Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН Препринт № 72, май 2000

# Разложения фундаментальных групп замкнутых поверхностей в свободные конструкции

О. В. Богопольский

## Введение

Пусть $\Sigma$ – связная поверхность с базисной точкой $x$. Компактная подповерхность $S$ поверхности $\Sigma$ называется *несжимаемой*, если ни одна компонента замыкания $\Sigma - S$ не является 2-диском с границей, содержащейся в $\partial S$. Если $S$ несжимаема и $x \in S$, то естественный гомоморфизм $\pi_1(S, x) \to \pi_1(\Sigma, x)$ инъективен. Поэтому мы отождествляем группу $\pi_1(S, x)$ с ее образом в $\pi_1(\Sigma, x)$. Пусть $H$ – подгруппа группы $\pi_1(\Sigma, x)$. Мы говорим, что $H$ *реализуется* несжимаемой подповерхностью $S$ в $\Sigma$, если $x \in int(S)$ и $H = \pi_1(S, x)$.

**Определение 0.1.** *Пусть $\Sigma$ – поверхность с базисной точкой $x$ и пусть $\pi_1(\Sigma, x) = G_1 *_{G_3} G_2$ – разложение ее фундаментальной группы в свободное произведние с объединением. Мы говорим, что это разложение геометрично, если в $\Sigma$ существуют несжимаемые подповерхности $S_1, S_2, S_3$ такие, что $\Sigma = S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2 = S_3$, $x \in int(S_3)$ и $G_i = \pi_1(S_i, x)$, $i = 1, 2, 3$.*

В [2] Х. Цишанг сформулировал следующую проблему.

**Проблема 10.69**. *Пусть $T_g$ – замкнутая ориентируемая поверхность рода $g \geqslant 2$ с базисной точкой $x$. Верно ли, что любое разложение $\pi_1(T_g, x) = G_1 *_{G_3} G_2$ геометрично при условии, что $G_1 \neq G_3 \neq G_2$ и подгруппа $G_3$ конечно порождена?*

Известно, что любое такое разложение геометрично, если $G_3$ – циклическая группа (см. [11] и [5]). В этом случае разложение определяется простой замкнутой кривой в $T_g$, разделяющей $T_g$. С точностью до гомеоморфизмов в $T_g$ имеется только конечное число таких кривых. Поэтому имеется только конечное число разложений группы $\pi_1(T_g, x)$ в свободное произведение с объединением по бесконечной циклической группе $Z$ с точностью до автоморфизмов группы $\pi_1(T_g, x)$.

В общем случае ответ на этот вопрос отрицателен. В § 1 приводится некоторый метод построения негеометрических разложений и доказывается, что для каждого $g \geqslant 2$ существует бесконечно много негеометрических и не автоморфно эквивалентных разложений вида $\pi_1(T_g, x) = F_2 *_{F_2} F_{2g-1}$. Здесь и далее $F_n$ обозначает свободную группу ранга $n$. В § 2 и 3 доказываются следующие теоремы.

**Теорема 2.6.** *Пусть $T$ – замкнутая поверхность и $\pi_1(T, x) = G_1 \underset{G_3}{*} G_2$. Если $G_3$ реализуется несжимаемой подповерхностью в $T$, то это разложение геометрично.*

**Теорема 3.1.** *Пусть $T$ – замкнутая поверхность и $\pi_1(T,x) = G \underset{H_1=t^{-1}H_2t}{*}$. Если $H_1$ реализуется несжимаемой подповерхностью в $T$, то $G$ тоже реализуется несжимаемой подповерхностью в подходящем двулистном накрытии поверхности $T$. Более того, $G$ является фундаментальной группой графа групп с циклическими реберными группами и двумя выделенными вершинными группами $H_1$ и $H_2$.*

Для любого графа $X$ и ребра $e \in X^1$ начало $e$ обозначим через $\alpha(e)$, конец – через $\omega(e)$. Обобщим определение 0.1 на случай разложения группы $\pi_1(T,x)$ в фундаментальную группу произвольного конечного графа групп.

**Определение 0.2.** Пусть $T$ – компактная поверхность с выделенной точкой $x$. Пусть $(\mathbb{G}, X)$ – конечный граф групп с вершинными группами $G_v\,(v \in X^0)$, реберными группами $G_e\,(e \in X^1)$ и вложениями $\alpha_e : G_e \to G_{\alpha(e)}$. Скажем, что $(\mathbb{G}, X)$ *геометрически реализован в* $T$, если выполнены следующие условия.

(1) Каждой вершине $u \in X^0$ сопоставлена несжимаемая подповерхность $S_u$ с выделенной точкой $u_*$ и ее фундаментальная группа $\pi_1(S_u, u_*)$ отождествлена с группой $G_u$.

(2) Каждому ребру $e \in X^1$ с началом $u$ сопоставлена несжимаемая подповерхность $S_e$ в $S_u$, содержащая $u_*$. При этом группа $\pi_1(S_e, u_*)$ отождествлена с группой $G_e$ так, что каноническое вложение $\pi_1(S_e, u_*) \to \pi_1(S_u, u_*)$ совпадает с вложением $\alpha_e : G_e \to G_u$.

(3) Для каждого $e \in X^1$ с началом $u$ и концом $w$ зафиксирован путь $e_*$ из $u_*$ в $w_*$ такой, что $\pi_1(S_e, u_*) = \{[e_* l e_*^{-1}] \mid [l] \in \pi_1(S_{\bar{e}}, w_*)\}$. При этом $(\bar{e})_* = (e_*)^{-1}$.

Для произвольной вершины $u \in X^0$ и элемента $g \in G_u$ обозначим через $\widetilde{g}$ некоторую петлю в $S_u$ с началом в $u_*$, гомотопический класс которой отождествлен с $g$. Зафиксируем некоторую вершину $v \in X^0$. Тогда можно задать гомоморфизм $\theta : \pi_1(\mathbb{G}, X, v) \to \pi_1(T, v_*)$ следующим правилом: элементу $g_0 e_1 g_1 \dots e_n g_n$ группы $\pi_1(\mathbb{G}, X, v)$ сопоставим гомотопический класс петли $\widetilde{g}_0 (e_1)_* \widetilde{g}_1 \dots (e_n)_* \widetilde{g}_n$.

Пусть $(\mathbb{G}, X)$ – граф групп, $v \in X^0$ и $\varphi : \pi_1(\mathbb{G}, X, v) \to \pi_1(T, x)$ – гомоморфизм. Мы скажем, что $\varphi$ *геометричен*, если существует такая геометрическая реализация графа групп $(\mathbb{G}, X)$, для которой $x = v_*$ и построенный выше гомоморфизм $\theta$ совпадает с $\varphi$. Мы говорим также, что *разложение* $\pi_1(\mathbb{G}, X, v)$ *геометрически реализуется в* $T$ (относительно $\varphi$).

**Замечание 0.3.** Пусть $T$ – замкнутая поверхность с базисной точкой $x$ и $\varphi : G_1 \underset{G_3}{*} G_2 \to \pi_1(T, x)$ – геометрический изоморфизм. Тогда разложение $\pi_1(T, x) = \varphi(G_1) \underset{\varphi(G_3)}{*} \varphi(G_2)$ геометрично в смысле определения 0.1. Это следует из теоремы 2.6 ввиду того, что $\varphi(G_3)$ реализуется несжимаемой подповерхностью в $T$.

**Замечание 0.4.** Пусть $H \leqslant \pi_1(\mathbb{G}, X, v)$. По теории Басса – Серра существует индуцированное представление $H$ в виде $H = \pi_1(\mathbb{H}, Y, w)$. Если изоморфизм $\varphi : \pi_1(\mathbb{G}, X, v) \to \pi_1(T, x)$ геометричен и $p : (\widetilde{T}, \widetilde{x}) \to (T, x)$ – накрытие, соответствующее подгруппе $\varphi(H)$, то изоморфизм $p_*^{-1} \circ \varphi|_H : \pi_1(\mathbb{H}, Y, w) \to \pi_1(\widetilde{T}, \widetilde{x})$ тоже геометричен. Если $\{S_u\}, \{S_e\}$ и $\{e_*\}$– набор подповерхностей и путей в $T$, соответствующий реализации графа групп $(\mathbb{G}, X)$, то компоненты прообразов $p^{-1}(S_u), p^{-1}(S_e)$ и $p^{-1}(e_*)$

составляют набор подповерхностей и путей в $\widetilde{T}$, соответствующих реализации графа групп $(\mathbb{H}, Y)$.

Необходимо уточнить, что понимается под вершинными и реберными подгруппами фундаментальной группы графа групп. Пусть $(\mathbb{G}, X, v)$ – граф групп с выделенной вершиной $v$, $\Gamma$ – максимальное поддерево в $X$. Для произвольной вершины $u \in X^0$ обозначим через $p_u$ путь без возвращений в $\Gamma$ из $v$ в $u$. Подгруппы $p_u G_u p_u^{-1}$ назовем вершинными подгруппами, подгруппы $p_{\alpha(e)}\alpha_e(G_e)p_{\alpha(e)}^{-1}$, где $e \in X^1$ – реберными подгруппами группы $\pi_1(\mathbb{G}, X, v)$ относительно максимального поддерева $\Gamma$. Классы сопряженности вершинных и реберных подгрупп не зависят от выбора $\Gamma$. Заметим, что если некоторая подгруппа $H \leqslant \pi_1(T, x)$ реализуется в $T$, то и любая сопряженная с ней подгруппа реализуется в $T$. Поэтому можно говорить о реализуемости вершинных и реберных подгрупп, не уточняя, относительно какого максимального дерева определяются эти подгруппы.

Для произвольного связного графа $X$ обозначим через $rk(X)$ ранг его фундаментальной группы.

**Теорема 4.7.** *Пусть $T$ – замкнутая поверхность, $(\mathbb{G}, X)$ – конечный граф групп, $\varphi : \pi_1(\mathbb{G}, X, v) \to \pi_1(T, x)$ – изоморфизм и образы реберных подгрупп реализуются в $T$. Тогда существует подгруппа $H$ индекса $2^{rk(X)}$ в $\pi_1(\mathbb{G}, X, v)$ такая, что для ее индуцированного разложения $\pi_1(\mathbb{H}, Y, w)$ и соответствующего ей накрытия $p : (\overline{T}, \overline{x}) \to (T, x)$ изоморфизм $p_*^{-1} \circ \varphi|_H : \pi_1(\mathbb{H}, Y, w) \to \pi_1(\overline{T}, \overline{x})$ геометричен.*

Пусть $\varphi : \pi_1(\mathbb{G}, X, v) \to \pi_1(T, x)$ – изоморфизм. Выберем в $X$ некоторое максимальное поддерево и определим относительно него реберные подгруппы $G_e$ группы $\pi_1(\mathbb{G}, X, v)$. Обозначим через $s_e$ сумму длин элементов некоторого множества, порождающего подгруппу $\varphi(G_e)$, относительно фиксированной системы порождающих группы $\pi_1(T, x)$.

Следующая теорема утверждает, что всякое представление группы $\pi_1(T, x)$ в виде фундаментальной группы конечного графа групп с конечно порожденными реберными группами является почти геометричным.

**Теорема 4.8.** *Пусть $T$ – замкнутая поверхность, $(\mathbb{G}, X)$ – конечный граф групп с конечно порожденными реберными группами, $\varphi : \pi_1(\mathbb{G}, X, v) \to \pi_1(T, x)$ – изоморфизм. Тогда существует подгруппа $H$ конечного индекса $n$ в $\pi_1(\mathbb{G}, X, v)$ такая, что для ее индуцированного разложения $\pi_1(\mathbb{H}, Y, w)$ и соответствующего ей накрытия $p : (\widetilde{T}, \widetilde{x}) \to (T, x)$ изоморфизм $p_*^{-1} \circ \varphi|_H : \pi_1(\mathbb{H}, Y, w) \to \pi_1(\widetilde{T}, \widetilde{x})$ геометричен.*

*Число $n$ оценивается сверху рекурсивной функцией от $s = \sum_{e \in X^1} s_e$.*

В § 5 вводится новое понятие – *реберная жесткость*. Неформально говоря, группа $G$ обладает реберной жесткостью, если для любого конечного набора ее конечно порожденных подгрупп $G_1, \dots, G_n$ существует только конечное число способов представления $G$ в виде фундаментальной группы графа групп с реберными подгруппами $G_1, \dots, G_n$ без учета значений проходных букв.

**Теорема 5.1.** *Фундаментальная группа замкнутой поверхности, отличной от бутылки Клейна, обладает реберной жесткостью.*

## § 1. Построение негеометрических разложений $\pi_1(T_g, x)$

При построении негеометрических разложений используется следующий прием: если имеется разложение $G = G_1 *_{G_3} G_2$ и существует элемент $u \in G_1$ такой, что $\langle G_3, u\rangle = G_3 * \langle u\rangle$, то существует разложение $G = G_1 *_{(G_3 * \langle u\rangle)} (G_2 * \langle u\rangle)$.

**Лемма 1.1.** *Пусть $F_n$ – свободная группа конечного ранга $n$ и пусть $H \neq 1$ – ее конечно порожденная подгруппа бесконечного индекса. Тогда в $F_n$ существует подгруппа $L$ бесконечного ранга такая, что $\langle H, L\rangle = H * L$.*

*Доказательство.* По свойству М. Холла [10] в $F_n$ существует подгруппа $H_1$ конечного индекса и подгруппа $M \leqslant H_1$ такая, что $H_1 = H * M$. Так как $H$ имеет бесконечный индекс в $F_n$, то $M \neq 1$. Возьмем $x \in H - \{1\}$ и $y \in M - \{1\}$. Тогда можно положить $L = \langle y^{-i} x y^i \mid i \geqslant 1\rangle$.

Пусть $T_g$ – замкнутая ориентируемая поверхность рода $g \geqslant 2$ с базисной точкой $x$. С помощью описанного приема и леммы 1.1 можно построить нетривиальное разложение $\pi_1(T_g, x) = G_1 \underset{G_3}{*} G_2$ с произвольно большим $rk(G_2)$. Но если $S$ – собственная несжимаемая подповерхность в $T_g$, то $\pi_1(S, x)$ – свободная группа ранга не более $2g-1$. Поэтому это разложение будет негеометрическим при $rk(G_2) > 2g-1$.

Особый интерес представляют разложения $\pi_1(T_g, x) = G_1 *_{G_3} G_2$ с $rk(G_i) \leqslant 2g-1$, $i = 1, 2, 3$. Мы докажем, что и среди таких разложений есть негеометрические.

Далее $F(X)$ обозначает свободную группу с базисом $X$, $||u||$ обозначает длину приведенного слова $u \in F(X)$ относительно $X$, и $[x, y]$ обозначает $x^{-1}y^{-1}xy$. Для произвольной группы $G$ и элемента $g \in G$ обозначим через $\widehat{g}$ сопряжение элементом $g$: $\widehat{g} = g^{-1}xg$, $x \in G$.

**Теорема 1.2.** *Пусть $T_g$ – замкнутая ориентруемая поверхность рода $g \geqslant 2$ с базисной точкой $x$. Рассмотрим следующее представление фундаментальной группы $\pi_1(T_g, x)$:*

$$\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid \prod_{i=1}^{g} [a_i, b_i]\rangle.$$

*Пусть $u$ – элемент свободной группы $F(a_1, b_1)$, не являющийся степенью $[a_1, b_1]$. Тогда разложение*

$$\pi_1(T_g, x) = \langle a_1, b_1\rangle \underset{\langle [b_1, a_1], u\rangle = \langle \prod_{i=2}^{g} [a_i, b_i], u\rangle}{*} \langle a_2, b_2, \dots, a_g, b_g, u\rangle \tag{1}$$

*геометрично в том и только том случае, когда $u = \alpha(a_1)[a_1, b_1]^k$, где $\alpha$ – автоморфизм группы $F(a_1, b_1)$, фиксирующий или обращающий $[a_1, b_1]$, $k \in \mathbb{Z}$.*

Пусть $G$ – группа. Мы скажем, что разложения $G = A_1 *_{A_3} A_2$ и $G = B_1 *_{B_3} B_2$ *эквивалентны*, если существует автоморфизм $\varphi$ группы $G$ такой, что $\varphi(A_i) = B_i$, $i = 1, 2, 3$.

**Следствие 1.3.** 1) *Существует алгоритм, который по элементу $u$ из $F(a_1, b_1)$ определяет, является ли разложение (1) геометрическим.*

2) *Для каждого $g \geqslant 2$ существует бесконечно много неэквивалентных негеометрических разложений группы $\pi_1(T_g, x)$ вида $F_2 *_{F_2} F_{2g-1}$.*

Мы используем следующие две леммы.

**Лемма 1.4** [8]. *Пусть $a^{k_1}b^{l_1}\dots a^{k_s}b^{l_s}$ – примитивный элемент группы $F(a,b)$, где $s \geqslant 1$ и все показатели ненулевые. Тогда по модулю тривиальных изменений обозначений (возможны замены $a$ на $a^{-1}$, $b$ на $b^{-1}$, $a$ на $b$ и $b$ на $a$ повсюду), существует целое $n > 0$ такое, что $k_1 = \dots = k_s = 1$ и $\{l_1, l_2, \dots, l_s\} = \{n, n+1\}$.*

**Лемма 1.5.** *Пусть $H$ – конечно порожденная подгруппа в $\pi_1(T_g, x)$, $g \geqslant 2$, и пусть $S_1, S_2$ – две несжимаемые подповерхности в $T_g$, реализующие $H$. Тогда существует изотопия $T_g$, которая отображает $(S_1, x)$ в $(S_2, x)$ и индуцирует тождество на $\pi_1(T_g, x)$.*

*Доказательство.* В [1, лемма 2.4] было доказано существование изотопии $i$, отображающей $S_1$ в $S_2$. Так как $x \in int(S_k)$, $k = 1, 2$, то можно считать, что $i(x) = x$. Тогда $i_*$ является сопряжением группы $\pi_1(T_g, x)$ таким, что $i_*(H) = H$. Разбиение поверхности $T_g$ на компоненты, индуцированное разрезами вдоль $\partial S_1$, дает представление группы $\pi_1(T_g, x)$ в виде фундаментальной группы графа групп, одна из вершинных групп которого совпадает с $H$. Анализ этого графа групп показывает, что нормализатор $H$ совпадает с $H$. Поэтому существует $h \in H$ такой, что $i_* = \widehat{h}$. Так как $h \in H$, то существует изотопия $j'$ поверхности $S_1$ такая, что $j'(x) = x$ и $j'_* = \widehat{h}|_H$. Расширим $j'$ до изотопии $j$ поверхности $T_g$. Тогда $j^{-1}i$ – искомая изотопия.

*Доказательство теоремы.* Предположим, что разложение (1) геометрично. Пусть $S_1, S_2$ и $S_3$ – несжимаемые подповерхности, соответствующие этому разложению. Здесь $S_1$ реализует $G_1 = \langle a_1, b_1 \rangle$, $S_2$ реализует второй множитель, $S_3$ реализует $G_3 = \langle [a_1, b_1], u \rangle$. Ввиду леммы 1.5 можно считать, что $S_1$ совпадает с любой заранее выбранной подповерхностью, реализующей $G_1$. Из рис. 1 видно, что в $S_1$ существует несжимаемая подповерхность $S$, реализующая $G = \langle [a_1, b_1], a_1 \rangle$, со свойством $\partial S_1 \subset S$.

Заметим, что, с точностью до гомеоморфизма, фиксирующего $\partial S_1$, существует только одна несжимаемая подповерхность $\Delta$ в $S_1$ со следующими свойствами:

1) $x \in int(\Delta)$,
2) $\partial S_1 \subset \Delta$,
3) $\pi_1(\Delta, x)$ является свободной группой ранга 2,
4) $\pi_1(\Delta, x)$ – собственная подгруппа $G_1$.

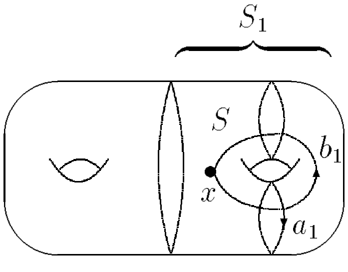


*Рис. 1*

Поэтому существует гомеоморфизм $h$ подповерхности $S_1$ такой, что $h(S_3) = S$. Так как $x \in int(S)$ и $x \in int(S_3)$, то мы можем считать, что $h$ фиксирует $x$. Обозначим через $h_*$ автоморфизм группы $\pi_1(S_1, x) = F(a_1, b_1)$, индуцированный $h$. Тогда $h_*(G_3) = G$. Известно, что всякий автоморфизм группы $F(a_1, b_1)$ стабилизирует или обращает элемент $[a_1, b_1]$ с точностью до сопряженности. Поэтому существуют $v \in F(a_1, b_1)$ и $\varphi \in \mathrm{Aut}(F(a_1, b_1))$ такие, что $h_* = \widehat{v} \circ \varphi$ и $\varphi$ стабилизирует или обращает элемент $[a_1, b_1]$. Тогда $v^{-1}[a_1, b_1]v \in G = \langle a_1, b_1^{-1}a_1b_1\rangle$. Запишем $v^{-1}[a_1, b_1]v$ в виде $g^{-1}wg$, где $g \in G$, $w = a_1^{\epsilon_1} \dots b_1^{-1}a_1^{\epsilon_2}b_1$ – редуцированное слово от $a_1$, $b_1^{-1}a_1b_1$. Тогда $w = [a_1, b_1]$, $vg^{-1}$ – степень $[a_1, b_1]$, и значит $v \in G$.

Отсюда следует, что $\varphi(G_3) = G$, то есть $\langle [a_1, b_1], a_1\rangle = \langle [a_1, b_1], \varphi(u)\rangle$. Поэтому $\varphi(u) = [a_1, b_1]^p a_1^{\varepsilon}[a_1, b_1]^q$ для некоторых $p, q \in Z, \varepsilon \in \{-1, 1\}$.

Пусть $\psi$ – автоморфизм группы $F(a_1, b_1)$ такой, что $\psi(a_1) = a_1^{-1}, \psi(b_1) = b_1a_1$. Положим $\varphi_1 = \varphi^{-1}$, если $\varepsilon = 1$ и $\varphi_1 = \varphi^{-1} \circ \psi$, если $\varepsilon = -1$. Тогда $u = [a_1, b_1]^{p_1}\varphi_1(a_1)[a_1, b_1]^{q_1}$, где $p_1 = p, q_1 = q$, если $\varphi$ стабилизирует $[a_1, b_1]$ и $p_1 = -p, q_1 = -q$, если $\varphi$ обращает $[a_1, b_1]$. Осталось положить $\alpha = \widehat{[a_1, b_1]}^{\,-p_1} \circ \varphi_1$, $k = p_1 + q_1$.

Обратно, если $u$ имеет указанный в теореме вид, то разложение (1) автоморфно эквивалентно разложению с $u = a_1$ и поэтому геометрично.

*Доказательство следствия.* 1) Ясно, что если $u$ – степень $[a_1, b_1]$, то разложение (1) геометрично. Поэтому предположим, что $u$ не является степенью $[a_1, b_1]$. Предположим, что $u = \alpha(a_1)[a_1, b_1]^k$, где $\alpha$ – автоморфизм группы $F(a_1, b_1)$, фиксирующий или обращающий $[a_1, b_1]$. Тогда $|k| \leqslant ||u||/4 + 1$, в противном случае слово $u[a_1, b_1]^{-k}$ после циклического приведения содержит букву $z \in \{a_1, b_1\}$ вместе с буквой $z^{-1}$, что противоречит лемме 1.4. Поэтому достаточно уметь отвечать на следующий вопрос:

*Для данного $w \in F(a_1, b_1)$ существует ли автоморфизм $\alpha$ группы $F(a_1, b_1)$ такой, что $\alpha(a_1) = w$ и $\alpha$ фиксирует или обращает $[a_1, b_1]$ ?*

Это можно сделать с помощью алгоритма Уайтхеда (см. [3]).

2) По теореме 1.2 и лемме 1.4 разложение (1) негеометрично для любого $u = a^i$, $i = 2, 3 \dots$. С помощью абелизации группы $F(a_1, b_1)$ можно вывести, что эти разложения попарно неэквивалентны.

**Гипотеза.** *Любое нетривиальное разложение $\pi_1(T_g, x) = G_1 \underset{G_3}{*} G_2$, где $G_3$ – конечно порождена, может быть получено из разложения над $Z$ методом, описанным в начале этого параграфа.*

## § 2. Критерий геометричности свободного произведения с объединением

Напомним некоторые определения из [4]. *Диаграммой на поверхности $S$ над алфавитом $\mathcal{U}$* называется произвольное клеточное разбиение поверхности $S$, каждому ребру $e$ которого сопоставлена некоторая буква $\varphi(e) \in \mathcal{U} \cup \mathcal{U}^{-1} \cup \{1\}$ так, что $\varphi(e^{-1}) = (\varphi(e))^{-1}$. *Меткой* пути $p = e_1 \dots e_n$ в диаграмме $\Delta$ над $\mathcal{U}$ называется слово $\varphi(p) = \varphi(e_1) \dots \varphi(e_n)$. Пусть $G$ – группа и $\langle \mathcal{U} \,|\, \mathcal{R}\rangle$ – некоторое ее представление. Клетка диаграммы $\Delta$ называется *$\mathcal{R}$-клеткой*, если метка ее контура графически равна (с точностью до циклического сдвига) некоторому слову $R \in \mathcal{R}$ или $R^{-1}$, где

$R \in \mathcal{R}$. Клетка называется 0-*клеткой*, если метка ее контура $e_1 \dots e_n$ графически равна $\varphi(e_1) \dots \varphi(e_n)$, где все $\varphi(e_i) \equiv 1$, либо для некоторых $i \neq j$ имеем $\varphi(e_i) \equiv a \in \mathcal{U}$, $\varphi(e_j) \equiv a^{-1}$ и $\varphi(e_k) \equiv 1$ при $k \neq i, j$. *Диаграммой на поверхности $S$ над представлением $\langle \mathcal{U} \,|\, \mathcal{R} \rangle$* называется всякая диаграмма $\Delta$ над алфавитом $\mathcal{U}$, каждая клетка которой является $\mathcal{R}$-клеткой или 0-клеткой. Следующая лемма называется леммой ван Кампена.

**Лемма 2.1.** *Пусть $W$ – произвольное непустое слово в алфавите $\mathcal{U} \cup \mathcal{U}^{-1}$. Тогда $W = 1$ в группе $G$, заданной представлением $\langle \mathcal{U} \,|\, \mathcal{R} \rangle$, в том и только том случае, когда существует дисковая диаграмма над этим представлением, метка контура которой графически равна $W$.*

**Лемма 2.2.** *Пусть $G$ – фундаментальная группа конечного графа групп. Если $G$ и все реберные группы конечно порождены, то и все вершинные группы тоже конечно порождены.*

*Доказательство* проводится индукцией по числу ребер графа. Поэтому достаточно разобрать случаи свободного произведения с объединением и HNN-расширения. Пусть $G = G_1 \underset{G_3}{*} G_2$, $G = \langle g_1, \dots, g_n \rangle$, $G_3 = \langle c_1, \dots, c_k \rangle$. Запишем каждый $g_i$ в виде $g_i = a_{i1} b_{i1} \dots a_{i,s_i} b_{i,s_i}$, где $a_{ij} \in G_1$, $b_{ij} \in G_2$. Тогда $G_1$ порождается множеством, состоящим из всех $c_i$ и $a_{ij}$, а $G_2$ порождается множеством, состоящим из всех $c_i$ и $b_{ij}$. Случай HNN-расширения рассматривается аналогично.

Следующая лемма доказывается стандартным образом с помощью нормальных форм. Здесь $\omega_e = \alpha_{\bar{e}}$.

**Лемма 2.3.** *Пусть $(\mathbb{G}, X)$ – граф групп, $G_v$ и $G_u$ – две его вершинные группы, $\Delta$ – максимальное поддерево в $X$. Предположим, что $G_v^g \leqslant G_u$ в группе $\pi_1(\mathbb{G}, X, \Delta)$. Тогда $g = g_1 e_1 \dots g_n e_n g_{n+1}$, где $e_1 \dots e_n$ – путь в $X$ из $v$ в $u$, $g_j \in G_{\alpha(e_j)}$ при $1 \leqslant j \leqslant n$, $g_{n+1} \in G_u$, $G_v^{g_1 e_1 \dots g_i e_i} \leqslant \omega_{e_i}(G_{e_i})$, $G_v^{g_1 e_1 \dots e_i g_{i+1}} \leqslant \alpha_{e_{i+1}}(G_{e_{i+1}})$ для всех возможных $i$.*

**Лемма 2.4.** *Пусть $S_u$ и $S_v$ – две непересекающиеся несжимаемые подповерхности в замкнутой поверхности $T$. Если группа $\pi_1(S_v)$ сопряжена с подгруппой группы $\pi_1(S_u)$, то $S_v$ является кольцом и в $\overline{T - (S_u \cup S_v)}$ имеется компонента, являющаяся кольцом, одна из граничных компонент которого лежит в $S_u$, другая – в $S_v$.*

*Доказательство.* Разбиение $T$ подповерхностями $S_u$ и $S_v$ индуцирует представление группы $\pi_1(T, x)$ в виде фундаментальной группы графа групп $(\mathbb{G}, X)$. Множество $X^0$ состоит из подповерхностей $S_u, S_v$ и компонент связности $\overline{T - (S_u \cup S_v)}$, множество $X^1$ состоит из компонент границ подповерхностей из $X^0$. Из леммы 2.3 следует, что существуют подповерхности $S_v = C_1, \dots, C_{n+1} = S_u$ из $X^0$ и окружности $Z_1, \dots, Z_n$ из $X^1$ такие, что $Z_i$ является одной из общих компонент границ $C_i$ и $C_{i+1}$, причем вложение $Z_1$ в $C_1$ индуцирует изоморфизм фундаментальных групп и $Z_i$ свободно гомотопно $Z_{i+1}$ в $C_{i+1}$. Первое означает, что $C_1$ – кольцо, второе – что $Z_i = Z_{i+1}$ или $C_{i+1}$ – кольцо. Если $n$ минимально, то $Z_i \neq Z_{i+1}$ и, значит, $C_2, \dots, C_n$ – кольца.

Следующая лемма доказывается аналогично.

**Лемма 2.5.** *Пусть $T$ – компактная поверхность, $S$ – несжимаемая подповерхность в $T$, $x \in S$. Пусть $1 \neq a \in \pi_1(S,x)$, $g \in \pi_1(T,x) - \pi_1(S,x)$ и $a^g \in \pi_1(S,x)$. Тогда выполняется одно из двух:*

*1) $a$ и $a^g$ являются степенями классов петель, свободно гомотопных в $S$ двум различным компонентам границы $S$. Эти компоненты разбивают $T$ на две части – часть, где лежит $S$, и кольцо.*

*2) $a$ и $a^g$ являются степенями классов петель, свободно гомотопных в $S$ одной компоненте границы $S$. Эта компонента разбивает $T$ на две части – часть, где лежит $S$, и лист Мебиуса.*

**Теорема 2.6.** *Пусть $T$ – замкнутая поверхность и $\pi_1(T,x) = G_1 \underset{G_3}{*} G_2$. Если $G_3$ реализуется несжимаемой подповерхностью в $T$, то это разложение геометрично.*

*Доказательство.* Можно считать, что разложение $\pi_1(T,x) = G_1 \underset{G_3}{*} G_2$ нетривиально, то есть $G_3 \neq G_1$ и $G_3 \neq G_2$. Тогда $T$ не является тором. Разберем сначала случай, когда $T$ – бутылка Клейна. Тогда $\pi_1(T,x)$ имеет представление $\langle a, b \,|\, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$. Разложение из леммы 2.7 геометрично (см. рис. 2). Все другие разложения сопряжены с ним и, значит, тоже геометричны (сопряжение по теореме Бэра (см. [6]) индуцируется изотопией).

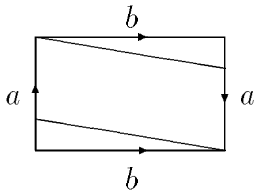


*Рис. 2*

**Лемма 2.7.** *Группа $G = \langle a, b \,|\, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ имеет единственное (с точностью до сопряженности и перестановки множителей) разложение в нетривиальное свободное произведение с объединением: $G = \langle b \rangle \underset{\langle b^2 \rangle}{*} \langle ba \rangle$.*

*Доказательство.* Пусть $G = G_1 \underset{G_3}{*} G_2$ – разложение $G$ в нетривиальное свободное произведение с объединением. Так как $\langle b^2 \rangle$ – центр $G$, то $\langle b^2 \rangle \leqslant G_3$. Положим $G' = G/\langle b^2 \rangle$, $G'_i = G_i/\langle b^2 \rangle$, $i = 1,2,3$. Тогда $Z_2 * Z_2 \cong G' = G'_1 \underset{G'_3}{*} G'_2$. Так как $Z_2 * Z_2$ не содержит свободной группы ранга 2, то $|G'_1 : G'_3| = |G'_2 : G'_3| = 2$. Тогда $G'/G'_3 \cong Z_2 * Z_2$. Из хопфовости группы $Z_2 * Z_2$ следует, что $G'_3 = 1$, и, значит, $G_3 = \langle b^2 \rangle$. Так как $|G_1 : G_3| = |G_2 : G_3| = 2$ и в $G$ отсутствует кручение, то $G_1$ и $G_2$ – бесконечные циклические группы. Простые вычисления показывают, что (с точностью до перестановки) $G_1$ порождается элементом $ba^k$, $G_2$ порождается элементом $ba^{k+1}$ для некоторого $k$. Сопрягая элементом $a^{-k/2}$ при $k$ четном и элементом $ba^{(k+1)/2}$ при $k$ нечетном, получаем разложение из формулировки леммы.

Рассмотрим теперь случай, когда поверхность $T$ не гомеоморфна бутылке Клейна. Пусть $T$ – замкнутая поверхность рода $g$. Тогда $\pi_1(T,x)$ имеет представление

$$\langle t_1, u_1, \ldots, t_g, u_g | \prod_{i=1}^{g} [t_i, u_i] \rangle,$$

если $T$ ориентируема, и представление

$$\langle v_1, \ldots, v_g \,|\, v_1^2 \cdots v_g^2 \rangle,$$

если $T$ неориентируема. Для единообразного рассмотрения этих случаев мы записываем эти представления в виде

$$\langle a_1, \ldots, a_k \,|\, \prod\nolimits_* \rangle.$$

Пусть $\mathcal{D}$ – диск, граница которого разделена на ориентированные отрезки, помеченные элементами из множества $\{a_1, a_1^{-1}, \ldots, a_k, a_k^{-1}\}$ так, что вдоль нее читается слово $\prod_*$. Поверхность $T$ получается из $\mathcal{D}$ отождествлением пар одинаково помеченных ребер. Пусть $p : \mathcal{D} \to T$ – соответствующий морфизм комплексов.

Теперь мы построим комплекс $K$ по представлению группы $\pi_1(T, x)$ в виде $G_1 \underset{G_3}{*} G_2$. Так как индекс подгруппы $G_i$ в группе $\pi_1(T, x)$ бесконечен, то $G_i$ – свободная группа ($i = 1, 2, 3$). Поскольку $G_3$ реализуется несжимаемой подповерхностью в $T$, то $G_3$ конечно порождена. По лемме 2.2 каждая из групп $G_i$ конечно порождена. Пусть $\mathcal{S}_i$ – некоторый базис $G_i$. Каждый элемент $s \in \mathcal{S}_3$ выразим в виде некоторого слова $U_{i,s}$ от элементов из $\mathcal{S}_i$ $(i = 1, 2)$. Очевидно, $\pi_1(T, x)$ можно задать множеством порождающих $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3$ и множеством соотношений $\mathcal{R} = \{s^{-1} U_{i,s} \,|\, s \in \mathcal{S}_3,\ i = 1, 2\}$.

Пусть $(R_i, x_i)$ – роза с единственной вершиной $x_i$ и множеством положительно ориентированых ребер $\{\widetilde{s} \,|\, s \in \mathcal{S}_i\}$. Образуем граф $\Gamma$, в который входят $R_1, R_2, R_3$, соединяя вершины $x_3$ и $x_i$ ориентированным ребром $e_i$ $(i = 1, 2)$. Для каждого $s \in \mathcal{S}_3$ приклеим к $\Gamma$ две клетки $D_{1,s}$ и $D_{2,s}$ в соответствии с соотношениями $s^{-1}U_{i,s}$. Если $U_{i,s} = u_1 \ldots u_r$, где все $u_j \in \mathcal{S}_i \cup \mathcal{S}_i^{-1}$, то положим $\partial(D_{i,s}) = (\widetilde{s})^{-1} e_i \widetilde{u}_1 e_i^{-1} \ldots e_i \widetilde{u}_r e_i^{-1}$. Мы назовем эти клетки $\mathcal{R}$-клетками. Удобно также ввести 0-клетки с границами $e_i \widetilde{s} e_i^{-1} e_i \widetilde{s}^{-1} e_i^{-1}$ $(s \in \mathcal{S}_i,\ i = 1, 2)$. Полученный комплекс обозначим через $K$ (рис. 3). Очевидно, что $\pi_1(T, x) \cong \pi_1(K, x_3)$.

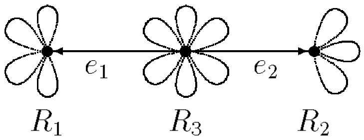


*Рис. 3*

Далее мы построим подразбиение $T$ и непрерывное отображение $f : (T, x) \to (K, x_3)$, индуцирующее изоморфизм фундаментальных групп. Представим каждый $a_i$ в виде слова $w_i(g_1, \ldots, g_n)$, где все $g_j \in \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$. Если ребро из границы диска $\mathcal{D}$ имеет метку $a_i^{\pm 1}$, то мы разбиваем его на мелкие ребра с метками из множества $\{g_1, g_1^{-1}, \ldots, g_n, g_n^{-1}\}$, так, чтобы вдоль этого ребра читалось слово $w_i^{\pm 1}(g_1, \ldots, g_n)$. В результате получится диск $\mathcal{D}_1$, метка границы которого $W(g_1, \ldots, g_n)$ равна 1 в группе $\pi_1(T, x)$. По лемме ван Кампена можно считать, что $\mathcal{D}_1$ – дисковая диаграмма над представлением $\langle \mathcal{S} \,|\, \mathcal{R} \rangle$. Отождествляя с помощью $p$ соответствующие подпути границы $\mathcal{D}_1$, получаем диаграмму $\Delta$ на $T$ над представлением $\langle \mathcal{S} \,|\, \mathcal{R} \rangle$. Разделим каждое ребро с меткой $s \in \mathcal{S}_i$ $(i = 1, 2)$ на три ребра с метками $e_i, \widetilde{s}, e_i^{-1}$. Каждое ребро с меткой $s \in \mathcal{S}_3$ оставим, но его метку изменим на $\widetilde{s}$. Новую диаграмму над алфавитом $\{\widetilde{s} \,|\, s \in \mathcal{S}\} \cup \{e_1, e_2\}$ обозначим тоже через $T$. Теперь можно определить непрерывное отображение $f : T \to K$, отправляя ребра с метками $e_i, \widetilde{s}, e_i^{-1}$ в ребра $e_i, \widetilde{s}, e_i^{-1}$, ребра с меткой 1 в вершину $x_3$ и распространяя это отображение на клетки. Начальную вершину исходного ребра с меткой $a_1$ обозначим через $x$. Тогда отображение $f$ индуцирует эпиморфизм $f_* : \pi_1(T, x) \to \pi_1(K, x_3)$. Этот эпиморфизм является изоморфизмом в силу хопфовости группы $\pi_1(T, x)$.

Изложим кратко план дальнейшего доказательства теоремы. Прообраз $f^{-1}(R_3)$ состоит из конечного числа подкомплексов, вложенных в $T$. Измельчая комплексы $T$ и $K$ и переопределяя отображение $f$ в окрестности $f^{-1}(R_3)$, можно считать, что каждая компонента $C$ прообраза $f^{-1}(R_3)$ является подповерхностью в $T$. Более того, можно считать, что $C$ является несжимаемой подповерхностью: если некоторая компонента дополнения к $C$ является диском, то можно переопределить $f$ на этом диске так, чтобы не только его граница, но и весь этот диск отображались в $R_3$. Можно добиться также, чтобы любая компонента прообраза $f^{-1}(R_3)$ не являлась диском. Пусть $S_3$ – некоторая несжимаемая подповерхность в $T$, реализующая подгруппу $G_3$. При очевидных отождествлениях имеем $f_*(\pi_1(S_3, x)) = G_3 = \pi_1(R_3, x_3)$. Трудность заключается в том, что изначально $f(S_3)$ может не лежать в $R_3$. С помощью утверждения 1 можно считать, что одна из компонент прообраза $f^{-1}(R_3)$ реализует $G_3$. Обозначим эту компоненту через $S$. По утверждению 2 остальные компоненты прообраза являются кольцами, параллельными граничным компонентам $S$. Если $T$ ориентируема, то еще раз переопределяя $f$, можно “присоединить” эти кольца к $S$ и добиться, чтобы $f^{-1}(R_3)$ совпало с $S$. Если $T$ неориентируема, то мы присоединяем к $S$ все кольца, за исключением некоторых, лежащих в компонентах дополнения $T - S$, гомеоморфных листу Мебиуса. Далее доказывается, что $G_1$ является фундаментальной группой объединения $S$ и некоторых компонент дополнения к $S$, $G_2$ является фундаментальной группой объединения $S$ и остальных компонент дополнения к $S$.

Мы будем использовать следующие преобразования поверхности $T$ и отображения $f$.

*Преобразование* $D(l)$. Пусть $l$ – простой (возможно замкнутый) путь в $T$, $y$ и $z$ – его начальная и конечная точки. Предположим, что $f(y) = f(z) = x_3$ и петля $f(l)$ гомотопна петле, проходящей в $R_3$. Разрежем $T$ вдоль $int(l)$ и вставим в этот разрез диск $D$. Выберем в $D$ простой путь $l'$, соединяющий $y$ и $z$ и делящий $D$ на две диска, каждый из которых содержит ровно один из краев разреза. Очевидно, можно разбить $D$ на клетки и доопределить $f$ на $D$ так, чтобы петля $f(l')$ лежала в $R_3$.

**Утверждение 1.** *С помощью конечного числа преобразований вида* $D(l)$ *можно добиться, чтобы одна из компонент прообраза* $f^{-1}(R_3)$ *являлась несжимаемой подповерхностью, реализующей* $G_3$.

*Доказательство.* Пусть подповерхность $S_3$, реализующая $G_3$, имеет $r$ компонент края. Пусть $\gamma_1, \dots, \gamma_{r+t}$ – система простых петель в $S_3$ с началом в $x$ таких, что

$\gamma_i \cap \gamma_j = \{x\}$ при $i \neq j$, $\gamma_i$ свободно гомотопна в $S_3$ компоненте края с номером $i$ при $1 \leqslant i \leqslant r$, и после разрезания $S_3$ вдоль $\gamma_1, \ldots, \gamma_{r+t}$ поверхность $S_3$ распадается на $r$ колец и диск $P$. С помощью преобразований $D(\gamma_i)$ получаем, что все петли $f(\gamma_i')$ лежат в $R_3$. Поэтому можно считать с самого начала, что все петли $f(\gamma_i)$ лежат в $R_3$. Так как граница диска $P$ отображается в $R_3$, то можно задать его новое разбиение на клетки и переопределить $f$ так, чтобы $f|\partial P$ осталось прежним и $f(P) \subset R_3$. Аналогично можно переопределить $f$ в регулярной окрестности упомянутых колец и добиться, чтобы $f(S_3)$ лежало в $R_3$.

Обозначим компоненту из утверждения 1 через $S$.

**Утверждение 2.** *Если $S_1$ – компонента прообраза $f^{-1}(R_3)$, отличная от $S$, то $S_1$ является кольцом. Более того, кольцо $S_1$ параллельно одной из граничных компонент $S$.*

*Доказательство.* Переопределяя $f$ в окрестности $S_1$, можно считать, что в $S_1$ есть точка $y \in f^{-1}(x_3)$. Пусть $l$ – простой путь в $T$ из $x$ в $y$. Обозначим через $H$ подгруппу, состоящую из гомотопических классов петель $lsl^{-1}$, где $s$ – петля в $S_1$ с началом в $y$.

Заметим, что $f(l)$ – петля в $K$ с началом в $x_3$, а $f(s)$ – петля в $R_3$ с началом в $x_3$. Поэтому $f_*(H)$ сопряжена элементом $[f(l)]$ с подгруппой группы $\pi_1(R_3, x_3) = f_*(\pi_1(S, x))$. Так как $f_*$ – изоморфизм, то $H$ сопряжена с подгруппой группы $\pi_1(S, x)$ в группе $\pi_1(T, x)$. Поэтому утверждение вытекает из леммы 2.4.

Сейчас мы покажем, как можно переопределить $f$, чтобы уменьшить число компонент связности $f^{-1}(R_3)$. Пусть $S_1$ – одна из компонент связности $f^{-1}(R_3)$, отличная от $S$. Переопределяя $f$, можно считать, что в $S_1$ существует точка $y \in f^{-1}(x_3)$. Пусть $s$ – произвольная петля в $S_1$ с началом в $y$, порождающая $\pi_1(S_1, y)$. Рассмотрим три случая.

*Случай 1.* Компонента $\overline{T - S}$, в которой лежит $S_1$, не является кольцом и листом Мебиуса.

По утверждению 2 в дополнении $\overline{T - (S \cup S_1)}$ существует единственная компонента $C$, являющаяся кольцом, одна из граничных компонент которого лежит в $S$, другая – в $S_1$. Пусть $l$ – простая кривая в $S \cup C \cup S_1$, соединяющая $x$ и $y$.

**Утверждение 3.** *Петля $f(l)$ гомотопна петле из $R_3$.*

*Доказательство.* Обозначим $z = [f(l)]$. Так как $S$ является ретрактом $S \cup C \cup S_1$, то $[lsl^{-1}] \in G_3$. Элемент $[f(lsl^{-1})] \in \pi_1(R_3, x_3)$ сопряжен элементом $z$ с элементом $[f(s)] \in \pi_1(R_3, x_3)$. Тогда элемент $[lsl^{-1}] \in \pi_1(S, x)$ сопряжен элементом $f_*^{-1}(z)$ с элементом $f_*^{-1}([f(s)]) \in \pi_1(S, x)$. Из леммы 2.5 следует, что $f_*^{-1}(z) \in \pi_1(S, x)$ и, значит, $z \in \pi_1(R_3, x_3)$.

Сделав преобразование $D(l)$, можно считать, что $f(l) \subset R_3$. Если разрезать кольцо $C$ по $l$, то получится диск с границей, отображающейся под действием $f$ в $R_3$. Поэтому можно переопределить $f$ на $C$ так, чтобы $C$ отображалось в $R_3$. После этого число компонент связности $f^{-1}(R_3)$ уменьшится на одну.

*Случай 2.* Компонента $\overline{T - S}$, в которой лежит $S_1$, является кольцом.

Пусть $C$ – это кольцо, $C_1, C_2$ – компоненты дополнения к $S_1$ в $C$, $l_i$ – простые кривые из $x$ в $y$ в $S \cup C_i \cup S_1$. Обозначим $t = [l_1 l_2^{-1}]$, $z_i = [f(l_i)]$, $t_i = f_*^{-1}(z_i)$. Тогда $t = t_1 t_2^{-1}$. Положим $A_i = \langle [l_i s l_i^{-1}] \rangle$.

Группа $\pi_1(S \cup C, x)$ является HNN-расширением с базой $\pi_1(S, x)$, ассоциируемыми подгруппами $A_1, A_2$ и проходной буквой $t$.

Рассуждая как в случае 1, имеем $A_1^{t_1} \leqslant \pi_1(S, x)$. Так как $T$ не является тором, то отсюда следует, что $t_1 \in \pi_1(S, x)$ или $t_1 \in t\pi_1(S, x)$. Во втором случае имеем $t_2 = t^{-1} t_1 \in \pi_1(S, x)$. Значит, $z_1$ или $z_2$ принадлежит $\pi_1(R_3, x_3)$. Это позволяет переопределить $f$ на $C_1$ или на $C_2$ и уменьшить число компонент связности $f^{-1}(R_3)$.

*Случай 3.* Компонента $\overline{T - S}$, в которой лежит $S_1$, является листом Мебиуса.

Пусть $M$ – этот лист Мебиуса. Тогда в дополнении $\overline{T - (S \cup S_1)}$ существует единственная компонента $C$, являющаяся кольцом, одна из граничных компонент которого лежит в $S$, другая – в $S_1$. Считаем, что $S_1$ – ближайшая к $S$ компонента из $f^{-1}(R_3)$, расположенная в $M$, то есть $int(C) \cap f^{-1}(R_3) = \emptyset$. Пусть $l$ – простая кривая в $S \cup C \cup S_1$, соединяющая $x$ и $y$, $z = [f(l)]$. Имеем

$$\pi_1(S \cup M, x) = \pi_1(S, x) \underset{\langle a^2 \rangle}{*} \langle a \rangle,$$

где $a$ соответствует такому порождающему группы $\pi_1(M)$, что $a^2 = [lsl^{-1}]$. Рассуждая как в доказательстве утверждения 3 и принимая во внимание, что $T$ – не бутылка Клейна, получаем $f_*^{-1}(z) \in \pi_1(S, x) \cup a\pi_1(S, x)$. Если $f_*^{-1}(z) \in \pi_1(S, x)$, то утверждение 3 справедливо, мы можем переопределить $f$ и присоединить $S_1$ к $S$, как в случае 1.

Пусть $f_*^{-1}(z) \in a\pi_1(S, x)$. Так как $l$ пересекает только одну компоненту дополнения $\overline{T - (S \cup S_1)}$, то $z \in G_1$ или $z \in G_2$. Поэтому $f_*(a) \in G_1$ или $f_*(a) \in G_2$. Соответственно назовем $M$ листом Мебиуса вида 1 или 2. В этом подслучае мы не присоединяем $S_1$ к $S$.

Проделывая конечное число таких переопределений, мы добьемся, что $f^{-1}(R_3)$ будет иметь единственную компоненту вне объединения листов Мебиуса вида 1 и 2. Эта компонента реализует $G_3$. Обозначим ее через $S_3$, а объединение листов Мебиуса вида $i$ – через $M_i$. Подкомплекс $K_3$ разбивает комплекс $K$ на две компоненты связности. Компоненту, содержащую $R_i$, обозначим через $R'_i$ $(i = 1, 2)$. Тогда часть компонент связности дополнения $T - (S_3 \cup M_1 \cup M_2)$ лежит в прообразе $R'_1$, другая часть – в прообразе $R'_2$. Обозначим через $S_i$ объединение $S_3$, $M_i$ и тех компонент связности дополнения $T - (S_3 \cup M_1 \cup M_2)$, которые лежат в прообразе $R'_i$ $(i = 1, 2)$. Положим $G'_i = \pi_1(S_i, x)$.

Тогда все $S_i$ – несжимаемые подповерхности, $T = S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2 = S_3$ и, значит, $\pi_1(T, x) = G'_1 \underset{G_3}{*} G'_2$. Так как $\pi_1(T, x) = G_1 \underset{G_3}{*} G_2$, $G'_1 \leqslant G_1$, $G'_2 \leqslant G_2$, то из нормальной формы элемента в свободном произведении с объединением следует, что $G_1 = G'_1$, $G_2 = G'_2$. Теорема доказана.

## § 3. Критерий геометричности HNN-расширения

Следующий пример показывает, как можно строить нетривиальные HNN-расширения, изоморфные группе $\pi_1(T_g, x)$.

**Пример.** Пусть $N$ – подповерхность в $T_g$ такая, что $T_g - N$ – цилиндр, $x \in N$. Тогда $\pi_1(T_g, x) = \langle H, t \mid Z_1 = t^{-1}Z_2t\rangle$, где $H = \pi_1(N, x)$, $Z_1$ и $Z_2$ – подгруппы $H$, соответствующие компонентам границы $N$, $t$ – проходная буква, соответствующая ручке $T_g - N$. Введем новые порождающие $\overline{h}$ и новые соотношения $\overline{h} = t^{-1}ht$ $(h \in H)$. Для любой подгруппы $K \leqslant H$ обозначим через $\overline{K}$ группу $\{\overline{k} \mid k \in K\}$. Тогда мы можем переписать представление в виде

$$\langle H, \overline{H}, t \mid Z_1 = \overline{Z}_2,\, \overline{H} = t^{-1}Ht\rangle = \langle H \underset{Z_1 = \overline{Z}_2}{*} \overline{H},\, t \mid \overline{H} = t^{-1}Ht\rangle.$$

База $H \underset{Z_1 = \overline{Z}_2}{*} \overline{H}$ этого HNN-расширения не реализуется в $T_g$, однако, реализуется в подходящем двулистном накрытии $\widetilde{T}_g$ (рис. 4).

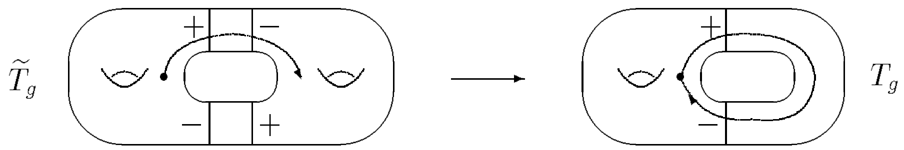


*Рис. 4*

**Теорема 3.1.** *Пусть $T$ – замкнутая поверхность и $\pi_1(T, x) = G \underset{H_1 = t^{-1}H_2t}{*}$. Если $H_1$ реализуется несжимаемой подповерхностью в $T$, то $G$ тоже реализуется несжимаемой подповерхностью в подходящем двулистном накрытии поверхности $T$. Более того, $G$ является фундаментальной группой графа групп с циклическими реберными группами и двумя выделенными вершинными группами $H_1$ и $H_2$.*

*Доказательство.* Утверждение очевидно в случае, когда $T$ – тор. Если $T$ – бутылка Клейна, то утверждение следует из леммы 3.2 и теоремы Нильсена об индуцируемости автоморфизмов фундаментальной группы замкнутой поверхности гомеоморфизмами этой поверхности (см. [6]).

**Лемма 3.2.** *Группа $A = \langle a, b \mid b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$ имеет единственное (с точностью до автоморфизмов) представление в виде HNN-расширения.*

*Доказательство.* Пусть $A = \langle G, t \mid H_1 = t^{-1}H_2t\rangle$. Так как всякая неединичная подгруппа бесконечного индекса в $A$ изоморфна $Z$, то $G \cong Z$. Несложные выкладки показывают, что $G = H_1$ и $t$ обращает порождающий группы $G$.

Предположим теперь, что $T$ не является тором и бутылкой Клейна.

Пусть $(R_0, v_0)$ и $(R_1, v_1)$ – розы, фундаментальные группы которых отождествлены с $G$ и $H_1$. Соединим вершины $v_1$ и $v_0$ ребрами $e_1$ и $e_2$ и к полученному графу $\Gamma$

приклеим клетки так, чтобы фундаментальная группа построенного комплекса $K$ относительно вершины $v_1$ естественно отождествилась с группой $G \underset{H_1=t^{-1}H_2t}{*}$ (рис. 5).

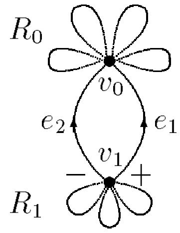


*Рис. 5*

При этом элементы группы $G$ изображаются петлями в $\{v_1\}\cup\{e_1,\bar{e}_1\}\cup R_0$ с началами в $v_1$, проходная буква $t$ изображается петлей $e_1e_2^{-1}$.

Более точно, пусть $\varphi : H_1 \to H_2$ – изоморфизм такой, что $\varphi(h) = tht^{-1}$ для $h \in H_1$. Пусть $\{h_1,\dots,h_n\}$ – базис $H_1$, $\{g_1,\dots,g_m\}$ – базис $G$ и $h_i = u_i(g_1,\dots,g_m)$, $\varphi(h_i) = w_i(g_1,\dots,g_m)$. Тогда к графу $\Gamma$ приклеим клетки с границами $\widetilde{h}_ie_1\widetilde{u}_i^{-1}e_1^{-1}$ и $\widetilde{h}_ie_2\widetilde{w}_i^{-1}e_2^{-1}$, где $\widetilde{h}_i$ – петля в $R_1$, соответствующая элементу $h_i$; $\widetilde{u}_i$ и $\widetilde{w}_i$ – петли в $R_0$, соответствующие словам $u_i$ и $w_i$. Полученный комплекс обозначим через $K$.

Как и в доказательстве теоремы 2.6 можно построить непрерывное отображение $f : (T,x) \to (K,v_1)$, индуцирующее изоморфизм фундаментальных групп. Далее мы отождествляем $\pi_1(T,x)$ и $\pi_1(K,v_1)$ с помощью $f_*$.

Предположим сначала, что поверхность $T$ ориентируема. В этом случае можно добиться, чтобы прообраз $f^{-1}(R_1)$ состоял только из одной компоненты связности и совпадал с несжимаемой подповерхностью $S$ в $T$, реализующей подгруппу $H_1$. Компоненту границы $S$ назовем положительной (отрицательной), если существует ее окрестность, отображающаяся в $e_1$ (в $e_2$).

Пусть $M_1,\dots,M_r$ – компоненты связности $T - int(S)$, упорядоченные так, что для некоторого $p \leqslant r$ каждая из компонент $M_1,\dots,M_p$ имеет по крайней мере одну положительную компоненту границы, каждая из компонент $M_{p+1},\dots,M_r$ имеет только отрицательные компоненты границы. Заметим, что существует $M_i$, у которой имеются как положительные, так и отрицательные компоненты границы. В противном случае из рассмотрения отображения $f : T \to K$ следовало бы, что группа $\pi_1(T,x)$ порождается $G$ и $t^{-1}Gt$, что невозможно. Поэтому считаем, что $M_1$ – одна из таких компонент.

Выпишем представление группы $\pi_1(T,x)$ относительно разбиения $T$ на $S$ и $M_1,\dots,M_r$. Положительные компоненты границы $S$, лежащие в $M_i$, обозначим через $a_{i1},\dots,a_{in_i}$, отрицательные – через $b_{i1},\dots,b_{im_i}$. В каждой такой компоненте $a_{ij}$, $b_{ij}$ выберем по точке, выберем ориентацию и будем рассматривать $a_{ij}$ и $b_{ij}$ как петли.

В $S$ выберем базисную точку $x$ и простые пути $P_{ij}$ и $Q_{ij}$, ведущие из $x$ в начала $a_{ij}$ и $b_{ij}$ соответственно. В каждой $M_i$ выберем базисную точку $x_i$ и простые пути $p_{ij}$ и $q_{ij}$, ведущие из $x_i$ в начала $a_{ij}$ и $b_{ij}$ соответственно. Считаем, что эти пути попарно не пересекаются по внутренним точкам (рис. 6).

$\dots$

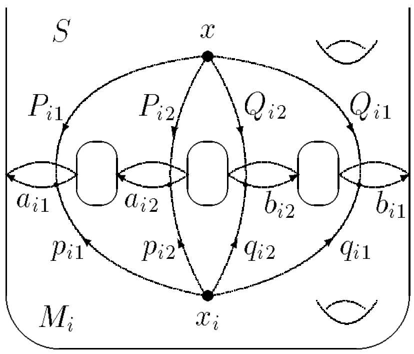


*Рис. 6*

Для $i \leqslant p$ обозначим

$$x_{ij} = P_{ij} a_{ij} P_{ij}^{-1}, \quad y_{ij} = Q_{ij} b_{ij} Q_{ij}^{-1}, \quad x'_{ij} = P_{i1} p_{i1}^{-1} p_{ij} a_{ij} p_{ij}^{-1} p_{i1} P_{i1}^{-1},$$

$$y'_{ij} = P_{i1} p_{i1}^{-1} q_{ij} b_{ij} q_{ij}^{-1} p_{i1} P_{i1}^{-1}, \quad t_{ij} = P_{i1} p_{i1}^{-1} p_{ij} P_{ij}^{-1}, \quad l_{ij} = P_{i1} p_{i1}^{-1} q_{ij} Q_{ij}^{-1}.$$

Для $i > p$ обозначим

$$u_{ij} = Q_{ij} b_{ij} Q_{ij}^{-1}, \quad v_{ij} = Q_{i1} q_{i1}^{-1} q_{ij} b_{ij} q_{ij}^{-1} q_{i1} Q_{i1}^{-1}, \quad d_{ij} = Q_{i1} q_{i1}^{-1} q_{ij} Q_{ij}^{-1}.$$

При $i \leqslant p$ вложим группу $\pi_1(M_i, x_i)$ в группу $\pi_1(T, x)$ посредством отображения $[l] \mapsto [P_{i1} p_{i1}^{-1} l p_{i1} P_{i1}^{-1}]$, а при $i > p$ посредством отображения $[l] \mapsto [Q_{i1} q_{i1}^{-1} l q_{i1} Q_{i1}^{-1}]$. Образ этого вложения обозначим через $\pi_1(M_i)$. Далее, чтобы не загромождать обозначений, мы будем обозначать петли и их гомотопические классы одной и той же буквой. Условимся, что пары индексов $i, k$ и $i, j$ и пара индексов $k, j$ пробегают множества $\bigcup\limits_{1 \leqslant s \leqslant p} (\{s\} \times \{1, \dots, n_s\})$, $\bigcup\limits_{1 \leqslant s \leqslant p} (\{s\} \times \{1, \dots, m_s\})$ и $\bigcup\limits_{p+1 \leqslant s \leqslant r} (\{s\} \times \{1, \dots, m_s\})$. Пусть $F$ – свободная группа с базисом $\{t_{ik}, l_{ij}, d_{kj}\}$. Тогда группа $\pi_1(T, x)$ имеет представление

$$\begin{gathered} \langle \pi_1(S, x) * \pi_1(M_1) * \dots * \pi_1(M_r) * F \mid \\ t_{i1} = 1,\ t_{ik} x_{ik} t_{ik}^{-1} = x'_{ik},\ l_{ij} y_{ij} l_{ij}^{-1} = y'_{ij},\ d_{k1} = 1,\ d_{kj} u_{kj} d_{kj}^{-1} = v_{kj} \rangle. \end{gathered} \tag{2}$$

Введем новые порождающие $L_{ij}$, $y''$ $(y \in \pi_1(S, x))$, $D_{kj}$, $v''$ $(v \in \cup_{s=p+1}^{r} \pi_1(M_s))$ и соотношения $L_{ij} = l_{ij} l_{11}^{-1}$, $y'' = l_{11} y l_{11}^{-1}$, $D_{kj} = l_{11} d_{kj} l_{11}^{-1}$, $v'' = l_{11} v l_{11}^{-1}$. Через $\pi_1(S'')$ обозначим изоморфную копию группы $\pi_1(S, x)$, состоящую из элементов $y''$, где $y$ пробегает $\pi_1(S, x)$. Через $\pi_1(M''_i)$ обозначим изоморфную копию группы $\pi_1(M_i)$, состоящую из элементов $v''$, где $v$ пробегает $\pi_1(M_i)$. В дальнейшем эти группы будут соответствовать подповерхностям $S''$ и $M''_i$ в двулистном накрытии $\widetilde{T}$. Через $\mathcal{F}$ обозначим свободную группу с базисом $\{t_{ik}, L_{ij}, D_{kj}\}$. Тогда с помощью преобразований Тице можно переписать представление (2) в виде

$$\langle \pi_1(S, x) * \pi_1(M_1) * \dots * \pi_1(M_p) * \pi_1(M''_{p+1}) * \dots * \pi_1(M''_r) * \pi_1(S'') * \mathcal{F},\ l_{11} \mid$$

$$t_{i1} = 1,\ \ t_{ik} x_{ik} t_{ik}^{-1} = x'_{ik},\ \ L_{11} = 1,\ \ L_{ij} y''_{ij} L_{ij}^{-1} = y'_{ij},\ \ D_{k1} = 1,\ \ D_{kj} u''_{kj} D_{kj}^{-1} = v''_{kj},$$

$$l_{11}yl_{11}^{-1} = y'' \ (y \in \pi_1(S,x))\rangle. \tag{3}$$

Теперь видно, что $\pi_1(T,x)$ является HNN-расширением с базой $G' = \langle \pi_1(S,x),\, \pi_1(M_1), \ldots, \pi_1(M_p),\, \pi_1(M''_{p+1}), \ldots, \pi_1(M''_r),\, \pi_1(S''),\, \mathcal{F}\rangle$, проходной буквой $l_{11}$ и ассоциированными подгруппами $\pi_1(S,x)$ и $\pi_1(S'')$:

$$\pi_1(T,x) = \langle G',\, l_{11} \,|\, \pi_1(S'') = l_{11}\pi_1(S,x)l_{11}^{-1}\rangle. \tag{4}$$

**Лемма 3.3.** *Пусть $l$ – петля в $T$ с началом в $x$.*

1) *Если $l$ пересекает только положительные компоненты границы $S$, то $[l] \in G$.*

2) *Если $l$ пересекает только отрицательные компоненты границы $S$, то $[l] \in t^{-1}Gt$.*

3) *Если $l$ пересекает трансверсально только две компоненты границы $S$, сначала положительную, затем отрицательную, то $[l] = gt$ для некоторого $g \in G$.*

*Доказательство.* Рассмотрим петлю $f(l)$ в $K$. В первом случае $f(l)$ гомотопна петле из подкомплекса $\{v_1\} \cup \{e_1, \bar{e}_1\} \cup R_0$, фундаментальная группа которого отождествлена с $G$. Во втором случае $f(l)$ гомотопна петле из подкомплекса $\{v_1\} \cup \{e_2, \bar{e}_2\} \cup R_0$, фундаментальная группа которого отождествляется с $t^{-1}Gt$.

В третьем случае $f(l)$ гомотопна петле вида $h_1e_1ue_2^{-1}h_2$, где $h_1, h_2$ – петли в $R_1$, $u$ – петля в $R_0$, и значит, гомотопна петле $h_1e_1ue_1^{-1} \cdot e_1e_2^{-1}h_2e_2e_1^{-1} \cdot e_1e_2^{-1}$. Так как $[h_1e_1ue_1^{-1}] \in G$, $[e_1e_2^{-1}] = t$ и $tH_1t^{-1} = H_2 \leqslant G$, то $[l] = gt$, где $g \in G$.

**Лемма 3.4.** $G' = G$.

*Доказательство.* Из леммы 3.3 следует, что $\pi_1(M_i) \leqslant G$ при $i = 1, \ldots, p$, $\pi_1(M_i) \leqslant t^{-1}Gt$ при $i = p+1, \ldots, r$, $t_{ik} \in G$, $l_{ij} = g_{ij}t$, где $g_{ij} \in G$, и $d_{kj} = t^{-1}f_{kj}t$, где $f_{kj} \in G$. Также $\pi_1(S'') = l_{11}\pi_1(S,x)l_{11}^{-1} = g_{11}tH_1t^{-1}g_{11}^{-1} = g_{11}H_2g_{11}^{-1} \leqslant G$. Поэтому $G' \leqslant G$. Заменим в исходном представлении $\langle G,\, t \,|\, H_2 = tH_1t^{-1}\rangle$ проходную букву $t$ на проходную букву $l_{11}$. Получим новое представление $\langle G,\, l_{11} \,|\, g_{11}H_2g_{11}^{-1} = l_{11}H_1l_{11}^{-1}\rangle = \langle G,\, l_{11} \,|\, \pi_1(S'') = l_{11}\pi_1(S,x)l_{11}^{-1}\rangle$. Из нормальной формы HNN-расширения и (4) следует, что $G = G'$.

Докажем, что $G$ реализуется в двулистном накрытии $\widetilde{T}$ поверхности $T$, получающемся из двух копий поверхности $T$ разрезанием их по кривым $b_{sj}$, где $s \in \{i,k\}$, и переклеиванием ручек накрест. Более точно, разрежем поверхность $T$ по всем кривым $b_{sj}$. Получится поверхность (возможно несвязная) с краями $\dot{b}_{sj}$ и $\ddot{b}_{sj}$. Возьмем две копии $T'$ и $T''$ этой поверхности и приклеим края $\dot{b}_{sj}$ и $\ddot{b}_{sj}$ одной копии к краям $\ddot{b}_{sj}$ и $\dot{b}_{sj}$ другой копии. Полученную поверхность обозначим через $\widetilde{T}$ (рис. 7). Пусть $\rho : \widetilde{T} \to T$ – накрывающее отображение. Считаем, что поверхности $T'$ и $T''$ естественно вложены в $\widetilde{T}$ и обозначим через $S'$ и $S''$ компоненты $\rho^{-1}(S)$, лежащие в $T'$ и $T''$. Компоненты границ поверхностей $S'$ и $S''$, отображающиеся посредством $\rho$ в положительные (отрицательные) компоненты границы $S$, назовем положительными (отрицательными).

Обозначим через $M'$ подповерхность $T' \cup S''$ в $\widetilde{T}$, через $M''$ подповерхность $T'' \cup S'$. Очевидно, $M'$ является одной из компонент связности, получающихся путем разрезания $\widetilde{T}$ вдоль отрицательных компонент границы $S'$ и вдоль положительных компонент границы $S''$. Подповерхность $M'$ закрашена на рис. 7. Через $x'$ и $x''$ обозначим поднятия точки $x$, лежащие в подповерхностях $S'$ и $S''$. В качестве базисной точки поверхности $\widetilde{T}$ возьмем точку $x'$. Теперь ясно, что $\pi_1(M', x') = G' = G$. Последнее утверждение теоремы вытекает из рассмотрения поверхности $M'$ или из представления (3) с учетом того, что $\pi_1(S, x) = H_1$, $\pi_1(S'') = g_{11}H_2g_{11}^{-1}$.

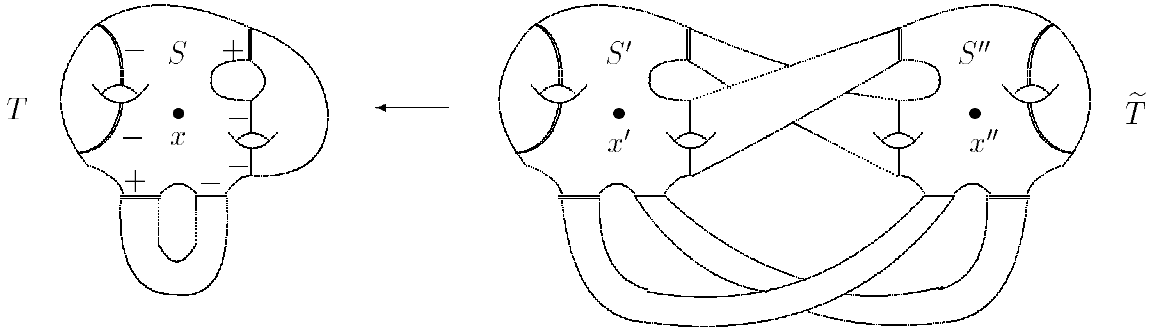


*Рис. 7*

Предположим теперь, что поверхность $T$ неориентируема. В этом случае не всегда можно добиться, чтобы прообраз $f^{-1}(R_1)$ состоял только из одной компоненты связности и совпадал с несжимаемой подповерхностью $S$ в $T$, реализующей подгруппу $H_1$. Препятствием является случай 3 из § 2, точнее, его подслучай, когда $f_*^{-1}(z) \in a\pi_1(S, x)$ (здесь и далее мы используем обозначения из анализа этого случая). Тогда $f_*(a) = zh$ для некоторого $h \in H_1$. Кроме того, в этом случае выполняется $a^2 \in \pi_1(S, x)$ и, значит, $f_*(a^2) \in H_1$. Чтобы точнее установить вид элемента $f_*(a)$, рассмотрим 4 варианта.

1) Края $S \cap C$ и $C \cap S_1$ положительны. Тогда $z \in G$ и, значит, $f_*(a) \in G$.

2) Края $S \cap C$ и $C \cap S_1$ отрицательны. Тогда $z \in t^{-1}Gt$ и, значит, $f_*(a) \in t^{-1}Gt$.

3) Край $S \cap C$ положителен, а край $C \cap S_1$ отрицателен. Тогда $z = gt$ для некоторого $g \in G$, что противоречит включению $(zh)^2 \in H_1$.

4) Край $S \cap C$ отрицателен, а край $C \cap S_1$ положителен. Тогда $z = t^{-1}g$ для некоторого $g \in G$ и этот вариант тоже невозможен.

Если выполняется первый (второй) вариант, то скажем, что лист Мебиуса $M$, рассматриваемый в случае 3 из § 2, имеет вид 1 (вид 2). Действуя, как в § 2, можно добиться, что $f^{-1}(R_1)$ будет иметь единственную компоненту вне объединения листов Мебиуса вида 1 и 2. Обозначим эту компоненту через $S$. Далее доказательство проводится, как в ориентируемом случае.

## § 4. Почти геометричность представлений группы $\pi_1(T, x)$ в виде фундаментальной группы конечного графа групп

Прежде чем доказывать теоремы 4.7 и 4.8, приведем несколько технических лемм в предположении, что $T$ – замкнутая поверхность с базисной точкой $x$.

**Лемма 4.1.** *Пусть $A_1 \leqslant A_2 \leqslant \pi_1(T, x)$. Если $S_1$ и $S_2$ – несжимаемые подповерхности в $T$, реализующие $A_1$ и $A_2$, то существует изотопия $i$ такая, что подповерхность $i(S_1)$ лежит в $S_2$ и реализует $A_1$.*

*Доказательство* аналогично доказательству леммы 2.4 из [1].

**Лемма 4.2.** *Пусть $A_1 \leqslant A_2 \leqslant \pi_1(T, x)$. Если $A_1$ реализуется в $T$, то $A_1$ реализуется и в накрытии, соответствующем $A_2$.*

Справедлива более общая лемма 4.3.

**Лемма 4.3.** *Пусть $A_1, A_2 \leqslant \pi_1(T, x)$. Если $A_1$ реализуется в $T$, то $A_1 \cap A_2$ реализуется в накрытии, соответствующем $A_2$.*

*Доказательство.* Пусть $S$ – несжимаемая подповерхность в $T$, $x \in S$ и $\pi_1(S, x) = A_1$. Пусть $p : (\widetilde{T}, \widetilde{x}) \to (T, x)$ – накрытие, соответствующее $A_2$. Тогда компонента прообраза $p^{-1}(S)$, содержащая $\widetilde{x}$, реализует $A_1 \cap A_2$ в $\widetilde{T}$.

Пусть $S$ – несжимаемая подповерхность в $T$, $q$ – путь из $x$ в некоторую точку $u \in S$. Скажем, что подгруппа $H \leqslant \pi_1(T, x)$ реализуется парой $(q, S)$, если $H = \{[qlq^{-1}] \mid [l] \in \pi_1(S, u)\}$.

**Лемма 4.4.** *Пусть $A_1 \leqslant A_2 \leqslant \pi_1(T, x)$. Если $A_1$ и $A_2$ реализуются парами $(q_1, S_1)$ и $(q_2, S_2)$, то $A_1$ реализуется также парой $(q_2, S_2')$, где $S_2' \subset S_2$.*

*Доказательство.* Заменяя базисную точку, можно считать, что $q_2$ – тождественный в точке $x$ путь. Пусть $q_1'$ – некоторый простой путь из $x$ в конец пути $q_1$, причем $q_1'$ и $\partial S_1$ имеют не более одной общей точки. Пусть $S_1'$ – объединение $S_1$ и малой регулярной окрестности кривой $q_1'$. Тогда $\pi_1(S_1', x)$ сопряжено с $A_1$ элементом $[q_1' q_1^{-1}]$. Пусть $i$ – изотопия, индуцирующая сопряжение этим элементом. Тогда $i(S_1')$ – подповерхность, реализующая $A_1$. По лемме 4.1 подгруппа $A_1$ реализуется также некоторой подповерхностью $S_2'$ в $S_2$.

**Следствие 4.5.** *Если подгруппа $A \leqslant \pi_1(T, x)$ реализуется парой $(q, S)$, то она реализуется и некоторой несжимаемой подповерхностью в $T$.*

Обозначим эту подповерхность через $\{q, S\}$.

**Лемма 4.6.** *Пусть $\pi_1(\mathbb{G}, X, v) = \pi_1(T, x)$ и реберные подгруппы реализуются в $T$. Пусть $H$ – такая подгруппа конечного индекса в $\pi_1(\mathbb{G}, X, v)$, что для соответствующего ей накрытия $p : (\widetilde{T}, \widetilde{x}) \to (T, x)$ вершинные подгруппы ее индуцированного разложения $\pi_1(\mathbb{H}, Y, w)$ реализуются в $\widetilde{T}$. Тогда естественное отождествление $\pi_1(\mathbb{H}, Y, w)$ с $\pi_1(\widetilde{T}, \widetilde{x})$ геометрично.*

*Доказательство.* Граф $(Y, w)$ является $n$-листным накрытием графа $(X, v)$, где $n = |G : H|$. Пусть $\Gamma$ – некоторое максимальное поддерево в $X$. Максимальное поддерево $\Delta$ в $Y$ можно выбрать так, чтобы оно содержало все $n$ поднятий дерева $\Gamma$. Будем считать, что вершинные и реберные подгруппы группы $G = \pi_1(\mathbb{G}, X, v)$ (группы $H$) определены относительно $\Gamma$ (относительно $\Delta$). Для каждой вершины $u \in X^0$ обозначим через $u_1, \dots, u_n$ все ее поднятия в $Y$. Обозначим через $l_i$ путь без возвращений в $\Delta$ из $w$ в $w_i$, а через $g_i$ – элемент $G$, определяемый проекцией пути $l_i$

в $X$. Очевидно, $L = \{g_1, \ldots, g_n\}$ – система представителей правых смежных классов $G$ по $H$.

Каждая вершинная подгруппа $H$ имеет вид $gVg^{-1} \cap H$, где $g \in L$, $V$ – некоторая вершинная подгруппа $G$. Если $E$ – реберная подгруппа в $V$, то $gEg^{-1} \cap H$ – реберная подгруппа в $gVg^{-1} \cap H$. По условию подгруппа $gVg^{-1} \cap H$ реализуется подповерхностью $S_{g,V}$ в $(\widetilde{T}, \widetilde{x})$. Пусть $l$ – некоторая петля в $T$, гомотопический класс которой равен $g$, $\widetilde{l}$ – ее поднятие в $\widetilde{T}$ с началом $\widetilde{x}$. Пусть $S_E$ – подповерхность в $T$, реализующая $E$, и $S_{g,E}$ – ее поднятие в $\widetilde{T}$, содержащее конец $\widetilde{l}$. Тогда подгруппа $gEg^{-1} \cap H$ реализуется в $\widetilde{T}$ парой $(\widetilde{l}, S_{g,E})$. По следствию 4.5 и лемме 4.1 она реализуется подповерхностью в $S_{g,V}$.

Для любой вершины $u \in Y^0$ положим $u_* = \widetilde{x}$. Пусть $e$ – ребро в $Y$ с началом $u_1$ и концом $u_2$, $E_1$ и $E_2$ – соответствующие $e$ и $\bar{e}$ реберные подгруппы $H$. Пусть $p_i$ – путь в дереве $\Delta$ из $w$ в $u_i$. Тогда $E_1$ и $E_2$ сопряжены элементом $t = p_1 e p_2^{-1}$. Пусть $e_*$ – некоторая петля в $(\widetilde{T}, \widetilde{x})$, гомотопический класс которой равен $t$. Это задает реализацию графа групп $(\mathbb{H}, Y)$ в $\widetilde{T}$, относительно которой естественное отождествление $\pi_1(\mathbb{H}, Y, w)$ с $\pi_1(\widetilde{T}, \widetilde{x})$ геометрично.

**Теорема 4.7.** *Пусть $T$ – замкнутая поверхность, $(\mathbb{G}, X)$ – конечный граф групп, $\varphi : \pi_1(\mathbb{G}, X, v) \to \pi_1(T, x)$ – изоморфизм и образы реберных подгрупп реализуются в $T$. Тогда существует подгруппа $H$ индекса $2^{rk(X)}$ в $\pi_1(\mathbb{G}, X, v)$ такая, что для ее индуцированного разложения $\pi_1(\mathbb{H}, Y, w)$ и соответствующего ей накрытия $p : (\overline{T}, \overline{x}) \to (T, x)$ изоморфизм $p_*^{-1} \circ \varphi|_H : \pi_1(\mathbb{H}, Y, w) \to \pi_1(\overline{T}, \overline{x})$ геометричен.*

*Доказательство.* Мы будем отождествлять группы $\pi_1(\mathbb{G}, X, v)$ и $\pi_1(T, x)$ посредством $\varphi$ и группы $\pi_1(\mathbb{H}, Y, w)$ и $\pi_1(\overline{T}, \overline{x})$ посредством $p_*^{-1} \circ \varphi|_H$. Если $T$ тор или бутылка Клейна, то доказательство проводится непосредственно (в случае HNN-расширения подгруппа $H$ определена ниже). Поэтому предположим, что $T$ не является тором или бутылкой Клейна.

Выберем в $X$ максимальное поддерево $\Gamma$ и ориентацию $X^1_+$. Для $u \in X^0$ обозначим через $p_u$ путь без возвращений в $\Gamma$ из $v$ в $u$. Пусть $X^1_+ - \Gamma = \{e_1, \ldots, e_k\}$. Через $t_i$ обозначим элемент группы $\pi_1(\mathbb{G}, X, v)$, равный $p_{\alpha(e_i)} e_i p^{-1}_{\omega(e_i)}$. Докажем индукцией по $k$, что в качестве $H$ можно взять ядро эпиморфизма $\pi_1(\mathbb{G}, X, v) \to \prod_{i=1}^k \langle t_i \,|\, t_i^2 = 1\rangle$, переводящего вершинные группы в 1 и $t_i$ в $t_i$. Пусть далее $H$ обозначает это ядро.

Предположим, что $k = 0$, то есть $X$ – дерево. По лемме 4.6 достаточно доказать, что каждая вершинная группа $G_v$ реализуется в $T$. Пусть $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$ – множество всех ребер в $X$ с началом в $v$. Для $e \in E$ граф $X - \{e, \bar{e}\}$ состоит из двух компонент связности. Компоненту, содержащую $v$, обозначим через $X_{1,e}$, другую – через $X_{2,e}$ В соответствии с этим разбиением имеем разложение $\pi_1(\mathbb{G}, X, v) = G_{1,e} \underset{G_e}{*} G_{2,e}$. По теореме 2.6 это разложение геометрично, то есть существуют несжимаемые подповерхности $S_{1,e}, S_{2,e}$ и $S_e$, реализующие $G_{1,e}$, $G_{2,e}$ и $G_e$, причем $T = S_{1,e} \cup S_{2,e}$ и $S_e = S_{1,e} \cap S_{2,e}$. Построим цепочку несжимаемых подповерхностей $S_{1,v} \supseteq S_{2,v} \supseteq \cdots \supseteq S_{m,v}$ таких, что $\pi_1(S_{i,v}, x) = G_{1,e_1} \cap \cdots \cap G_{1,e_i}$, $i = 1, \ldots, m$. Тогда $S_{m,v}$ реализует $G_v$. Положим $S_{1,v} = S_{1,e}$. Предположим, что подповерхность $S_{i,v}$ уже определена. Так как $G_{e_{i+1}} \leqslant G_{1,e_1} \cap \cdots \cap G_{1,e_i}$, то по лемме 4.1 можно считать, что $S_{e_{i+1}} \subseteq S_{i,v}$. Положим $S_{i+1,v} = S_{i,v} \cap S_{1,e_{i+1}}$.

Итак, при $k = 0$ теорема доказана. Пусть $k = n \geqslant 1$ и теорема доказана для $k = n - 1$. Имеем $\pi_1(\mathbb{G}, X, v) = \langle G, t \mid H_1 = t^{-1}H_2t\rangle$, где $G$ – фундаментальная группа графа групп $(\mathbb{G}_1, X_1)$, получающегося из $(\mathbb{G}, X)$ удалением ребер $e_n, \bar{e}_n$ и групп $G_{e_n}, G_{\bar{e}_n}$; $t = t_n$, $H_1$ и $H_2$ – ассоциируемые подгруппы, соответствующие вложениям $\alpha_{e_n}$ и $\alpha_{\bar{e}_n}$ в вершинные группы $V_1$ и $V_2$.

Пусть $K$ – ядро гомоморфизма $\langle G, t \mid H_1 = t^{-1}H_2t\rangle \to \langle t \mid t^2 = 1\rangle$, переводящего $G$ в 1 и $t$ в $t$. Индуцированное разложение $K$ является фундаментальной группой графа групп $\mathcal{K}$, изображенного на рис. 8 слева. При этом группы $H_1$ и $H_2$ вкладывается в верхнюю вершинную группу $G$ тождественно, а в нижнюю посредством отображений $h_1 \mapsto th_1t^{-1}$ $(h_1 \in H_1)$ и $h_2 \mapsto t^{-1}h_2t$ $(h_2 \in H_2)$.


*Рис. 8*

Обозначим через $N$ ядро эпиморфизма $G = \pi_1(\mathbb{G}_1, X_1, v) \to \prod_{i=1}^{n-1}\langle t_i \mid t_i^2 = 1\rangle$, переводящего вершинные группы в 1 и $t_i$ в $t_i$. В графе групп $\mathcal{N}$, соответствующем разложению $N$ относительно $\pi_1(\mathbb{G}_1, X_1, v)$, имеются $2^{n-1}$ вершин с вершинными группами $V_1$ и $2^{n-1}$ вершин с вершинными группами $V_2$.

Граф групп, соответствующий разложению $H$ относительно $\pi_1(\mathbb{G}, X, v)$, изображен на рис. 8 справа. Он получается из двух копий $\mathcal{N}$ (верхней и нижней) соединением их $2^{n-1}$ ребрами с реберными группами $H_1$ и $2^{n-1}$ ребрами с реберными группами $H_2$. Каждое $H_1$-ребро соединяет $V_1$-вершину верхней копии с соответствующей ей $V_2$-вершиной нижней копии. Каждое $H_2$-ребро соединяет $V_2$-вершину верхней копии с соответствующей ей $V_1$-вершиной нижней копии.

Группе $K$ соответствует накрытие $\widetilde{T}$ из доказательства теоремы 3.1. Неформально говоря, вершинным группам $G, G$ и реберным группам $H_1, H_2$ графа групп $\mathcal{K}$ соответствуют подповерхности $M', M''$ и $S', S''$ в $\widetilde{T}$. Заметим, что $\widetilde{T} = M' \cup M''$, $M' \cap M'' = S' \cup S''$ и $S' \cap S'' = \emptyset$ (см. рис. 7).

Укажем теперь формально реализацию графа групп $\mathcal{K}$ в $\widetilde{T}$. Пусть $l$ – некоторая петля в $T$, гомотопический класс которой равен $t$. Обозначим через $l'$ поднятие этой петли в $M'$ с началом $x'$ и концом $x''$. Обозначим через $l''$ поднятие этой петли в $M''$ с началом $x''$ и концом $x'$. Вершинам графа из $\mathcal{K}$ соответствуют точки $x'$ и $x''$, ребрам – пути $l', l''$ и обратные к ним. Вершинным группам соответствуют подповерхности с базисными точками $(M', x')$ и $(M'', x'')$, реберным группам – подповерхности $S'$ и $\{l', S''\}$ в $M'$ и подповерхности $\{l'', S'\}$ и $S''$ в $M''$.

По леммам 4.1 и 4.2 реберные подгруппы группы $G$, соответствующие ребрам $e_1, \ldots, e_{n-1}$, реализуются в $M'$. По индукции граф групп $\mathcal{N}$ геометрически реализуется в $2^{n-1}$-листном накрытии $\overline{M'}$ поверхности $M'$, соответствующем подгруппе $N$ группы $G$. Так как это накрытие регулярно, $H_1 \leqslant N$ и $H_1$ реализуется в $M'$

подповерхностью $S'$, то в $\overline{M'}$ имеется $2^{n-1}$ различных поднятий подповерхности $S'$. Аналогично в $\overline{M'}$ имеется $2^{n-1}$ различных поднятий подповерхности $S''$. Симметрично строится $2^{n-1}$-листное накрытие $\overline{M''}$ поверхности $M''$.

Склеим $\overline{M'}$ и $\overline{M''}$ по соответствующим друг другу поднятиям подповерхностей $S', S''$. В результате получится $2^n$-листное накрытие $\overline{T}$, соответствующее подгруппе $H$. В $\overline{T}$ реализуются все вершинные подгруппы группы $H$. По лемме 4.6 естественное отождествление $\pi_1(\mathbb{H}, Y, w)$ с $\pi_1(\overline{T}, \overline{x})$ геометрично.

В доказательстве теоремы 4.8 мы будем использовать следующую теорему Скотта.

**Теорема** [13]. *Пусть $\Sigma$ – компактная поверхность с выделенной точкой $x$. Для каждой конечно порожденной подгруппы $H$ группы $\pi_1(\Sigma, x)$ существует конечнолистное накрытие $p : (\Sigma_1, x_1) \to (\Sigma, x)$ и несжимаемая подповерхность $S \subseteq \Sigma_1$ такая, что $x_1 \in int(S)$ и $p_*(\pi_1(S, x_1)) = H$.*

В формулировке следующей теоремы используются числа $s_e$. Напомним их определение. Пусть $\mathcal{A}$ – фиксированная система порождающих группы $\pi_1(T, x)$, $\varphi : \pi_1(\mathbb{G}, X, v) \to \pi_1(T, x)$ – изоморфизм. Выберем в $X$ некоторое максимальное поддерево и определим относительно него реберные подгруппы $G_e$ группы $\pi_1(\mathbb{G}, X, v)$. Предположим, что все группы $G_e$ конечно порождены. Выберем в $\varphi(G_e)$ некоторое конечное множество порождающих и обозначим через $s_e$ сумму длин его элементов относительно множества $\mathcal{A}$.

**Теорема 4.8.** *Пусть $T$ – замкнутая поверхность, $(\mathbb{G}, X)$ – конечный граф групп с конечно порожденными реберными группами, $\varphi : \pi_1(\mathbb{G}, X, v) \to \pi_1(T, x)$ – изоморфизм. Тогда существует подгруппа $H$ конечного индекса $n$ в $\pi_1(\mathbb{G}, X, v)$ такая, что для ее индуцированного разложения $\pi_1(\mathbb{H}, Y, w)$ и соответствующего ей накрытия $p : (\widetilde{T}, \widetilde{x}) \to (T, x)$ изоморфизм $p_*^{-1} \circ \varphi|_H : \pi_1(\mathbb{H}, Y, w) \to \pi_1(\widetilde{T}, \widetilde{x})$ геометричен.*

*Число $n$ оценивается сверху рекурсивной функцией от $s = \sum_{e \in X^1} s_e$.*

*Доказательство.* Отождествим группы $\pi_1(\mathbb{G}, X, v)$ и $\pi_1(T, x)$ с помощью изоморфизма $\varphi$. По теореме Скотта для каждой реберной подгруппы $G_e$ существует подгруппа конечного индекса $G'_e \leqslant \pi_1(T, x)$ такая, что $G_e$ реализуется в конечнолистном накрытии, соответствующем $G'_e$. Для всякого $g \in \pi_1(T, x)$ подгруппа $G_e^g$ реализуется в конечнолистном накрытии, соответствующем $(G'_e)^g$. Положим $N = \bigcap_{e \in X^1}(\bigcap_{g \in \pi_1(T,x)}(G'_e)^g)$. Очевидно, $N$ – подгруппа конечного индекса в $\pi_1(T, x)$. Обозначим через $\overline{T}$ накрытие, соответствующее $N$. Реберные группы, участвующие в индуцированном разложении $N = \pi_1(\mathbb{N}, Z, u)$, имеют вид $G_e^g \cap N$ и по лемме 4.3 реализуются несжимаемыми подповерхностями в $\overline{T}$. По теореме 4.7 в $N$ существует подгруппа $H$ индекса $2^{rk(Z)}$, чье индуцированное разложение $\pi_1(\mathbb{H}, Y, w)$ реализуется в соответствующем $2^{rk(Z)}$-листном накрытии $\widetilde{T}$ поверхности $\overline{T}$.

Займемся оценкой числа $n$. Так как группа $\pi_1(T, x)$ не представляется в виде нетривиального свободного произведения, то можно считать, что все группы $G_e$ неединичны и, значит, $|X^1| \leqslant s$. В [13] предложена процедура построении накрытия, отвечающего $G'_e$, в которой используется ядро накрытия, отвечающего $G_e$. Эта процедура эффективна ввиду эффективности построения этого ядра (см. теорему 2.3 в [1]). Из анализа доказательств в [13] и [1] следует существование неубывающей рекурсивной функции $f$ такой, что $|\pi_1(T,x) : G'_e| \leqslant f(s_e)$. Тогда $m = |\pi_1(T,x) : N| \leqslant \prod_{e\in X^1}(f(s_e))! \leqslant ((f(s))!)^s$. По методу Райдемайстера – Шрайера $N$ порождается не более чем $(k-1)m+1$ элементами, где $k$ – число элементов множества, порождающего группу $\pi_1(T,x)$. Так как $\pi_1(Z,u)$ является факторгруппой группы $N$, то $rk(Z) \leqslant (k-1)m+1$. Отсюда выводится желаемая оценка числа $n$.

## § 5. Реберная жесткость

В этом параграфе мы исследуем разложения групп в фундаментальные группы графов групп, концентрируясь на следующем вопросе: насколько реберные подгруппы определяют вершинные? Уточним некоторые понятия и введем новые.

*Расширенным графом групп* назовем четверку $(\mathbb{G}, X, x, \Gamma)$, где $(\mathbb{G}, X)$ – граф групп, $x \in X^0$, $\Gamma$ – максимальное поддерево в $X$. Положим $\pi_1(\mathbb{G}, X, x, \Gamma) = \pi_1(\mathbb{G}, X, x)$. Для произвольной вершины $v \in X^0$ обозначим через $p_v$ путь без возвращений в $\Gamma$ из $x$ в $v$. Подгруппы $p_v G_v p_v^{-1}$ назовем вершинными подгруппами, подгруппы $p_{\alpha(e)}\alpha_e(G_e)p_{\alpha(e)}^{-1}$, где $e \in X^1$ – реберными подгруппами группы $\pi_1(\mathbb{G}, X, x, \Gamma)$.

Скажем, что $G$ обладает реберной жесткостью относительно конечного набора ее подгрупп $G_1, \ldots, G_n$, если существует только конечное число вариантов для наборов вершинных подгрупп при отождествлении $G$ с фундаментальной группой расширенного графа групп с реберными подгруппами $G_1, \ldots, G_n$.

Скажем, что группа $G$ обладает *реберной жесткостью*, если $G$ обладает реберной жесткостью относительно любого конечного набора ее конечно порожденных подгрупп.

**Теорема 5.1.** *Фундаментальная группа замкнутой поверхности, отличной от бутылки Клейна, обладает реберной жесткостью.*

*Доказательство.* Мы будем использовать терминологию и обозначения из доказательств теорем 2.6 и 3.1. Пусть $T$ – замкнутая поверхность, отличная от бутылки Клейна и тора (для которого теорема очевидна). Ее фундаментальная группа разлагается в свободное произведение только тривиальным образом. Поэтому достаточно доказать реберную жесткость $\pi_1(T,x)$ относительно любого конечного набора неединичных конечно порожденных подгрупп.

Предположим, что $\pi_1(T,x) = G_1 \underset{G_3}{*} G_2$ и $G_3$ реализуется несжимаемой подповерхностью $S$ в $T$. Из доказательства теоремы 2.6 следует, что $G_1$ равно фундаментальной группе объединения $S$ и некоторых компонент дополнения к $S$ в $T$, а $G_2$ равно фундаментальной группе объединения $S$ и остальных компонент дополнения. Поэтому если $G_3$ фиксировано, то для $G_1$ и $G_2$ имеется только конечное число возможностей.

Предположим, что группа $\pi_1(T,x)$ отождествлена с HNN-расширением $\langle G, t \,|\, H_1 = t^{-1}H_2t\rangle$ и $H_1$ реализуется несжимаемой подповерхностью $S$ в $T$. Из доказательства теоремы 3.1 следует, что $G = \pi_1(M', x')$, где $M'$ – подповерхность в двулистном накрытии $\widetilde{T}$ поверхности $T$. При этом $M'$ содержит $S'$ и $S''$ и ограничена отрицательными компонентами границы $S'$ и положительными компонентами границы $S''$. Если группа $H_1$ фиксирована, то имеется только конечное число вариантов для выбора отрицательных и положительных компонент границы $S$, а значит $S'$ и $S''$. Поэтому имеется только конечное число вариантов для $G$.

Предположим, что группа $\pi_1(T,x)$ отождествлена с фундаментальной группой $\pi_1(\mathbb{G},X,v,\Gamma)$, реберные подгруппы которой реализуются несжимаемыми подповерхностями в $T$. Пусть $u$ – произвольная вершина $X$. Через $E(u)$ обозначим множество всех ребер $X$ с началом в $u$. Для $e\in E$ обозначим через $X_{e,u}$ ту компоненту графа $X-\{e,\bar{e}\}$, в которой лежит $u$. Если компонента одна, то возникает HNN-расширение, если две, то свободное произведение с объединением. По доказанному выше подгруппа $G_{e,u}$, соответствующая компоненте $X_{e,u}$, определяется с точностью до конечного числа вариантов. Тогда и вершинная подгруппа $p_uG_up_u^{-1}=\bigcap_{e\in E(u)}G_{e,u}$ определяется с точностью до конечного числа вариантов.

Рассмотрим теперь общий случай, предполагая лишь, что реберные подгруппы группы $\pi_1(\mathbb{G},X,v,\Gamma)$ конечно порождены. По теореме 4.8 существует подгруппа $H$ конечного индекса $n$ в $\pi_1(\mathbb{G},X,v)$, индуцированное разложение $\pi_1(\mathbb{H},Y,w)$ которой геометрически реализуется в накрытии $(\widetilde{T},\widetilde{x})$, соответствующем $H$. При этом число $n$ зависит только от реберных подгрупп $G_e$ $(e\in X^1)$. По доказанному, при фиксированных подгруппах $G_e$ существует только конечное число вариантов для вершинных подгрупп группы $\pi_1(\mathbb{H},Y,w)$. Среди этих вершинных подгрупп имеются группы $G_u\cap H$, где $G_u$ пробегает вершинные подгруппы группы $\pi_1(\mathbb{G},X,v,\Gamma)$. По лемме 5.2 для групп $G_u$ тоже имеется только конечное число вариантов.

Следующая лемма вытекает из теоремы 6 в [9].

**Лемма 5.2.** *Пусть $T$ – компактная поверхность, отличная от бутылки Клейна, с базисной точкой $x$. Для любой неединичной конечно порожденной подгруппы $H\leqslant\pi_1(T,x)$ существует наибольшая подгруппа $G$ со свойством $|G:H|<\infty$.*

Очевидно, свободная группа ранга $n\geqslant 2$ не обладает свойством реберной жесткости относительно единичной подгруппы.

Фундаментальная группа бутылки Клейна $G=\langle a,b\,|\,b^{-1}ab=a^{-1}\rangle$ не обладает реберной жесткостью относительно подгруппы $\langle b^2\rangle$, так как для любого целого $k$ имеется разложение $G=\langle ba^{2k}\rangle \underset{\langle b^2\rangle}{*} \langle ba^{2k+1}\rangle$.

Приведем более экзотичные примеры групп $G$ без реберной жесткости (см. [7]). В этих примерах $G=A*_C B_i$, где подгруппы $A$ и $C$ фиксированны, $B_i\not\cong B_j$ при $i\neq j$. В первом примере каждая из групп $B_i$ представляется в виде свободного произведения с объединением, во втором – в виде HNN-расширения.

**1.** Пусть $C<A$, $\{C_i\}_{i\geqslant 1}$ – собственные подгруппы группы $C$, $\tau_i:C_1\to C_i$ – изоморфизмы и $\{a_i\}_{i\geqslant 1}$ – элементы из $A$ такие, что $a_1=1$ и $\tau_i(c_1)=a_ic_1a_i^{-1}$ для всех $c_1\in C_1$, $i\geqslant 1$. Пусть $D_1<D$, $\varphi:C_1\to D_1$ – изоморфизм. Положим $\varphi_i=\varphi\circ\tau_i^{-1}$, $B_i=C*_{C_i\overset{\varphi_i}{=}D_1}D$ и $G_i=A*_CB_i$. Очевидно, для каждого $i\geqslant 1$ существует изоморфизм $\psi_i:G_1\to G_i$ такой, что $\psi_i(a)=a$ для $a\in A$ и $\psi_i(d)=a_i^{-1}da_i$ для $d\in D$. Покажем, что этим способом можно построить конечно представленные группы $A,B_i$ и $C$ так, что $B_i\not\cong B_j$ при $i\neq j$.

Положим $C=\langle x\,|\,-\rangle$, $C_i=\langle x^{2^i}\rangle$, $A=\langle C,t\,|\,txt^{-1}=x^2\rangle$, $a_i=t^{i-1}, D=\langle y\rangle$, $D_1=\langle y^2\rangle$, $\varphi(x^2)=y^2$. Тогда $B_i=\langle x,y\,|\,x^{2^i}=y^2\rangle$.

**2.** Пусть группы $A, C, C_i$ и элементы $a_i$ выбраны, как в первом примере, $B_i = \langle C, \widetilde{t}_i \,|\, \widetilde{t}_i c_1 \widetilde{t}_i^{-1} = \tau_i(c_1)\,(c_1 \in C_1)\rangle$, $G_i = A *_C B_i$. Тогда для каждого $i \geqslant 1$ существует изоморфизм $\psi_i : G_1 \to G_i$ такой, что $\psi_i(a) = a$ для $a \in A$ и $\psi_i(\widetilde{t}_1) = a_i^{-1}\widetilde{t}_i$.

Автор выражает глубокую благодарность В.А. Чуркину за полезные обсуждения данной работы.

### Литература

1. **Богопольский О.** Проблема автоморфной сопряженности подгрупп фундаментальных групп компактных поверхностей. Новосибирск, 1999. 24 с. (Препринт / РАН. Сиб. отд-ние. Институт математики; №58).

2. **Коуровская тетрадь.** Нерешенные проблемы в теории групп. 14-е изд. Новосибирск, 1999.

3. **Линдон Р., Шупп П.** Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.

4. **Ольшанский А. Ю.** Геометрия определяющих соотношений в группах. М.: Наука, 1989.

5. **Цишанг Х.** О разложениях дискретных групп изометрий проскости // Успехи мат. наук. 1981. Т. 36. С. 173–192.

6. **Цишанг Х, Фогт Е, Колдевай Х.-Д.** Поверхности и разрывные группы. М.: Наука, 1988.

7. **Bogopolski O., Weidmann R.** On the uniqueness of factors of amalgamated products. Preprint. 2000.

8. **Cohen M., Metzler W., Zimmermann A.** What does a basis of $F(a, b)$ look like? // Math. Ann. 1981. V. 257, N 4. P. 435–445.

9. **Greenberg L.** Discrete groups of motions // Canad. J. of Math. 1960. V. 12, N 3. P. 415 – 425.

10. **Hall M.** Coset representations in free groups // TAMS. 1949. V. 67. P. 421–432.

11. **Hendriks H., Shastri A.** A splitting theorem for surfaces, amalgamation // Math. Centre Tracts Amsterdam. 1979. V. 115. P. 117–121.

12. **Lyndon R. C.** Quadratic equations in free products with amalgamation // Houston J. Math. 1978. V. 4. P. 91–103.

13. **Scott P.** Subgroups of surface groups are almost geometric // J. London Math. Soc. 1978. V. 17, N 3. P. 555–565.

14. **Serre J.-P.** Trees. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1980.