого получим

$$C'C''\int\limits_\Omega |u(x,y)|^2\,dxdydl = LC'C''\iint\limits_D |u(x,y)|^2\,dxdy \le$$

$$\le \int\limits_0^L\int\limits_0^L \sum_{k=1}^n w_{k,l}(-n_1(l_2)w_{k,y} + n_2(l_2)w_{k,x})|_{(x,y,l)=(\xi(l_2),\eta(l_2),l_1)}\,dl_1dl_2\,. \tag{1.16}$$

Здесь $(n_1(l_2), n_2(l_2))$ — единичный вектор внешней нормали к D в точке $(\xi(l_2),\eta(l_2))$. Учитывая, что $(n_2(l_2), -n_1(l_2))$ — единичный касательный вектор к $\Gamma = \partial D$ в этой точке, направленный против ее ориентации и используя краевое условие (1.9), получим

$$-n_1(l_2)w_{k,y}(\xi(l_2),\eta(l_2),l_2) + n_2(l_2)w_{k,x}(\xi(l_2),\eta(l_2),l_1) =$$
$$= -\frac{d\eta}{dl_2}w_{k,y}(\xi(l_2),\eta(l_2),l_1) - \frac{d\xi}{dl_2}w_{k,x}(\xi(l_2),\eta(l_2),l_1) = -\frac{\partial}{\partial l_2}I_k(l_1,l_2)\,.$$

Поскольку $w_{k,l}(\xi(l_2),\eta(l_2),l_1) = \frac{\partial}{\partial l_1}I_k(l_1,l_2)$, получаем, продолжая (1.16),

$$LC'C''\iint\limits_D |u(x,y)|^2\,dxdy \le -\int\limits_0^L\int\limits_0^L \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial l_1}I_k^t(l_1,l_2)\cdot\frac{\partial}{\partial l_2}I_k(l_1,l_2)\,dl_1dl_2\,. \tag{1.17}$$

Поэтому окончательно находим

$$\iint\limits_D |u(x,y)|^2\,dxdy \le C\int\limits_0^L\int\limits_0^L \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial l_1}I_k^t(l_1,l_2)\cdot\frac{\partial}{\partial l_2}I_k(l_1,l_2)\,dl_1dl_2$$

с постоянной $C = -(LC'C'')^{-1}$.

Отрицательный знак постоянной C связан с отрицательностью двойного интеграла в правой части полученного неравенства. Таким образом, получена оценка устойчивости и утверждение о единственности в рассматриваемой задаче.

Пусть теперь весовые вектор-функции $p_k(x,y,l) \in C^1(\bar{\Omega})$. Тогда их можно сколь угодно точно приблизить по норме пространства $C^1(\bar{\Omega})$ вектор-функциями $p_k^{(s)} \in C^2(\bar{\Omega})$. Рассмотрим соответствующие $I_k^{(s)}$ и $w_k^{(s)}$, определенные в (1.1) и (1.4). Для них получаем неравенство (1.17), в котором постоянные C'_s, C''_s определяются весами $p_k^{(s)}$ и их первыми производными. Поэтому при переходе к пределу при $s \to \infty$ получаем неравенство (1.17), в котором постоянные C', C'' определяются весами p_k и их первыми производными по изложенной выше схеме. Теорема полностью доказана.

2. Обратная задача для системы уравнений Власова

Для описания плазмы в течение малого промежутка времени или процессов в бесстолкновительной плазме широко используется система уравнений Власова ([1], [2], [6]), имеющая в равновесном (стационарном или квазистационарном) случае следующий вид:

$$\begin{cases} v\frac{\partial F_e}{\partial x} - \frac{e}{m_e}(E + \frac{v}{c} \times B)\frac{\partial F_e}{\partial v} = 0\,, \\ v\frac{\partial F_i}{\partial x} + \frac{ze}{m_i}(E + \frac{v}{c} \times B)\frac{\partial F_i}{\partial v} = 0\,, \end{cases} \tag{2.1}$$

$$\mathrm{rot}E = 0, \quad \mathrm{div}(\varepsilon E) = 4\pi\rho,$$

$$\mathrm{rot}(\frac{1}{\mu}B) = \frac{4\pi}{c}J, \quad \mathrm{div}B = 0,$$

$$\rho = e\int(zF_i - F_e)\,dv\,,\; J = e\int(zF_i - F_e)v\,dv\,.$$

Здесь $F_e(x,v)$, $F_i(x,v)$ — функции распределения электронов и ионов по координатам и скоростям $x, v \in \mathbf{R}^3$; ρ, J — плотность заряда и тока; E — напряженность электрического поля; B —магнитная индукция; ε и μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости среды; e, m_e и ze, m_i — заряды и массы электрона и ионов. В ряде случаев целесообразно отдельно изучать подсистему (2.1) системы уравнений Власова, состоящую из первых двух кинетических уравнений. Например, если параметры среды ε и μ — неизвестны. Рассмотрим следующую обратную задачу для системы (2.1).

Задача 2. *Определить векторы $E(x)$ и $B(x)$ в односвязной ограниченной области $D_0 \subset \boldsymbol{R}^3$, зная $F_e(x,v)$, $F_i(x,v)$ для $x \in \partial D_0$, $v \in \mathbf{R}^3$ (т. е. распределение частиц на границе области).*

Эта задача является нелинейной. Рассмотрим ее линеаризацию, считая известными некоторые функции распределения F_e^0, F_i^0 и поля E^0, B^0, удовлетворяющие системе (2.1). Предположим, что

$$F_e^1 = F_e - F_e^0,\; F_i^1 = F_i - F_i^0,\; E^1 = E - E^0,\; B^1 = B - B^0$$

— малы по сравнению с F_e^0, F_i^0, E^0, B^0 соответственно. Тогда линеаризованная система из первых двух уравнений (2.1) примет следующий вид:

$$\begin{cases} v\frac{\partial F_e^1}{\partial x} - \frac{e}{m_e}(E^0 + \frac{v}{c} \times B^0)\frac{\partial F_e^1}{\partial v} = \frac{e}{m_e}(E^1 + \frac{v}{c} \times B^1)\frac{\partial F_e^0}{\partial v}\,, \\ v\frac{\partial F_i^1}{\partial x} + \frac{ze}{m_i}(E^0 + \frac{v}{c} \times B^0)\frac{\partial F_i^1}{\partial v} = -\frac{ze}{m_i}(E^1 + \frac{v}{c} \times B^1)\frac{\partial F_i^0}{\partial v}\,. \end{cases} \tag{2.2}$$

Обратную задачу для этой системы сформулируем аналогичным задаче 2 способом.

Задача 3. *Восстановить векторы $E^1(x)$ и $B^1(x)$ в области D_0, зная $F_e^1(x,v)$, $F_i^1(x,v)$ для $x \in \partial D_0$, $v \in \mathbf{R}^3$.*

Составим для системы (2.2) уравнения характеристик

$$\begin{cases} \frac{dx_e}{dt} = v_e, \ \frac{dv_e}{dt} = -\frac{e}{m_e}(E^0(x_e) + \frac{v_e}{c} \times B^0(x_e)) \,, \\ x_e(0) = x^0, \ v_e(0) = v^0, \qquad\qquad 0 \le t \le T_e = T_e(x^0, \ v^0) \,; \end{cases} \tag{2.3}$$

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = v_i, \ \frac{dv_i}{dt} = \frac{ze}{m_i}(E^0(x_i) + \frac{v_i}{c} \times B^0(x_i)) \,, \\ x_i(0) = x^0, \ v_i(0) = v^0, \qquad\qquad 0 \le t \le T_i = T_i(x^0, \ v^0) \,, \end{cases} \tag{2.4}$$

где $x^0 \in \partial D_0$, v^0 направлено внутрь D_0, $x_e(t)$, $x_i(t) \in D_0$.

Физически уравнения (2.3) и (2.4) описывают траектории электронов и ионов в электромагнитном поле E^0, B^0, влетающих в область D_0 в точке $x^0 \in \partial D_0$ со скоростью v^0.

Интегрируя уравнения (2.2) вдоль характеристик, мы получим, что в силу данных задачи 3 известны следующие интегралы

$$I_e(x^0, v^0) = \int_0^{T_e} (E^1(x_e(t)) + \frac{v_e(t)}{c} \times B^1(x_e(t))) \cdot \frac{\partial F_e^0}{\partial v}(x_e(t), v_e(t)) \, dt \,, \tag{2.5}$$

$$I_i(x^0, v^0) = \int_0^{T_i} (E^1(x_i(t)) + \frac{v_i(t)}{c} \times B^1(x_i(t))) \cdot \frac{\partial F_i^0}{\partial v}(x_i(t), v_i(t)) \, dt \,. \tag{2.6}$$

Таким образом, задача 3 приводит к задаче интегральной геометрии с весом для векторов E^1, B^1 вдоль некоторого семейства кривых.

Рассмотрим частный случай рассматриваемой задачи, при котором для некоторой плоскости Π все траектории (2.3), (2.4) с v^0 параллельной Π также лежат в плоскостях, параллельных Π. Эта ситуация имеет место, когда векторы B^0 перпендикулярны, а векторы E^0 параллельны плоскости Π. В каждой плоскости, параллельной Π, мы будем иметь задачу интегральной геометрии для E^1, B^1 вдоль некоторых плоских семейств кривых. Ограничимся рассмотрением некоторой конкретной плоской области D, являющейся пересечением D_0 с некоторой плоскостью, параллельной Π. Заметим, что в целом семейство траекторий электронов (или ионов) является трехпараметрическим и оказывается, что можно ограничиться несколькими двухпараметрическими подсемействами траекторий.

Рассмотрим для этого семейство траекторий электронов (или ионов), влетающих в область D с фиксированной энергией $\mathcal{E}$. Оказывается, что справедлива

Лемма 2.1. *При всех достаточно больших $\mathcal{E} > \mathcal{E}_0$ семейство траекторий (2.3) (или (2.4)), где $x^0 \in \partial D$, v^0 параллельно Π и направлено внутрь D, $\frac{m|v^0|^2}{2} = \mathcal{E}$, является регулярным семейством ориентированных кривых.*

Доказательство в силу его значительного объема здесь не приводится; см. диссертацию автора [5].

Далее для упрощения изложения рассмотрим вариант задачи 3, при котором вектор-функция $B^1(x)$ является известной, а восстановить требуется $E^1(x)$ в области D_0.

Рассмотрим три уровня энергии $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3 > \mathcal{E}_0$, такие, что семейства траекторий электронов (2.3) является регулярным. Тогда получаем задачу интегральной геометрии, рассмотренную в первой части, относительно неизвестной 3-мерной вектор-функции $E^1(x)$ вдоль трех семейств кривых с весовыми функциями

$$p^{\alpha}(x,l) = \frac{1}{|v_e^{\alpha}(x,l)|}\frac{\partial F_e^0}{\partial v}(x, v_e^{\alpha}(x,l))\,, \tag{2.7}$$

где $\alpha = 1,2,3$; $v_e^{\alpha}(x,l)$ — скорость в точке x электрона, влетевшего в область D в точке $(\xi(l), \eta(l))$ с энергией $\mathcal{E}_{\alpha}$. (Заметим, что x во всей второй части препринта обозначает радиус-вектор точек.) Это выражение получается из (2.5) заменой переменной интегрирования вдоль траектории на параметр длины дуги. Используя теорему 1.1, можно получить следующее утверждение:

Теорема 2.1. *Пусть энергии $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$ таковы, что соответствующие семейства траекторий электронов регулярны. Если функции распределения F_e^0, F_i^0 и поля E^0, B^0 таковы, что построенная по весовым вектор-функциям из* (2.7) 3×3 *матрица $P(x,l)$ удовлетворяет условиям* 1 *и* 2 *теоремы* 1.1, *то обратная задача восстановления $E^1(x)$ в D_0 имеет не более одного решения и справедлива оценка устойчивости в L_2-норме.*

Автор благодарен Ю. Е. Аниконову за постановку задачи и внимание к работе.

Литература

1. *Аниконов Ю.Е., Пестов Л.Н.* Формулы в линейных и нелинейных задачах томографии. Новосибирск: изд-во НГУ, 1990.

2. *Балеску Р.* Статистическая механика заряженных частиц. М.: Мир, 1967.

3. *Вертгейм Л.Б.* Интегральная геометрия с матричным весом и одна нелинейная задача восстановления матриц // Докл. АН СССР. 1991. Т. 319, N 3. С. 531–534.

4. *Вертгейм Л.Б.* Обратная задача для системы кинетических уравнений, возникающей из уравнений Власова равновесной плазмы // Докл. РАН. 1992. Т. 324, N 1. С. 87–90.

5. *Вертгейм Л.Б.* Интегральная геометрия симметричных тензорных полей в комплексном пространстве и интегральная геометрия матриц: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1999. 123 с.

6. *Кролл Н., Трайвелпис А.* Основы физики плазмы. М.: Мир, 1975.

7. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977.

8. *Мухометов Р.Г.* Задача восстановления двумерной римановой метрики и интегральная геометрия // Докл. АН СССР. 1977. Т. 232, N 1. С. 32–35.

9. *Мухометов Р.Г.* О задаче интегральной геометрии// Математические проблемы геофизики. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1975. Вып. 6, ч. 2. С. 212–242.

10. *Романов В.Г.* Обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск: изд-во НГУ, 1973.

Вертгейм Лев Борисович

Задача интегральной геометрии вдоль нескольких семейств кривых и ее применение к обратной задаче для системы уравнений Власова

Препринт N 66

Подписано в печать 7.12.99. *Формат* 60×84 1/8. *Печать офсетная.*
Усл. печ. л. 2,1. Уч.-изд. л. 0,6. Тираж 100 экз. Заказ N 72.

Лицензия ЛР N 065614 от 8 января 1998 г.
Издательство ИМ СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия.

Лицензия ПЛД N 57-43 от 22 апреля 1998 г.
Отпечатано на полиграфическом участке ИМ СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия.