УДК 517.956.3:532.135

МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ВИХРЕВОЕ ДВИЖЕНИЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ПОЛИМЕРНОЙ ЖИДКОСТИ

© 2021 А. М. Блохин, Р. Е. Семенко[a], А. С. Рудометова[b]

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
просп. Акад. Коптюга, 4, г. Новосибирск 630090, Россия

E-mails: [a]r.semenko@g.nsu.ru, [b]bush@math.nsc.ru

Поступила в редакцию 22.04.2020 г.; после доработки 22.04.2020 г.;
принята к публикации 15.10.2020 г.

Обсуждается математическая модель, описывающая магнитогидродинамическое движение вязкоупругой полимерной жидкости в цилиндрической приосевой зоне вихревой камеры. Доказывается отсутствие стационарных решений для цилиндрической зоны с фиксированной боковой границей. Рассматриваются решения для приосевой зоны со свободной боковой границей.

Ключевые слова: магнитная гидродинамика, реологическая модель, вихревое движение.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.101

ВВЕДЕНИЕ

Моделирование течений растворов и расплавов полимеров представляет достаточно сложную математическую задачу из-за молекулярной структуры таких сред, состоящих из длинных перепутанных макромолекул. Вместе с тем, широкое применение полимерных материалов в самых разных областях индустрии требует развитой математической теории полимерных сред. За последние пятьдесят лет было предложено большое количество различных моделей динамики полимеров, описывающих движение жидких полимеров с той или иной точностью ([1–4] и другие). Такие модели заметно отличаются как по подходам к их получению, так и по сложности, при этом нельзя сказать, что какая-либо конкретная модель является доминирующей над остальными. Различные режимы течения требуют учёта различных особенностей поведения полимерных жидкостей, что в свою очередь делает разумным применение различных же моделей.

Для моделирования гидродинамики полимерной жидкости мы будем использовать сравнительно новую реологическую модифицированную модель Покровского — Виноградова [5, 6]. По своей природе эта модель является мезоскопической, т. е. определяющие соотношения для неё получены из моделирования движения одной макромолекулы в анизотропной жидкости, имитирующей воздействие на эту молекулу соседних молекул полимера и растворителя. При анализе модели было показано, что она способна отражать характерные свойства жидких полимеров и передавать связь между молекулярной структурой вещества и макроскопическими характеристиками жидкости. При этом уравнения этой модели несколько проще, чем, например, уравнения известных молекулярных статистических моделей рептаций [3] или моделей на основе цепей Крамерса [4].

Среди режимов течения, хорошо изученных в рамках классических задач гидродинамики, отдельный интерес представляют течения в вихревых камерах, имеющих применение

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № 0314-2019-0013).

в различных технологических областях [7]. В частности, возможно использование вихревых камер в качестве компонента магнитогидродинамического генератора. В связи с этим имеет смысл изучить вихревое движение проводящей полимерной жидкости в магнитном поле. При анализе таких движений область течения обычно разбивают на приосевую и периферийную. Вихревые движения вязких (в том числе и полимерных) жидкостей широко исследовались ранее [8–10]. Также известны работы по магнитной гидродинамике вихревых движений [11]. В нашей работе [12] исследовалось вихревое движение полимерной жидкости в приосевой зоне в рамках модели Покровского — Виноградова. Однако магнитогидродинамическое вихревое течение полимерной жидкости в модели Покровского — Виноградова до сих пор не изучалось.

Настоящая работа посвящена исследованию магнитогидродинамического вихревого движения несжимаемой полимерной жидкости в приосевой зоне, которую мы будем считать цилиндром. Для начала будут сформулированы уравнения магнитной гидродинамики проводящей полимерной жидкости, полученные на основе реологической модифицированной модели Покровского — Виноградова. Далее будут исследованы решения для движения полимерной жидкости в соленоиде, сердечником которого является вышеупомянутая цилиндрическая приосевая зона. В частности, проиллюстрировано, что в отличие от результатов работы [12], стационарных режимов течения с приосевой цилиндрической зоной в рамках выбранной модели не существует. Наконец, приведён анализ решений модели для случая приосевой зоны со свободной боковой границей.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Следуя монографиям [6, 13–16] и работе [17], сформулируем математическую модель, которая описывает магнитогидродинамические течения несжимаемой полимерной жидкости. В цилиндрической системе координат r, φ, z и в обезразмеренном виде (сам процесс обезразмеривания аналогичен тому, который описан в [12, 17, 18]) упомянутая математическая модель может быть записана в виде

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u} = \frac{1}{r}\frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{H} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rL)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial M}{\partial \varphi} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0, \tag{1.2}$$

$$\frac{du}{dt} - \frac{v^2}{r} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial r} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial a_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_{rz}}{\partial z} + \frac{a_{rr} - a_{\varphi\varphi}}{r}\right) + \sigma_m\left(L\frac{\partial L}{\partial r} + \frac{M}{r}\frac{\partial L}{\partial \varphi} + N\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{M^2}{r}\right), \tag{1.3}$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{uv}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \varphi} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial a_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2a_{r\varphi}}{r}\right) + \sigma_m\left(L\frac{\partial M}{\partial r} + \frac{M}{r}\frac{\partial M}{\partial \varphi} + N\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{LM}{r}\right), \tag{1.4}$$

$$\frac{dw}{dt} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial a_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_{zz}}{\partial z} + \frac{a_{rz}}{r}\right) + \sigma_m\left(L\frac{\partial N}{\partial r} + \frac{M}{r}\frac{\partial N}{\partial \varphi} + N\frac{\partial N}{\partial z}\right), \tag{1.5}$$

$$\frac{dL}{dt} - \left(L\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{M}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} + N\frac{\partial u}{\partial z}\right) - b_m\left(\Delta_{r,\varphi,z}L + \frac{2}{r^2}\frac{\partial M}{\partial \varphi} - \frac{L}{r^2}\right) = 0, \tag{1.6}$$

$$\frac{dM}{dt} + \frac{vL}{r} - \left(L\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{M}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi} + N\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{Mu}{r}\right) - b_m\left(\Delta_{r,\varphi,z}M + \frac{2}{r^2}\frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{M}{r^2}\right) = 0, \tag{1.7}$$

$$\frac{dN}{dt}-\left(L\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{M}{r}\frac{\partial w}{\partial\varphi}+N\frac{\partial w}{\partial z}\right)-b_m\Delta_{r,\varphi,z}N=0, \tag{1.8}$$

$$\frac{da_{rr}}{dt}-2\left(A_r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{a_{r\varphi}}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}+a_{rz}\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\mathcal{L}_{rr}=0, \tag{1.9}$$

$$\frac{da_{\varphi\varphi}}{dt}+2\left(\frac{v}{r}-\frac{\partial v}{\partial r}\right)a_{r\varphi}-2\left(\frac{1}{r}(u+\frac{\partial v}{\partial\varphi})A_\varphi+a_{\varphi z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\mathcal{L}_{\varphi\varphi}=0, \tag{1.10}$$

$$\frac{da_{zz}}{dt}-2\left(a_{rz}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{a_{\varphi z}}{r}\frac{\partial w}{\partial\varphi}+A_z\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\mathcal{L}_{zz}=0, \tag{1.11}$$

$$\frac{da_{r\varphi}}{dt}+\left(\frac{v}{r}-\frac{\partial v}{\partial r}\right)A_r+\left(a_{r\varphi}\frac{\partial w}{\partial z}-a_{rz}\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{A_\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}-a_{\varphi z}\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\mathcal{L}_{r\varphi}=0, \tag{1.12}$$

$$\frac{da_{rz}}{dt}-a_{rz}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)-\left(A_r\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{a_{r\varphi}}{r}\frac{\partial w}{\partial\varphi}+\frac{a_{\varphi z}}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}+A_z\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\mathcal{L}_{rz}=0, \tag{1.13}$$

$$\frac{da_{\varphi z}}{dt}+\left(\frac{v}{r}-\frac{\partial v}{\partial r}\right)a_{rz}-\left(a_{\varphi z}\frac{\partial u}{\partial r}+A_z\frac{\partial v}{\partial z}+a_{r\varphi}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{A_\varphi}{r}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right)+\mathcal{L}_{\varphi z}=0. \tag{1.14}$$

Здесь t — время; u, v, w, L, M, N — компоненты вектора скорости $\boldsymbol{u}$ и вектора напряжённости магнитного поля $\boldsymbol{H}$ в цилиндрической системе координат r, φ, z; $\mathcal{P}=p+\sigma_m\|\boldsymbol{H}\|^2/2$, p — давление, $\|\boldsymbol{H}\|^2=(\boldsymbol{H},\boldsymbol{H})$, $a_{rr},\ldots,a_{\varphi z}$ — компоненты симметрического тензора анизотропии Π второго ранга;

$$\mathcal{L}_{rr}=K_Ia_{rr}+\beta\|\boldsymbol{a}_r\|^2,\quad \mathcal{L}_{\varphi\varphi}=K_Ia_{\varphi\varphi}+\beta l|\boldsymbol{a}_\varphi\|^2,\quad \mathcal{L}_{zz}=K_Ia_{zz}+\beta\|\boldsymbol{a}_z\|^2,$$
$$\mathcal{L}_{r\varphi}=K_Ia_{r\varphi}+\beta(\boldsymbol{a}_r,\boldsymbol{a}_\varphi),\quad \mathcal{L}_{rz}=K_Ia_{rz}+\beta(\boldsymbol{a}_r,\boldsymbol{a}_z),\quad \mathcal{L}_{\varphi z}=K_Ia_{\varphi z}+\beta(\boldsymbol{a}_\varphi,\boldsymbol{a}_z),$$
$$\boldsymbol{a}_r=(a_{rr},a_{r\varphi},a_{rz}),\quad \boldsymbol{a}_\varphi=(a_{r\varphi},a_{\varphi\varphi},a_{\varphi z}),\quad \boldsymbol{a}_z=(a_{rz},a_{\varphi z},a_{zz}),$$
$$A_r=a_{rr}+\mathrm{W}^{-1},\quad A_\varphi=a_{\varphi\varphi}+\mathrm{W}^{-1},\quad A_z=a_{zz}+\mathrm{W}^{-1},$$
$$K_I=\mathrm{W}^{-1}+\bar{k}I/3,\quad I=a_{rr}+a_{\varphi\varphi}+a_{zz},\quad \bar{k}=k-\beta,$$

k, β, $0<\beta<1$, — феноменологические параметры реологической модели (см. [6]), $\mathrm{Re}=(\rho u_H l)/\eta_0$ — число Рейнольдса, $\mathrm{W}=(\tau_0 u_H)/l$ — число Вайсенберга, $\rho\,(=\mathrm{const})$ — плотность среды, η_0, τ_0 — начальные значения сдвиговой вязкости и времени релаксации (см. [6]), l — характерная длина, u_H — характерная скорость, $\sigma_m=\left(\mu\mu_0H_0^2\right)/\left(\rho u_H^2\right)$ — коэффициент магнитного давления, $b_m=1/\mathrm{Re}_m$, $\mathrm{Re}_m=\sigma\mu\mu_0u_Hl$ — магнитное число Рейнольдса, μ_0 — магнитная проницаемость в вакууме, μ — магнитная проницаемость, σ — электропроводность среды, $\Delta_{r,\varphi,z}=\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}$ — оператор Лапласа, $\dfrac{d}{dt}=\dfrac{\partial}{\partial t}+u\dfrac{\partial}{\partial r}+\dfrac{v}{r}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}+w\dfrac{\partial}{\partial z}$.

Система (1.1)–(1.14) записана в безразмерном виде: переменные t, r, z, u, v, w, p, L, M, N, $a_{rr},\ldots,a_{\varphi z}$ отнесены соответственно к l/u_H, l, u_H, ρu_H^2, H_0, $\mathrm{W}/3$, где H_0 — характерная величина напряжённости магнитного поля.

Замечание 1.1. Имея в виду дальнейшее применение системы (1.1)–(1.14) для изучения магнитогидродинамических вихревых движений несжимаемой полимерной жидкости в приосевой зоне, будем считать эту зону цилиндром радиуса r_0, т. е. $l=r_0$ (см. рис. 1).

Замечание 1.2. Магнитогидродинамические уравнения (1.1)–(1.14) выведены с привлечением системы уравнений Максвелла [13, 15]. Предполагая наличие малого электромагнитного поля, вектор магнитной индукции $\boldsymbol{B}$ мы берём в виде $\boldsymbol{B}=\mu\mu_0\boldsymbol{H}=(1+\chi)\mu_0\boldsymbol{H}$, где χ — магнитная восприимчивость, причём $\chi=\chi_0/Y$, χ_0 — магнитная восприимчивость при комнатной температуре $T=T_0\ (=300\,\mathrm{K})$, $Y=T/T_0$, T — температура (см. [19, 20]).

Полагая, что магнитогидродинамическое течение несжимаемой полимерной жидкости

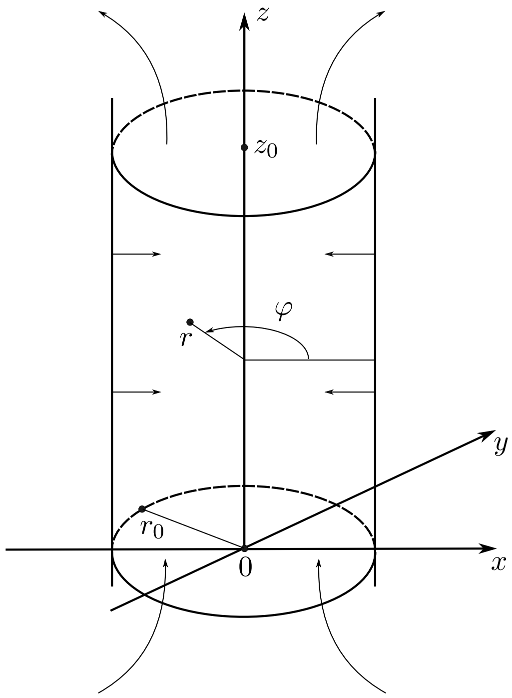

Рис. 1. Приосевая вихревая зона

в приосевой зоне описывается с помощью формул

$$
\begin{gathered}
u = \hat{u}(t,r), \quad v = \hat{v}(t,r), \quad w = \widehat{w}(t) + \widehat{\omega} z, \quad \widehat{\omega} = \text{const}, \\
a_{rr}, \ldots, a_{\varphi z} = \hat{a}_{rr}, \ldots, \hat{a}_{\varphi z}(t,r), \\
p = \pi(t,r) - q_1(t) z + q_2 \frac{z^2}{2}, \quad q_2 = \text{const} < 0, \\
L = \hat{L}(t,r), \quad M = \widehat{M}(t,r), \quad N = \widehat{H}(t) + \hat{h}(t) z,
\end{gathered}
\tag{1.15}
$$

получим из системы (1.1)–(1.14) набор соотношений для определения функций $\hat{u}$, $\hat{v}$, $\widehat{w}$, $\hat{a}_{rr}, \ldots, \hat{a}_{\varphi z}$, π, $\hat{L}$, $\widehat{M}$, постоянной $\widehat{\omega}$:

$$\widehat{D} G = \frac{2}{\mathrm{Re}} \frac{\partial \hat{A}_{r\varphi}}{\partial \sigma} + 2\sigma_m \mathcal{L} \varsigma_\sigma, \tag{1.16}$$

$$\widehat{w}_t + \widehat{\omega} \widehat{w} - q_1 = \frac{2}{\mathrm{Re}} \frac{\partial \hat{A}_{rz}}{\partial \sigma}, \tag{1.17}$$

$$\widehat{\omega}^2 + q_2 = 0, \quad \text{т. е.} \quad \widehat{\omega} = \pm\sqrt{-q_2}, \tag{1.18}$$

$$\widehat{D} \hat{a}_{rr} + \widehat{\omega} \hat{A}_r + \hat{\mathcal{L}}_{rr} = 0, \tag{1.19}$$

$$\widehat{D} \hat{a}_{\varphi\varphi} + 4\left(G - \sigma \frac{\partial G}{\partial \sigma}\right) \frac{\hat{A}_{r\varphi}}{\sigma^2} + \widehat{\omega} \hat{A}_\varphi + \hat{\mathcal{L}}_{\varphi\varphi} = 0, \tag{1.20}$$

$$\widehat{D} \hat{a}_{zz} + \hat{\mathcal{L}}_{zz} = 0, \tag{1.21}$$

$$\widehat{D} \hat{A}_{r\varphi} + 2\left(G - \sigma \frac{\partial G}{\partial \sigma}\right) \hat{A}_r + 2\widehat{\omega} \hat{A}_{r\varphi} + \sigma \hat{\mathcal{L}}_{r\varphi} = 0, \tag{1.22}$$

$$\widehat{D} \hat{A}_{rz} + r \hat{\mathcal{L}}_{rz} = 0, \tag{1.23}$$

$$\widehat{D} \hat{A}_{\varphi z} + 2\left(G - \sigma \frac{\partial G}{\partial \sigma}\right) \frac{\hat{A}_{rz}}{\sigma} + \widehat{\omega} \hat{A}_{\varphi z} + r \hat{\mathcal{L}}_{\varphi z} = 0, \tag{1.24}$$

$$2\sigma\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\pi+\sigma_m\frac{\varsigma^2}{2\sigma}-\frac{\hat a_{rr}}{\mathrm{Re}}\right)=\frac{G^2+F^2-\sigma_m\varsigma^2}{\sigma}-\widehat{D}F+\frac{\hat a_{rr}-\hat a_{\varphi\varphi}}{\mathrm{Re}},\tag{1.25}$$

$$\widehat{D}\varsigma+2\frac{G\mathcal{L}-\varsigma F}{\sigma}-4\sigma b_m\frac{\partial^2\varsigma}{\partial\sigma^2}=0,\tag{1.26}$$

$$\hat h=\mathrm{const}\ (=\widehat{\omega}),\tag{1.27}$$

$$\widehat{H}'(t)-\widehat{\omega}\widehat{H}(t)+\widehat{\omega}\widehat{w}(t)=0.$$

Здесь

$$\widehat{D}=\frac{\partial}{\partial t}+2F\frac{\partial}{\partial\sigma},\quad \sigma=r^2,\ 0\leqslant\sigma\leqslant 1,\quad F=\hat u r=-\frac{\widehat{\omega}}{2}\sigma,\quad G=\hat v r,\quad \widehat{D}F=\sigma\frac{\widehat{\omega}^2}{2},$$

$$\hat A_{r\varphi}=\sigma\hat a_{r\varphi},\quad \hat A_{rz}=\sigma\hat a_{rz},\quad \hat A_{\varphi z}=r\hat a_{\varphi z},$$

$$\hat{\mathcal{L}}_{rr}=K_{\hat I}\hat a_{rr}+\beta\|\hat{\boldsymbol{a}}_r\|^2\ \text{и т. д.},\ K_{\hat I}=\mathrm{W}^{-1}+\frac{\bar k}{3}\hat I,\quad \hat I=\hat a_{rr}+\hat a_{\varphi\varphi}+\hat a_{zz},$$

$$\hat A_r=\hat a_{rr}+\mathrm{W}^{-1},\quad \hat A_\varphi=\hat a_{\varphi\varphi}+\mathrm{W}^{-1},\quad \mathcal{L}=r\hat L=-\frac{\widehat{\omega}}{2}\sigma,\ \varsigma=r\widehat{M}.$$

Замечание 1.3. Представления (1.15) навеяны формулами, которые приняты при изучении вихревых движений вязкой несжимаемой жидкости в приосевой зоне (см., например, [21, 22] и список литературы в них).

Замечание 1.4. Решения системы (1.16)–(1.27) будем искать при условии, что задано распределение давления p вдоль оси $r=0$: $p|_{r=0}=\pi(t,0)-q_1(t)z+q_2z^2/2$.

Потребуем, чтобы градиент давления (см. (1.15)) на сечении $z=0$ приосевого цилиндра удовлетворял условию $\left.\dfrac{\partial p}{\partial z}\right|_{z=0}=-q_1<0$.

Функция $\pi(t,\sigma)$ находится из (1.25):

$$\begin{aligned}\pi(t,\sigma)=\pi(t,0)+\frac{\hat a_{rr}(t,\sigma)-\hat a_{rr}(t,0)}{\mathrm{Re}}-\sigma_m\frac{\widehat{M}^2(t,\sigma)-\widehat{M}^2(t,0)}{2}\\+\frac12\int_0^\sigma\left(\frac{G^2+F^2-\sigma_m\varsigma^2}{s^2}(t,s)-\frac{\widehat{\omega}^2}{2}+\frac{(\hat a_{rr}-\hat a_{\varphi\varphi})(t,s)}{s\,\mathrm{Re}}\right)ds,\quad t>0,\ 0<\sigma<1.\end{aligned}$$

Заметим, что формула для давления p в (1.15) записана также в безразмерном виде: функция π отнесена к ρu_H^2, q_1 к $\rho u_H^2/l$, q_2 к $\rho u_H^2/l^2$.

Замечание 1.5. Решения системы (1.16)–(1.27) будем искать в классе ограниченных функций при $0\leqslant\sigma\leqslant1$, $0\leqslant t\leqslant t^*<\infty$. Будем также полагать, что $G(t,0)=\varsigma(t,0)=0$.

Не нарушая общности, считаем, что вихревая зона при $t=0$, $0\leqslant\sigma\leqslant1$, и граница $\sigma=1$, $0<t\leqslant t^*<\infty$, свободны от напряжений: $\hat a_{rr}(0,\sigma),\dots,\hat a_{\varphi z}(0,\sigma)\equiv0$, $\hat a_{rr}(t,1),\dots,\hat a_{\varphi z}(t,1)\equiv0$.

Далее мы будем полагать, что $\widehat{w}|_{t=0}=1$ (за счёт соответствующего выбора характерного параметра u_H), $\hat a_{zz}(t,\sigma)=\hat a_{rz}(t,\sigma)=\hat a_{\varphi z}(t,\sigma)\equiv0$, $t\geqslant0$, $0\leqslant\sigma\leqslant1$. Тогда система (1.16)–(1.27) перепишется в виде

$$\widehat{w}(t)=e^{-\widehat{\omega}t}+e^{-\widehat{\omega}t}\int_0^t e^{\widehat{\omega}\tau}q_1(\tau)\,d\tau,\tag{1.28}$$

$$\widehat{D}(e^{\widehat{\omega}t}\hat A_r)+e^{\widehat{\omega}t}\hat{\mathcal{L}}_{rr}=0,\tag{1.29}$$

$$\widehat{D}(e^{\widehat{\omega}t}\hat{A}_{\varphi}) + 4\left(G - \sigma\frac{\partial G}{\partial\sigma}\right)\frac{e^{\widehat{\omega}t}\hat{A}_{r\varphi}}{\sigma^2} + e^{\widehat{\omega}t}\hat{\mathcal{L}}_{\varphi\varphi} = 0, \tag{1.30}$$

$$\widehat{D}G - \frac{2}{\mathrm{Re}}\frac{\partial\hat{A}_{r\varphi}}{\partial\sigma} + \sigma_m\widehat{\omega}\sigma\frac{\partial\varsigma}{\partial\sigma} = 0, \tag{1.31}$$

$$\widehat{D}\hat{A}_{r\varphi} + 2\hat{A}_r\left(G - \sigma\frac{\partial G}{\partial\sigma}\right) + 2\widehat{\omega}\hat{A}_{r\varphi} + \sigma\hat{\mathcal{L}}_{r\varphi} = 0, \tag{1.32}$$

$$\widehat{D}\varsigma + \widehat{\omega}\varsigma - \widehat{\omega}G - 4b_m\sigma\frac{\partial^2\varsigma}{\partial\sigma^2} = 0, \tag{1.33}$$

$$\widehat{H}(t) = e^{\widehat{\omega}t}\mathcal{H} + \widehat{\omega}\left(\frac{e^{-\widehat{\omega}t} - e^{\widehat{\omega}t}}{2\widehat{\omega}} - e^{\widehat{\omega}t}\int\limits_0^{\tau} e^{-2\widehat{\omega}\tau}\int\limits_0^{\tau} e^{\widehat{\omega}s}q_1(s)\,ds d\tau\right) = e^{\widehat{\omega}t}\mathcal{H} + \widehat{\omega}\Phi(t)\ \Phi(0) = 0. \tag{1.34}$$

Здесь $\mathcal{H}$ — некоторая постоянная.

2. ПОИСК РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ

Прежде чем мы займёмся конструированием решений уравнений (1.29)–(1.33), опишем соленоид, сердечником которого является рассматриваемая приосевая вихревая зона. (Предполагаем, что приосевая вихревая зона — магнетик с малой магнитной восприимчивостью χ_0; см. замечание 1.2.) Предположим, что катушка-соленоид характеризуется величиной n — числом витков обмотки на единицу длины m.

Пусть через катушку пропущен переменный электрический ток проводимости с силой тока $\hat{I}(t)$ (см. рис. 2).

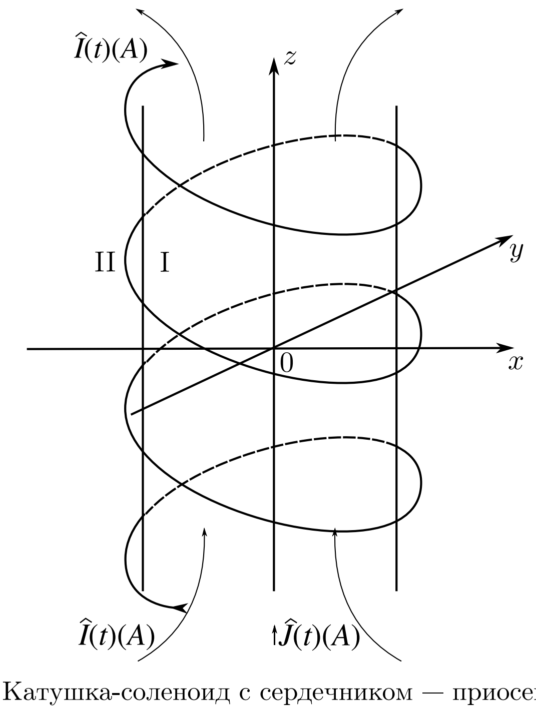

Рис. 2. Катушка-соленоид с сердечником — приосевой зоной

Следуя [20, 23], найдём агрегат $\widehat{H}(t)$ (см. разложения (1.15)), который характеризует продольную компоненту напряжённости магнитного поля в сердечнике — приосевой вихревой зоне:

$$\widehat{H}(t) = n\hat{I}(t)(A/m), \tag{2.1}$$

а безразмерное значение $\widehat{H}(t)$ равно

$$\widehat{H}(t) = n\hat{I}(t)/H_0. \tag{2.2}$$

Сравнивая (2.1) с (1.34), получим

$$\hat{I}(t) = e^{\widehat{\omega}t}\frac{\mathcal{H}H_0}{n} + \widehat{\omega}\frac{H_0}{n}\Phi(t), \tag{2.3}$$

причём

$$\mathcal{H} = \hat{A}n/H_0 = \widehat{H}(0), \quad \hat{A} = \hat{I}(0). \tag{2.4}$$

Из (2.4) следует, что в качестве характерного параметра H_0 можно взять $H_0 = \hat{A}n/\mathcal{H}$. Тогда формула (2.3) примет вид $\hat{I}(t) = \hat{A}(e^{\widehat{\omega}t} + \widehat{\omega}\Phi(t)/\mathcal{H})$. Заметим также, что в формуле (2.1) в скобках приведена размерность $\widehat{H}$ в единицах СИ [20]. Следовательно, компонента $\widehat{N}$ напряжённости магнитного поля равна (см. (1.27) и разложения (1.15)):

$$\widehat{N} = \begin{cases} \widehat{\omega}z & \text{вне сердечника,} \\ \widehat{H}(t) + \widehat{\omega}z & \text{внутри сердечника,} \end{cases} \tag{2.5}$$

а на поверхности сердечника $r = 1$ (на границе раздела внешнего магнитного поля и магнитного поля внутри сердечника) выполняется известное условие (см. [24]) $\widehat{N}_1 - \widehat{N}_2 = \hat{n}\hat{I}(t)/H_0$, где $\widehat{N}_1 = \widehat{N}|_{r\to 1-0}$, $\widehat{N}_2 = \widehat{N}|_{r\to 1+0}$ (см. (2.5) и рис. 2).

Замечание 2.1. Мы предполагаем, что внешняя область II (см. рис. 2) — тоже магнетик с малой магнитной восприимчивостью χ_0. Следовательно, как в области I, так и в области II мы пренебрегаем намагниченностью (см. [24]).

Замечание 2.2. В силу соотношения $\hat{L} = -\widehat{\omega}r/2$, которое следует из уравнения $\operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0$ (см. (1.2) и формулу (2.5)), мы получаем, что как в области I, так и в области II справедливо соотношение $\mathcal{L} = r\hat{L} = -\dfrac{\widehat{\omega}}{2}\sigma$, $r > 0$, при этом очевидно, что $\hat{L}_2 = \hat{L}_1$, где $\hat{L}_1 = \hat{L}|_{r\to 1-0}$, $\hat{L}_2 = |_{r\to 1+0}$.

Перейдём теперь к определению компоненты $\widehat{M}$ напряжённости магнитного поля. Пусть через сердечник (приосевую зону) пропущен переменный электрический ток проводимости с силой тока $\hat{J}(t)$ (см. рис. 2). Тогда, следуя [23], найдём безразмерную компоненту $\widehat{M}(t, r)$ внутри сердечника ($r < 1$):

$$\widehat{M}(t, r) = \frac{\hat{J}(t)}{2\pi r_0 H_0}r \tag{2.6}$$

и, соответственно,

$$\varsigma(t, \sigma) = \frac{\hat{J}(t)}{2\pi r_0 H_0}\sigma. \tag{2.7}$$

Вне сердечника, т. е. в области II, безразмерная компонента $\widehat{M}(t, r)$ вычисляется следующим образом (см. [23]):

$$\widehat{M}(t, r) = \frac{\hat{J}(t)}{2\pi r_0 H_0}\frac{1}{r}, \quad r > 1. \tag{2.8}$$

Замечание 2.3. В случае переменного тока проводимости $\hat{J}(t)$ мы также должны учитывать внутри сердечника наличие тока смещения (см. [23]). Однако в данной работе мы будем считать ток смещения малым.

Замечание 2.4. В областях I и II компоненты $\hat{L}$, $\widehat{M}$, $\widehat{N}$ напряжённости магнитного поля $\boldsymbol{H}$ удовлетворяют условию $\operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0$, в области II — условию $\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = 0$, а в области I — условию $\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \hat{J}(t)\boldsymbol{e}_z/(\pi r_0 H_0)$.

Вернёмся теперь к уравнениям (1.29)–(1.33). С учётом (2.7) из (1.33) получаем

$$G(t, \sigma) = \frac{\hat{J}'(t)\sigma}{2\pi r_0 H_0\widehat{\omega}}. \tag{2.9}$$

Тогда уравнение (1.32) примет вид

$$\widehat{D}\hat{A}_{r\varphi} + \hat{A}_{r\varphi}\left(2\widehat{\omega} + \mathrm{W}^{-1} + \frac{\bar{k}+3\beta}{3}(\hat{a}_{rr} + \hat{a}_{\varphi\varphi})\right) = 0.$$

Следовательно, в силу замечания 1.5 можно полагать

$$\hat{A}_{r\varphi} \equiv 0, \quad t \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \sigma \leqslant 1. \tag{2.10}$$

С учётом (2.9) и (2.10) из (1.31) получаем

$$\hat{J}'' - \widehat{\omega}\hat{J}' + \sigma_m\widehat{\omega}^2\hat{J} = 0, \tag{2.11}$$

т. е.

$$\hat{J}(t) = \hat{A}e^{\widehat{\omega}t/2}\sin(\sqrt{\sigma_m - 1/4}t + \hat{\varphi}), \quad \sigma_m > 1/4, \quad \hat{A},\ \widehat{\varphi} \text{ — некоторые постоянные.} \tag{2.12}$$

Замечание 2.5. В силу (2.9) (или (2.10)) уравнения (1.29), (1.30) можно переписать в виде системы

$$\widehat{D}(e^{\hat{\lambda}_0 t}\boldsymbol{X}) = e^{\hat{\lambda}_0 t}\left(\frac{\bar{k}}{3}\kappa_0\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mathcal{F}} + \hat{\lambda}_1\boldsymbol{\kappa}_1\right), \tag{2.13}$$

где

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X_r \\ X_\varphi \end{pmatrix} = \mathrm{W}\begin{pmatrix} \hat{A}_r \\ \hat{A}_\varphi \end{pmatrix}, \quad \hat{\lambda}_0 = \widehat{\omega} + \mathrm{W}^{-1}(1-k-\beta), \quad \kappa_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_2X_r^2 + \bar{k}X_rX_\varphi/3 \\ \hat{\lambda}_2X_\varphi^2 + \bar{k}X_rX_\varphi/3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\kappa}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\lambda}_1 = 1 - \frac{2k+\beta}{3}, \quad \hat{\lambda}_2 = \frac{k+2\beta}{3}.$$

Пусть $\widehat{\omega} > 0$ (см. разд. 1). Интегрируя систему (2.13) вдоль характеристик (см. также [12])

$$\sigma e^{\widehat{\omega}t} = \begin{cases} \sigma_0,\ 0 \leqslant \sigma_0 \leqslant 1, & \text{если } \sigma e^{\widehat{\omega}t} \leqslant 1, \\ e^{\widehat{\omega}t_0},\ t_0 > 1, & \text{если } \sigma e^{\widehat{\omega}t} > 1, \end{cases} \tag{2.14}$$

получим следующую систему интегральных уравнений:

$$e^{\hat{\lambda}_0 t}\boldsymbol{X}(t,\sigma) = \left(1 + \frac{\hat{\lambda}_1}{\hat{\lambda}_0}(e^{\hat{\lambda}_0 t} - 1)\right)\boldsymbol{\kappa}_1 + \int\limits_0^t e^{\hat{\lambda}_0\tau}\left(\frac{\bar{k}}{3}\kappa_0\boldsymbol{X}(\tau,s) - \boldsymbol{\mathcal{F}}(\tau,s)\right)d\tau, \quad s = \sigma_0e^{-\widehat{\omega}\tau}, \tag{2.15}$$

$$e^{\hat{\lambda}_0 t}\boldsymbol{X}(t,\sigma) = e^{\hat{\lambda}_0 t_0}\left(1 + \frac{\hat{\lambda}_1}{\hat{\lambda}_0}(e^{\hat{\lambda}_0(t-t_0)} - 1)\right)\boldsymbol{\kappa}_1 + \int\limits_{t_0}^t e^{\hat{\lambda}_0\tau}\left(\frac{\bar{k}}{3}\kappa_0\boldsymbol{X}(\tau,s) - \boldsymbol{\mathcal{F}}(\tau,s)\right)d\tau,\ s = e^{-\widehat{\omega}(t_0-\tau)}.$$

Замечание 2.6. В стационарном случае система (1.28)–(1.33) примет вид ($q_1 = \mathrm{const} > 0$, $\widehat{\omega} > 0$)

$$\widehat{w} = q_1/\widehat{\omega}, \quad \sigma\hat{A}_r' = \frac{1}{\widehat{\omega}}\hat{\mathcal{L}}_{rr} + \hat{A}_r, \quad \sigma\hat{A}_\varphi' = \frac{1}{\widehat{\omega}}\hat{\mathcal{L}}_{\varphi\varphi} + \hat{A}_\varphi + 4(G - \sigma G')\frac{\hat{A}_{r\varphi}}{\sigma^2\widehat{\omega}},$$

$$\frac{2}{\mathrm{Re}\,\widehat{\omega}\sigma}\hat{A}_{r\varphi}' = \sigma_m\varsigma' - G', \tag{2.16}$$

$$\sigma\hat{A}_{r\varphi}' = 2\hat{A}_r\frac{(G - \sigma G')}{\widehat{\omega}} + 2\hat{A}_{r\varphi} + \frac{\sigma\hat{\mathcal{L}}_{r\varphi}}{\widehat{\omega}}, \tag{2.17}$$

$$\sigma\varsigma' = \varsigma - G - 4\frac{b_m\sigma}{\widehat{\omega}}\varsigma'', \tag{2.18}$$

где $\hat{A}_r' = \dfrac{d\hat{A}_r}{d\sigma}$ и т. д.

С учётом (2.7) в стационарном случае из (2.18) следует

$$G(\sigma) \equiv 0, \quad 0 \leqslant \sigma \leqslant 1, \tag{2.19}$$

т. е. (см. (2.17) и (2.16))

$$\hat{A}_{r\varphi}(\sigma) \equiv 0, \quad \hat{J} = 0. \tag{2.20}$$

Формулы (2.19), (2.20) означают, что в стационарном случае не существует магнитогидродинамической приосевой вихревой зоны (в отличие от работы [12], в которой существование стационарной приосевой вихревой зоны для несжимаемой полимерной жидкости установлено).

Замечание 2.7. При $0 < \sigma_m \leqslant 1/4$ решения уравнения (2.11) будут иметь вид

$$\hat{J}(t) = \begin{cases} C_1 e^{\widehat{\omega} l_+ t/2} + C_2 e^{\widehat{\omega} l_- t/2}, & 0 < \sigma_m < 1/4, \\ e^{\widehat{\omega} t/2}(C_1 + tC_2), & \sigma_m = 1/4. \end{cases}$$

Здесь $l_\pm = 1 \pm \sqrt{1 - 4\sigma_m}$, $C_{1,2}$ — некоторые постоянные. Следовательно, магнитогидродинамические приосевые вихревые зоны могут существовать и при неизменном направлении тока проводимости (см. рис. 2).

Замечание 2.8. В силу замечания 1.5 из (2.15) следует $a_{rr}(t,\sigma) = a_{\varphi\varphi}(t,\sigma)$, $t \geqslant 0$, $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$.

3. СЛУЧАЙ СВОБОДНОЙ ВНЕШНЕЙ ГРАНИЦЫ ПРИОСЕВОЙ ЗОНЫ

Пусть приосевая вихревая зона — цилиндр, ограниченный свободной поверхностью $r = R(t)$, $R(0) = 1$. Поскольку $R_t = \hat{u}(t, R(t)) = -\dfrac{\widehat{\omega}}{2}R(t)$, то поверхность

$$R^2(t)e^{\widehat{\omega} t} = 1, \quad \widehat{\omega} > 0, \tag{3.1}$$

является характеристикой этого уравнения (см. (2.14), $\sigma_0 = 1$). Следовательно, в силу (2.15) (см. также замечание 1.5) будем иметь

$$e^{\hat{\lambda}_0 t}\boldsymbol{X}(t, e^{-\widehat{\omega} t}) = \left(1 + \frac{\hat{\lambda}_1}{\hat{\lambda}_0}(e^{\hat{\lambda}_0 t} - 1)\right)\boldsymbol{\kappa}_1 + \int\limits_0^t e^{\hat{\lambda}_0 \tau}\left(\frac{\bar{k}}{3}\kappa_0 \boldsymbol{X}(\tau, e^{-\widehat{\omega}\tau}) - \boldsymbol{\mathcal{F}}(\tau, e^{-\widehat{\omega}\tau})\right)d\tau, \tag{3.2}$$

$$\hat{a}_{r\varphi}(t, e^{-\widehat{\omega} t}) = 0 \quad \hat{a}_{r\varphi}(0,1) = 0.$$

Замечание 3.1. Из (3.2) следует (см. также замечание 2.8) $\hat{a}_{rr}(t, e^{-\widehat{\omega} t}) = \hat{a}_{\varphi\varphi}(t, e^{-\widehat{\omega} t})$, поскольку в силу замечания 1.5 имеем $\hat{a}_{rr}(0,1) = \hat{a}_{\varphi\varphi}(0,1)$.

С учётом (2.6), (2.8), (2.12) будем иметь

$$\widehat{M}(t, e^{-\widehat{\omega} t}) = \frac{\hat{J}(t)e^{\widehat{\omega} t/2}}{2\pi r_0 H_0},$$

$$\hat{J}(t)e^{\widehat{\omega} t/2} = \hat{A}e^{\widehat{\omega} t_0}\sin(\widehat{\omega}\sqrt{\sigma_m - 1/4}t + \hat{\varphi}),$$

$$\widehat{M}(t,\sigma) = \frac{\hat{J}(t)}{2\pi r_0 H_0}\frac{1}{\sigma^{1/2}}, \quad \sigma > e^{-\widehat{\omega} t},$$

$$\widehat{N} = \widehat{H}(t) + \widehat{\omega} z, \quad 1 > \sigma > 0, \quad \widehat{N} = \widehat{\omega} z, \quad \sigma > 1.$$

Замечание 3.2. При $r > 0$ компоненты $\hat{L}$, $\widehat{M}$, $\widehat{N}$ напряжённости магнитного поля $\boldsymbol{H}$ удовлетворяют условию $\operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0$, при $\sigma > e^{-\widehat{\omega}t}$ — условию $\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = 0$, а при $0 < \sigma < e^{-\widehat{\omega}t}$ — условию $\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \dfrac{\hat{J}(t)}{\pi r_0 H_0}\boldsymbol{e}_z$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена и исследована модель магнитной гидродинамики вихревого движения несжимаемой полимерной жидкости, являющаяся модификацией ранее рассмотренной нами модели [12]. Было показано, что в рамках данной модели магнитной гидродинамики не существует стационарной вихревой зоны. Также приведён вариант модели для свободной внешней границы приосевой зоны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Oldroyd J. G.* On the formulation of rheological equations of state // Proc R. Soc. 1950. V. 200. P. 523–541; https://doi.org/10.1098/rspa.1950.0035
2. *De Gennes P. G.* Scaling Concepts in Polymer Physics. Ithaca: Cornell Univ. Press, 1979.
3. *Doi M., Edwards S. F.* The Theory of Polymer Dynamics. Oxford: Clarendon, 1986.
4. *Bird R. B., Curtiss C. F., Armstrong R. C., Hassager O.* Dynamics of Polymeric Liquids. V. 2. N. Y.: Wiley, 1987.
5. *Pokrovskii V. N.* The Mesoscopic Theory of Polymer Dynamics. Dordrecht: Springer, 2010.
6. *Алтухов Ю. А., Гусев А. С., Пышнограй Г. В.* Введение в мезоскопическую теорию текучих полимерных систем. Барнаул: изд. АлтГПА, 2012.
7. *Смульский И. И.* Аэродинамика и процессы в вихревых камерах. Новосибирск: Наука, 1992.
8. *Lewellen W. S.* A solution for three-dimensional vortex flows with strong circulation // J. Fluid Mech. 1962. V. 14, N 3. P. 420–432; https://doi.org/10.1017/S0022112062001330
9. *Lin Yang, Jia-Lin Tian, Zhi Yang.* Numerical analysis of non-Newtonian rheology effect on hydrocyclone flow field // Petroleum. 2015. V. 1, N 1. P. 68–74; https://doi.org/10.1016/j.petlm.2015.05.001
10. *Chiou C. S., Gordon R. J.* Vortex flow of dilute polymer solutions // Polym. Eng. Sci. 1980. V. 20, N 7. P. 456–465; https://doi.org/10.1002/pen.760200704
11. *Borisevich V. D., Potanin E. P., Whichello J.* Circulation control in magnetohydrodynamic rotating flows // J. Fluid Mech. 2017. V. 829. P. 328–344; https://doi.org/10.1017/jfm.2017.568
12. *Блохин А. М., Семенко Р. Е.* Об одной модели вихревого движения несжимаемой полимерной жидкости в приосевой зоне // Сиб. журн. индустр. математики. 2016. Т. 19, № 1. С. 52–61; https://doi.org/10.17377/sibjim.2016.19.105
13. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1970.
14. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978.
15. *Ватажин А. Б., Любимов Г. А., Регирер С. А.* Магнитогидродинамические течения в каналах. М.: Наука, 1970.
16. *Бай Ши-И.* Введение в теорию течения сжимаемой жидкости. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
17. *Блохин А. М., Рудометова А. С.* Стационарные течения слабопроводящей несжимаемой полимерной жидкости между соосными цилиндрами // Сиб. журн. индустр. математики. 2017. Т. 20, № 4. С. 13–21; https://doi.org/10.17377/sibjim.2017.20.402
18. *Бамбаева Н. В., Блохин А. М.* Стационарные решения уравнений несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2014. Т. 54, № 5. С. 55–69; https://doi.org/10.7868/S0044466914050068
19. *Ахиезер А. И., Ахиезер И. А.* Электромагнетизм и электромагнитные волны. М.: Высш. школа, 1985.

20. *Нордлинг К., Остерман Д.* Справочник по физике для учёного и инженера. СПб.: БХВ-Петербург, 2011.

21. *Губин А. Ю.* Об устойчивости одного вихревого движения вязкой несжимаемой жидкости // Сиб. журн. индустр. математики. 2004. Т. 7, № 2. С. 40–53.

22. *Ульянов О. Н.* Об одном классе течений вязкой жидкости // Динамика жидкости и газа // Тр. ИММ УрО РАН. 2003. Т. 9, № 2. С. 129–136.

23. *Калашников С. Г.* Электричество. М.: Наука, 1964.

24. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Физматгиз, 1959.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 517.956.3:532.135

MAGNETOHYDRODYNAMIC VORTEX MOTION OF AN INCOMPRESSIBLE POLYMERIC FLUID

© 2021 $\boxed{\text{A. M. Blokhin}}$, R. E. Semenko[a], A. S. Rudometova[b]

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
pr. Acad. Koptyuga 4, Novosibirsk 630090, Russia

E-mails: [a]r.semenko@g.nsu.ru, [b]bush@math.nsc.ru

Received 22.04.2020, revised 22.04.2020, accepted 15.10.2020

Abstract. Under consideration is some mathematical model describing magnetohydrodynamic motion of viscoelastic polymeric fluid in the cylindrical near-axial zone of a swirl chamber. The absence of steady-state solutions is proved for the cylindrical zone with a fixed lateral boundary. The solutions are also considered in the case of near-axial zone with a free lateral boundary.

Keywords: magnetohydrodynamics, rheological model, vortex motion.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.101

REFERENCES

1. Oldroyd J.G. On the formulation of rheological equations of state. *Proc R. Soc.*, 1950, Vol. 200, pp. 523–541; https://doi.org/10.1098/rspa.1950.0035
2. De Gennes P.G. Scaling Concepts in Polymer Physics. Ithaca: Cornell Univ. Press, 1979.
3. Doi M., Edwards S.F. The Theory of Polymer Dynamics. Oxford: Clarendon, 1986.
4. Bird R.B., Curtiss C.F., Armstrong R.C., Hassager O. Dynamics of Polymeric Liquids. Vol. 2. N. Y.: Wiley, 1987.
5. Pokrovskii V.N. The Mesoscopic Theory of Polymer Dynamics. London: Springer-Verl., 2010.
6. Altukhov Yu.A., Gusev A.S., Pyshnograi G.V. Vvedenie v mezoskopicheskuyu teoriyu tekuchikh polimernykh sistem [Introduction to the mesoscopic theory of fluid polymeric systems]. Barnaul: izd. Altai. Gos. Ped. Akad., 2012 (in Russian).
7. Smul'skii I.I. Aerodinamika i protsessy v vikhrevykh kamerakh [Aerodynamics and processes in vortex chambers]. Novosibirsk: Nauka, 1992 (in Russian).
8. Lewellen W.S. A solution for three-dimensional vortex flows with strong circulation. *J. Fluid Mech.*, 1962, Vol. 14, No. 3, pp. 420–432; https://doi.org/10.1017/S0022112062001330
9. Yang L., Tian J.-L., Yang Zh. Numerical analysis of non-Newtonian rheology effect on hydrocyclone flow field. *Petroleum*, 2015, Vol. 1, No. 1, pp. 68–74; https://doi.org/10.1016/j.petlm.2015.05.001
10. Chiou C.S., Gordon R.J. Vortex flow of dilute polymer solutions. *Polym. Eng. Sci.*, 1980, Vol. 20, No. 7, pp. 456–465; https://doi.org/10.1002/pen.760200704
11. Borisevich V.D., Potanin E.P., Whichello J. Circulation control in magnetohydrodynamic rotating flows. *J. Fluid Mech.*, 2017, Vol. 829, pp. 328–344; https://doi.org/10.1017/jfm.2017.568
12. Blokhin A.M., Semenko R.E. On a model of vortex motion of an incompressible polymeric liquid in the axial zone. *J. Appl. Ind. Math.*, 2016, Vol. 10, No. 1, pp. 69–77; https://doi.org/10.1134/S1990478916010087

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2021, Vol. 15, No. 1, pp. 7–16; DOI: 10.1134/S1990478921010026

13. Sedov L.I. Mechanics of Continuous Media. Vol. 1. Singapore: World Scientific, 1997.

14. Loitsyanskii L.G. Mechanics of Liquids and Gases. Oxford: Stewartson Pergamon Press, 1966.

15. Vatazhin A.B., Lyubimov G.A., Regirer S.A. Magnitogidrodinamicheskie techeniya v kanalakh [Magnetic hydrodynamical flows in channels] (in Russian). Moscow: Nauka, 1970.

16. Shi-I B. Vvedenie v teoriyu techeniya szhimaemoi zhidkosti [Introduction to the theory of compressible fluid flow]. Moscow: Izd-vo Inostrannaya Literatura, 1962 (in Russian).

17. Blokhin A.M., Rudometova A.S. Stationary flows of a weakly conducting incompressible polymeric liquid between coaxial cylinders. *J. Appl. Ind. Math.*, 2017, Vol. 11, pp. 486–493; https://doi.org/10.1134/S1990478917040044

18. Bambaeva N.V., Blokhin A.M. Stationary solutions of equations of incompressible viscoelastic polymer liquid. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2014, Vol. 54, No. 5, pp. 874–899; https://doi.org/10.1134/S0965542514050054

19. Akhiezer A.I., Akhiezer I.A. Elektromagnetizm i elektromagnitnye volny [Electromagnetism and Electromagnetic Waves]. Moscow: Vysshaya Shkola, 1985 (in Russian).

20. Nordling K., Österman J. Physics Handbook for Science and Engineering. Lund: Studentlitteratur, 1999.

21. Gubin A.Yu. Ob ustoichivosti odnogo vikhrevogo dvizheniya vyazkoi neszhimaemoi zhidkosti [On Stability of a Vortex Motion of a Viscid Incompressible Fluid]. *Sib. Zhurn. Industr. Matematiki*, 2004, Vol. 7, No. 2, pp. 40–53 (in Russian).

22. Ul'yanov O.N. Ob odnom klasse techenii vyazkoi zhidkosti [On a Class of Flows of a Viscid Fluid]. *Dinamika Zhidkosti i Gaza. Trudy Inst. Mat. Mekh. Ural Otdel. RAN*, 2003, Vol. 9, No. 2, pp. 129–136 (in Russian).

23. Kalashnikov S.G. Elektrichestvo [Electricity]. Moscow: Nauka, 1964 (in Russian).

24. Landau L.D., Lifshits E.M. Elektrodinamika sploshnykh sred [Electrodynamic of Continuous Media]. Moscow: Fizmatgiz, 1959 (in Russian).