УДК 519.172.5+519.854.2 Дата поступления 18 апреля 2000 г.

Пяткин А. В.
NP-полнота двухуровневой задачи о назначениях. — Новосибирск, 2000. — 11 с. — (Препринт / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 71).

Рассматривается двухуровневый вариант задачи о назначениях, когда верхний уровень осуществляет выбор подматрицы, а нижний ищет оптимальное назначение. При этом целевые функции верхнего и нижнего уровней считаются противоположными. Доказывается, что эта задача NP-полна даже для (0,1)-матриц с двумя единицами в каждом столбце.

Библиогр. 2.

Ключевые слова и фразы: задача о назначениях, двухуровневое программирование, двудольные графы, паросочетания.

Адрес автора: Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, пр. Академика Коптюга, 4. 630090 Новосибирск, Россия; e-mail: orlab@math.nsc.ru (Subject: for Pyatkin).

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН Препринт № 71, апрель 2000

NP-полнота двухуровневой задачи о назначениях [1]

А. В. Пяткин

1 Постановка задачи

Пусть A' — квадратная (0,1)-матрица, т. е. матрица, состоящая из нулей и единиц, порядка n. Множество T, содержащее n элементов из A', называется *назначением*, если в каждой строке и в каждом столбце матрицы A' находится по одному элементу из T. Назначение A' называется *оптимальным*, если сумма элементов из T максимальна среди всех назначений в A'.

Обычная (одноуровневая) невзвешенная задача о назначениях заключается в следующем. Пусть A — произвольная (0,1)-матрица с n строками и m столбцами, причем $m \geq n$. Среди всех квадратных подматриц порядка n матрицы A требуется выбрать такую, в которой сумма элементов оптимального назначения является максимально возможной, и найти это оптимальное назначение. Если для n-элементного множества I через $S_n(I)$ обозначить группу всех его перестановок (т. е. взаимно однозначных отображений $\pi : \{1, \ldots, n\} \longrightarrow I$), то эту задачу можно записать в таком виде:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i\pi(i)} \longrightarrow \max_{|I|=n,\ \pi \in S_n(I)} . \tag{1}$$

По сути при поиске максимума в задаче (1) требуется принять два решения: выбрать квадратную подматрицу порядка n матрицы A и найти в ней оптимальное назначение. Так как оба эти решения принимаются на одном уровне, т. е. одним и тем же лицом, то задачу (1) мы называем *одноуровневой* задачей о назначениях.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 99-01-00482 и 99-01-00581) и гранта Сибирского отделения РАН.

Для того чтобы перейти к двухуровневой задаче о назначениях, предположим, что выбор подматрицы и поиск в ней оптимального назначения осуществляются на разных уровнях (разными лицами). В задачах двухуровневого программирования тот уровень, который принимает решение первым, обычно называют *верхним* уровнем, а другой *нижним*. В нашем случае верхний уровень выбирает $n \times n$ подматрицу матрицы A, а нижний уровень ищет в ней оптимальное назначение.

Если интересы верхнего и нижнего уровней совпадают, то имеем задачу

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i\pi(i)} \longrightarrow \max_{|I|=n}, \tag{2}$$

где перестановка π выбирается такой, что

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i\pi(i)} \longrightarrow \max_{\pi \in S_n(I)}, \tag{3}$$

которая полностью эквивалентна задаче (1).

Принципиально иная задача получается, если интересы верхнего и нижнего уровней противоположны. Такая задача имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i\pi(i)} \longrightarrow \min_{|I|=n}, \tag{4}$$

где перестановка π выбирается такой, что

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i\pi(i)} \longrightarrow \max_{\pi \in S_n(I)}. \tag{5}$$

В дальнейшем будем называть ее *двухуровневой задачей о назначениях.*

Известно, что задача (1) является полиномиально разрешимой [?]. Цель данной статьи состоит в доказательстве того, что задача (4)-(5) является NP-трудной.

По матрице A построим двудольный граф $H = (V, U; E)$, поставив в соответствие i-й строке вершину $v_i \in V$, j-му столбцу вершину $u_j \in U$ и соединив v_i и u_j ребром тогда и только тогда, когда $a_{ij} = 1$. Тогда задача (1) эквивалентна задаче поиска наибольшего паросочетания в двудольном графе H. Задача (4)-(5) также может быть сформулирована в терминах графа H. А именно требуется найти такое n-вершинное подмножество $U' \subset U$, что наибольшее паросочетание в индуцированном подграфе $H' = H(V, U')$ имеет минимальную мощность. В дальнейшем мы будем исследовать именно эту интерпретацию двухуровневой задачи о назначениях.

Будем использовать следующие обозначения. Для произвольного графа $G = (V, E)$ через $p(G)$ обозначим мощность наибольшего паросочетания в G, а через $t(G)$ — число ациклических компонент связности в G. *Подразбиением ребра* будем называть размещение на нем дополнительной вершины, т. е. замену ребра на путь длины 2, а *подразбиением графа* G — подразбиение всех его ребер. Получающийся таким образом двудольный граф обозначим через H_G. Формально $V(H_G) = V(G)$, $U(H_G) = E(G)$ и каждому ребру $e = xy$ графа G соответствуют ребра xe и ye графа H_G. Очевидно, что операция подразбиения графа может быть осуществлена за полиномиальное время. Она сохраняет компоненты связности, число циклов в каждой компоненте и степени вершин из V. Ясно, что все вершины из U имеют степень 2.

2 Доказательство NP-полноты

Для доказательства NP-полноты задачи сформулируем ее в виде задачи распознавания. Такая формулировка двухуровневой задачи о назначении приводится ниже.

Задача 2-ЗОН. Дан двудольный граф $H = (V, U; E)$, где $|V| = n$, $|U| = m$, причем $n \leq m$, и положительное число $k \leq n$.

ВОПРОС: Существует ли такое подмножество $U' \subset U$ мощности n, что для индуцированного подграфа $H' = H(V, U')$ выполняется условие $p(H') \leq n - k$?

Доказательство NP-полноты этой задачи будем проводить в два этапа. Сначала сформулируем вспомогательную задачу П и докажем, что она полиномиально сводится к задаче 2-ЗОН. Затем докажем NP-полноту задачи П.

Задача П. Дан граф $G = (V, E)$ с n вершинами и $m \geq n$ ребрами и положительное число $k \leq n$.

ВОПРОС: Существует ли такое подмножество ребер $E' \subset E$ мощности n, что для графа $G' = (V, E')$ выполняется условие $t(G') \geq k$?

Теорема 1. *Задача* П *полиномиально сводится к задаче* 2-ЗОН.

Доказательство. Пусть $G = (V, E)$ — граф из некоторой индивидуальной задачи П. Рассмотрим двудольный граф $H = H_G$ и решим для него задачу 2-ЗОН. По построению графа H_G выбору m вершин из доли U взаимно однозначно соответствует выбор m ребер графа G. Следовательно, имеем взаимно однозначное соответствие между индуцированными подграфами H' задачи 2-ЗОН и графами G' задачи П. Следующая лемма завершает доказательство теоремы 1.

Лемма 1. *Для любого выбора U' (и соответственно E') выполняется равенство $p(H') + t(G') = n$.*

Доказательство. Пусть $t(G') = k$. Перенумеруем компоненты связности графа G' так, чтобы первыми были k деревьев. Компоненты связности обозначим через $G_1, G_2, \ldots, G_k, G_{k+1}, \ldots, G_l$, а число вершин в них — через $n_1, \ldots, n_l$. Очевидно, что

$$\sum_{i=1}^{l} n_i = n.$$

Соответствующие компоненты связности графа H' обозначим через $H_1, \ldots, H_l$. Вычислим мощность наибольшего паросочетания в H'. Для этого докажем следующие два утверждения.

1) Если $i \leq k$, то $p(H_i) = n_i - 1$. Действительно, так как G_i — дерево, то $|U(H_i)| = |E(G_i)| = n_i - 1$ и, значит, $p(H_i) \leq n_i - 1$. Построение паросочетания мощности $n_i - 1$ производится с помощью процедуры удаления висячих вершин дерева G_i. Для висячей вершины x, инцидентной некоторому единственному ребру e, добавим в паросочетание графа H_i ребро xe и удалим из G_i вершину x и ребро e. Осуществляя эту операцию до тех пор, пока в G_i не останется ребер, получим в H_i паросочетание мощности $n_i - 1$.

2) Если $i > k$, то $p(H_i) = n_i$. Действительно, с одной стороны, $|V(H_i)| = |V(G_i)| = n_i$ и, значит, $p(H_i) \leq n_i$. С другой стороны, так как компонента G_i не является деревом, то в ней имеется не менее n_i

ребер и по меньшей мере один цикл. Если число ребер в G_i больше n_i, то в G_i найдем цикл и удалим произвольное ребро этого цикла. Очевидно, что это не нарушит связности графа G_i. Эту операцию будем производить до тех пор, пока число ребер в G_i не станет равным n_i, т. е. числу вершин. Такие графы называются *унициклическими.* Их структура такова: они состоят из единственного цикла C, к которому "приклеены" всевозможные деревья. Вершины цикла назовем *внутренними,* а остальные вершины — *внешними.* Проведем индукцию по числу внешних вершин. Если таких вершин нет, то G_i представляет собой цикл с n_i вершинами, а значит, H_i является циклом с $2n_i$ вершинами и $p(H_i) = n_i$. Предположим, что для унициклических графов не более чем с r внешними вершинами утверждение доказано, и пусть G_i содержит $r+1$ внешних вершин. Найдем висячую внешнюю вершину x и обозначим инцидентное ей ребро через e. Удалив из G_i вершину x и ребро e, получим унициклический граф G_i' с $n_i - 1$ вершинами, из которых r вершин будут внешними. По индукции в графе H_i' существует паросочетание M мощности $n_i - 1$. Но тогда $M \cup \{xe\}$ образует искомое паросочетание мощности n_i в H_i.

Поэтому имеем:

$$t(G') + p(H') = k + \sum_{i=1}^{l} p(H_i) = k + \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) + \sum_{i=k+1}^{l} n_i = k + n - k = n.$$

Лемма 1 доказана.

Теперь докажем NP-полноту задачи П. Для этого воспользуемся известной NP-полной задачей КЛИКА [?].

Задача КЛИКА. Дан n-вершинный граф $G = (V, E)$ и целое положительное число $k \le n$.

ВОПРОС: Существует ли в G k-вершинная клика (полный подграф)?

Нам потребуется подзадача этой задачи, получающаяся из нее введением дополнительного ограничения на k :

Задача КЛИКА-1. Дан n-вершинный граф $G = (V, E)$ и целое число k такое, что $n/2 \le k \le n$.

ВОПРОС: Существует ли в G k-вершинная клика?

Лемма 2. *Подзадача* КЛИКА-1 *является* NP-*полной.*

Доказательство. Докажем сведение КЛИКА $\longrightarrow$ КЛИКА-1. Рассмотрим n-вершинный граф $G = (V, E)$ и положительное число $k \leq n$ из некоторой индивидуальной задачи КЛИКА. Построим вспомогательный граф G_1, добавив к графу G еще n смежных друг с другом вершин и соединив каждую из них со всеми вершинами из V. Пусть κ — плотность (размер максимальной клики) графа G. Очевидно, что граф G_1 имеет $n_1 = 2n$ вершин, а его плотность есть $\kappa_1 = \kappa + n$. Положим $k_1 = k + n \geq n_1/2$ и применим к графу G_1 процедуру решения подзадачи КЛИКА-1. Имеем

$$\kappa_1 \geq k_1 \Leftrightarrow \kappa + n \geq k + n \Leftrightarrow \kappa \geq k.$$

Таким образом, задача КЛИКА сводится к подзадаче КЛИКА-1. Лемма 2 доказана.

Для доказательства NP-полноты задачи Π нам потребуется следующая

Лемма 3. *Пусть $G = (V, E)$ — n-вершинный граф с m ребрами, а $k \geq 4$. Тогда в G есть клика размера k тогда и только тогда, когда существует такое подмножество ребер $E' \subset E$ мощности $(k^2 - k)/2$, что для графа $G' = (V, E')$ выполняется условие $t(G') = n - k$.*

Доказательство. Если в графе G есть клика размера k, то ее ребра образуют искомое множество E'.

Пусть E' — такое подмножество из $(k^2 - k)/2$ ребер, что в графе $G' = (V, E')$ ровно $n - k$ компонент являются деревьями. Суммарное число вершин этого леса обозначим через $n - k + l$, где l — число его ребер. Очевидно, что $0 \leq l \leq k$. Тогда граф с остальными $k - l$ вершинами имеет $(k^2 - k - 2l)/2$ ребер. Отсюда следует, что

$$\frac{(k-l)^2 - (k-l)}{2} \geq \frac{k^2 - k - 2l}{2},$$

т. е. $l^2 \geq 2kl - 3l$, и если $l > 0$, то $l \geq 2k - 3$. Отсюда и из условия $l \leq k$ следует, что $k \leq 3$, что противоречит условию $k \geq 4$. Значит,

$l = 0$ и все деревья суть изолированные вершины. Но тогда граф с остальными k вершинами содержит $(k^2 - k)/2$ ребер, т. е. является кликой размера k. Лемма 3 доказана.

Теперь перейдем к доказательству NP-полноты задачи П.

Теорема 2. *Задача* П *является* NP*-полной.*

Доказательство. Предположим, что существует полиномиальный алгоритм решения задачи П. Покажем, что тогда задачу КЛИКА-1 можно решить за полиномиальное время.

Рассмотрим индивидуальную задачу КЛИКА-1, т. е. n-вершинный граф $G = (V, E)$ и целое число $k \geq n/2$. Положим

$$a = \frac{k^2 - k}{2} - n.$$

Легко проверить, что $a \geq 0$ и $k \geq 4$ при $n \geq 10$. Рассмотрим граф $G_a = (V_a, E)$, получающийся добавлением к графу G еще a изолированных вершин. Имеем

$$|V_a| = n_a = \frac{k^2 - k}{2}.$$

Положим $k_a = n_a - k$ и применим к G_a алгоритм решения задачи П, т. е. за полиномиальное время определим, существует ли в графе G_a такое подмножество ребер мощности n_a, что k_a компонент связности в соответствующем графе являются деревьями. Но по лемме 3 ответ на этот вопрос положителен тогда и только тогда, когда в графе G_a существует клика размера k. Так как добавление изолированных вершин не увеличивает плотности графа, то мы определили, есть ли клика размера k в графе G, т. е. решили задачу КЛИКА-1. Значит, по лемме 2 задача П является NP-полной. Теорема 2 доказана.

Заметим, что при доказательстве теоремы 1 мы сводили задачу П к частному случаю задачи 2-ЗОН, когда все вершины большей доли двудольного графа H имеют степень 2. Эти графы соответствуют матрицам с двумя единицами в каждом столбце. Поэтому задача (3) остается NP-трудной даже для (0,1)-матриц с двумя единицами в каждом столбце.

Автор выражает благодарность А. В. Косточке за существенное упрощение доказательства и А. А. Агееву за ценные замечания.

Литература

[1] Гэри М., Джонсон Д. *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи.* М.: Мир, 1982.

[2] Кристофидес Н. *Теория графов: алгоритмический подход.* М.: Мир, 1978.

Пяткин Артем Валерьевич

NP-полнота двухуровневой задачи о назначениях

Препринт № 71

Подписано в печать 18.04.2000. Формат 60×84 1/8. Печать офсетная.
Усл.печ. л. 1,6. Уч.-изд. л. 0,5. Тираж 100 экз. Заказ № 24.

Лицензия ЛР № 065614 от 8 января 1998 г.
Издательство Института математики,
630090 Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4.

Лицензия ПЛД № 57-43 от 22 апреля 1998 г.
Отпечатано на полиграфическом участке ИМ СО РАН.
630090 Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4.