УДК 517.977.57:517.95

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ВАРИАЦИЯХ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

© 2021 К. С. Мусабеков

Кокшетауский государственный университет им. Ш. Уалиханова, ул. Абая, 76, г. Кокшетау 020000, Казахстан

E-mail: it.kgu@mail.ru

Поступила в редакцию 16.07.2020 г.; после доработки 02.10.2020 г.; принята к публикации 15.10.2020 г.

Рассматривается задача оптимального управления одной математической моделью химического реактора. Осуществляется доказательство существования решения системы уравнений в вариациях, которая возникает при выводе необходимого условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина.

Ключевые слова: математическая модель, химический реактор, оптимальное управление, функционал, необходимое условие оптимальности, принцип максимума Понтрягина.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.104

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $\Omega = \{x \mid 0 < x < 1\}$, $Q_T = \Omega \times (0, T)$, T — фиксированное число. В области Q_T рассмотрим систему дифференциальных уравнений, являющуюся математической моделью неадиабатического трубчатого реактора [1]:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial v_1(x,t)}{\partial t} = a\,\frac{\partial^2 v_1(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial v_1(x,t)}{\partial x} - cv_1 f(v_2),\\
\frac{\partial v_2(x,t)}{\partial t} = b\,\frac{\partial^2 v_2(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial v_2(x,t)}{\partial x} + kv_1 f(v_2) + g(v_3(t) - v_2(x,t)),\\
\frac{dv_3(t)}{dt} = p\left(\int\limits_0^1 v_2(x,t)dx - v_3(t)\right) + u(t)(E - v_3(t))
\end{gathered} \tag{1}$$

с граничными

$$\begin{aligned}
a\,\frac{\partial v_1(0,t)}{\partial x} - v_1(0,t) = -1, \quad \frac{\partial v_1(1,t)}{\partial x} = 0,\\
b\,\frac{\partial v_2(0,t)}{\partial x} - v_2(0,t) = -1, \quad \frac{\partial v_2(1,t)}{\partial x} = 0
\end{aligned} \tag{2}$$

и начальными условиями

$$v_1(x,0) = v_{10}(x), \quad v_2(x,0) = v_{20}(x), \quad v_3(0) = v_{30}, \tag{3}$$

где $f(v_2) = \exp(\Gamma - \Gamma/v_2(x,t))$; a, b, c, Γ, k, g, p, E, v_{30} — константы, положительные параметры системы; $u(t)$ — управляющая функция (управление); $v_1(x,t)$, $v_2(x,t)$, $v_3(t)$ — функции концентрации реагирующей смеси, температуры реактора, температуры охладителя соответственно.

При естественных предположениях о характере начальных данных и других параметров задачи в работе [2] доказана справедливость неравенства $v_2(x,t) \neq 0$, $(x,t) \in \overline{Q_T}$.

Здесь будут использованы обозначения функциональных пространств, принятые в работах [3, 4], и ещё некоторые обозначения:

$C_1[0,T]$ — банахово пространство непрерывных функций $v(t)$, заданных на $[0,T]$ и удовлетворяющих условию Липшица, с нормой

$$\|v\|_{C_1} = \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |v(t)| + \sup_{\substack{t',\, t'' \in [0,T] \\ t' \neq t''}} \frac{|v(t') - v(t'')|}{|t' - t''|}.$$

Множество допустимых управлений

$$U_\partial = \{u(t) \mid 0 \leqslant u(t) \leqslant u_0 = \text{const},\ u(t) \text{ — измеримая функция},\ 0 \leqslant t \leqslant T\}.$$

При соответствующей гладкости начальных данных и выполнении условия согласования начальных и граничных данных:

$$a\,\frac{dv_{10}(0)}{dx} - v_{10}(0) = -1, \quad \frac{dv_{10}(1)}{dx} = 0, \quad b\,\frac{dv_{20}(0)}{dx} - v_{20}(0) = -1, \quad \frac{dv_{20}(1)}{dx} = 0.$$

В работе [5] была доказана теорема существования и единственности решения

$$v_1(x,t), v_2(x,t) \in H^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\overline{Q_T}), \quad v_3(t) \in C_1[0,T],\ 0 < \alpha < 1,$$

системы (1)–(3) при произвольной функции $u(t) \in U_\partial$.

Введём функционал

$$J_A^\beta(u) = \int\limits_0^T v_1(1,t)\,dt + A \int\limits_0^T \int\limits_0^1 \Phi(v_2(x,t))\,dxdt + \frac{\beta}{2} \int\limits_0^T u^2(t)\,dt, \tag{4}$$

где $\int\limits_0^T v_1(1,t)\,dt$ — суммарное за время T количество непрореагировавшего вещества на выходе реактора; A — постоянная величина (штрафной коэффициент); $\Phi(v_2)$ — штрафная функция:

$$\Phi(v_2) = \begin{cases} 0, & \text{если } v_2 \leqslant v_2^*, \\ big(v_2 - v_2^*\big)^2, & \text{если } v_2 > v_2^*; \end{cases}$$

$\beta > 0$ — числовой параметр.

Рассмотрим задачу минимизации функционала (4) при условиях (1)–(3) и следующих ограничениях на управление $u(t)$:

$$u(t) \in U_\partial. \tag{5}$$

В [6] доказано существование оптимального управления в задаче (1)–(5).

Решения системы (1)–(3) при $u(t) \in U_\partial$ удовлетворяют следующим условиям [2]: если $0 \leqslant v_{10}(x) \leqslant 1$, $0 < v_{20}(x) \leqslant b_3$, $v_{30} > 0$ для любой точки $x \in \overline{\Omega}$, то

$$0 \leqslant v_1(x,t) \leqslant 1, \quad \delta \leqslant v_2(x,t) \leqslant b_1, \quad \delta_1 \leqslant v_3(t) \leqslant b_2, \tag{6}$$

для любой точки $(x,t) \in \overline{Q_T}$, где δ, δ_1, b_1, b_2, b_3 — некоторые положительные постоянные числа, зависящие лишь от параметров системы и начальных условий задачи.

В рассматриваемой задаче оптимального управления при выводе необходимого условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина [7] возникает линейная система дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial h_1}{\partial t} = a\frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} - \frac{\partial h_1}{\partial x} - ca_{11}(x,t)h_1 - ca_{12}(x,t)h_2 + \varphi_1(x,t),\\
\frac{\partial h_2}{\partial t} = b\frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2} - \frac{\partial h_2}{\partial x} + ka_{11}(x,t)h_1 + (ka_{12}(x,t) - g)h_2 + gh_3 + \varphi_2(x,t),\\
\frac{dh_3}{dt} = p\left(\int\limits_0^1 h_2(x,t)\,dx - h_3\right) - uh_3 + (E - v_3(t))\tilde{u} + \varphi_3(t)
\end{gathered} \tag{7}$$

с граничными

$$\begin{gathered}
a\frac{\partial h_1(0,t)}{\partial x} - h_1(0,t) = 0, \quad \frac{\partial h_1(1,t)}{\partial x} = 0,\\
b\frac{\partial h_2(0,t)}{\partial x} - h_2(0,t) = 0, \quad \frac{\partial h_2(1,t)}{\partial x} = 0
\end{gathered} \tag{8}$$

и начальными условиями

$$h_1(x,0) = \varphi_4(x), \quad h_2(x,0) = \varphi_5(x), \quad h_3(0) = \varphi_6, \tag{9}$$

где $a_{11}(x,t) = f(v_2(x,t))$, $a_{12}(x,t) = v_1(x,t)\dfrac{df(v_2)}{dv_2}$, a, b, c, k, g, p, E — константы, положительные параметры исходной системы (1)–(3). Будем считать, что

$$v_1(x,t), v_2(x,t) \in H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q_T}), \quad v_3(t) \in C_1[0,T], \quad u(t) \in U_\partial.$$

В настоящей работе будет доказано существование решения $h_1(x,t)$, $h_2(x,t) \in W_2^{2,1}(Q_T)$, $h_3(t) \in W_2^1(0,T)$ системы (7)–(9) при $\tilde{u}(t) \equiv 0$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $\varphi_1(x,t), \varphi_2(x,t) \in L_2(Q_T)$, $\varphi_3(t) \in L_2(0,T)$. Систему уравнений (7)–(9) по аналогии с [8] будем в дальнейшем называть системой уравнений в вариациях.

2. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ВАРИАЦИЯХ

Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений (7)–(9). Нас интересует проблема существования решения $h_1(x,t), h_2(x,t) \in W_2^{2,1}(Q_T)$, $h_3(t) \in W_2^1(0,T)$ этой системы при $\tilde{u}(t) \equiv 0$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $\varphi_1(x,t), \varphi_2(x,t) \in L_2(Q_T)$, $\varphi_3(t) \in L_2(0,T)$. Введём следующие обозначения:

$$\begin{gathered}
a_{31}(t) = -p - u(t) \quad a_0 = \begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}, \quad a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\\
a_2(x,t) = \begin{pmatrix} -ca_{11}(x,t) & -ca_{12}(x,t)\\ ka_{11}(x,t) & ka_{12}(x,t) - g\end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 0\\ g\end{pmatrix},\\
h(x,t) = \begin{pmatrix} h_1(x,t)\\ h_2(x,t)\end{pmatrix}, \quad \varphi(x,t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x,t)\\ \varphi_2(x,t)\end{pmatrix}, \quad \bar{\varphi}(x) = \begin{pmatrix} \varphi_4(x)\\ \varphi_5(x)\end{pmatrix}.
\end{gathered}$$

Учитывая введённые обозначения (и предположение $\tilde{u}(t) \equiv 0$, $0 \leqslant t \leqslant T$), систему (7)–(9) можно записать в следующем виде:

$$\begin{gathered}
D_t h = a_0 D_x^2 h - a_1 D_x h + a_2 h + a_3 h_3 + \varphi,\\
D_t h_3 = p\int\limits_0^1 h_2(x,t)dx + a_{31}(t)h_3 + \varphi_3(t),
\end{gathered} \tag{10}$$

$$a_0 D_x h(0,t) - h(0,t) = 0,\ D_x h(1,t) = 0, \tag{11}$$

$$h(x,0) = \bar{\varphi}(x),\ h_3(0) = \varphi_6. \tag{12}$$

Воспользуемся обозначением $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)'$ (в данной работе такой штрих означает операцию транспонирования вектор-строки) и обозначим

$$P_1(\tau) = \iint\limits_{Q_\tau} |\varphi|^2\, dxdt + \int\limits_0^1 |\bar{\varphi}|^2\, dx + \int\limits_0^1 |D_x\bar{\varphi}|^2\, dx,$$

$$P_2(\tau) = P_1(\tau) + \int\limits_0^\tau \varphi_3^2(t)\, dt + \varphi_6^2.$$

Решение системы уравнений (10)–(12) удовлетворяет следующему утверждению.

Лемма 1. *Пусть функции* $h(x,t) \in H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q_T})$, $h_3(t) \in C_1[0,T]$, $u(t) \in U_\partial$ *удовлетворяют в* $\overline{Q_T}$ *уравнениям системы* (10)–(12). *Тогда справедливы следующие неравенства:*

$$\sum_{i=0}^{2} \iint\limits_{Q_\tau} \left|D_x^i h\right|^2 dxdt + \iint\limits_{Q_\tau} |D_t h|^2\, dxdt \leqslant M_1 \left[P_1(\tau) + \int\limits_0^\tau h_3^2\, dt\right], \tag{13}$$

$$\int\limits_0^\tau h_3^2\, dt + \int\limits_0^\tau (D_t h_3)^2\, dt \leqslant M_2 P_2(\tau), \tag{14}$$

$$\int\limits_0^1 |h_2(x,\tau)|\, dx \leqslant M_3 \left[\max_{0\leqslant t\leqslant\tau} |h_3(t)| + \sqrt{P_1(\tau)}\ \right], \tag{15}$$

где $0 < \tau \leqslant T$; M_1, M_2, M_3 *— постоянные, зависящие лишь от* T *и коэффициентов системы и не зависящие от* h_1, h_2, h_3, u.

Доказательство. Умножим первое уравнение системы (10) скалярно на $e^{-\theta t} D_x^2 h$ и проинтегрируем по области $Q_\tau = \{(x,t) \mid 0 < x < 1,\ 0 < t < \tau\}$, где θ — произвольная положительная постоянная. Тогда получим

$$\iint\limits_{Q_\tau} \big[-\big(D_t h, D_x^2 h\big) + \big(a_0 D_x^2 h, D_x^2 h\big)\big] e^{-\theta t}\, dxdt = \iint\limits_{Q_\tau} e^{-\theta t} D_x^2 h [a_1 D_x h - a_2 h - a_3 h_3 - \varphi]\, dxdt.$$

Преобразуем интеграл в левой части равенства:

$$-\iint\limits_{Q_\tau} \big(D_t h, D_x^2 h\big) e^{-\theta t}\, dxdt = \int\limits_0^\tau (D_t h(0,t), D_x h(0,t)) e^{-\theta t}\, dt + \iint\limits_{Q_\tau} D_t\left(\frac{1}{2}|D_x h|^2\right) e^{-\theta t}\, dxdt;$$

$$\int\limits_0^\tau e^{-\theta t} D_t\left(\frac{1}{2}|D_x h|^2\right) dt = e^{-\theta\tau}\frac{1}{2}|D_x h(x,\tau)|^2 - \frac{1}{2}|D_x\bar{\varphi}(x)|^2 + \frac{\theta}{2}\int\limits_0^\tau e^{-\theta t}|D_x h|^2\, dt;$$

$$\int\limits_0^\tau e^{-\theta t}(D_t h(0,t), D_x h(0,t))\, dt = \frac{1}{2} e^{-\theta\tau}\big(h(0,\tau), a_0^{-1} h(0,\tau)\big)$$

$$- \frac{1}{2}\big(\bar{\varphi}(0), a_0^{-1}\bar{\varphi}(0)\big) + \frac{\theta}{2}\int\limits_0^\tau e^{-\theta t}\big(h(0,t), a_0^{-1} h(0,t)\big)\, dt.$$

Следовательно,

$$
\begin{aligned}
&e^{-\theta\tau}\big(h(0,\tau),a_0^{-1}h(0,\tau)\big)-\big(\bar\varphi(0),a_0^{-1}\bar\varphi(0)\big)\\
&\qquad+\theta\int\limits_0^\tau e^{-\theta t}\big(h(0,t),a_0^{-1}h(0,t)\big)\,dt+\int\limits_0^1 e^{-\theta\tau}|D_xh(x,\tau)|^2\,dx\\
&\quad-\int\limits_0^1|D_x\bar\varphi(x)|^2\,dx+\theta\iint\limits_{Q_\tau}e^{-\theta t}|D_xh|^2\,dxdt+2\iint\limits_{Q_\tau}e^{-\theta t}\big(a_0D_x^2h,D_x^2h\big)\,dxdt\\
&\qquad\qquad=2\iint\limits_{Q_\tau}e^{-\theta t}D_x^2h[a_1D_xh-a_2h-a_3h_3-\varphi]\,dxdt.
\end{aligned}
$$

Обозначим $\bar a=\min\{a,b\}$. Тогда из последнего равенства получим оценку

$$
\begin{aligned}
&\theta\iint\limits_{Q_\tau}e^{-\theta t}|D_xh|^2\,dxdt+2\bar a\iint\limits_{Q_\tau}e^{-\theta t}\big|D_x^2h\big|^2\,dxdt\\
&\qquad\leqslant\frac{1}{\bar a}|\bar\varphi(0)|^2+\int\limits_0^1|D_x\bar\varphi(x)|^2\,dx+2c_1\iint\limits_{Q_\tau}e^{-\theta t}\big|D_x^2h\big|[|D_xh|+|h|+|h_3|+|\varphi|]\,dxdt,
\end{aligned}
\tag{16}
$$

где c_1 — постоянная, зависящая от коэффициентов системы (10). Здесь и в дальнейшем через c_1 будем обозначать всевозможные положительные константы, точные значения которых для нас не существенны.

Оценим правую часть (16), используя неравенство $2ab\leqslant\varepsilon a^2+b^2/\varepsilon$, $\varepsilon>0$, и относя малый множитель ε к $\big|D_x^2h\big|$. В результате получим неравенство

$$
\begin{aligned}
&\theta\iint\limits_{Q_\tau}e^{-\theta t}|D_xh|^2\,dxdt+2\bar a\iint\limits_{Q_\tau}e^{-\theta t}\big|D_x^2h\big|^2\,dxdt\leqslant\frac{1}{\bar a}|\bar\varphi(0)|^2+\int\limits_0^1|D_x\bar\varphi(x)|^2\,dx\\
&\qquad+c_1\iint\limits_{Q_\tau}e^{-\theta t}\Big[\varepsilon\big|D_x^2h\big|^2+\frac{1}{\varepsilon}(|\varphi|^2+|h_3|^2+|D_xh|^2+|h|^2)\Big]\,dxdt.
\end{aligned}
$$

Известно вложение $W_2^1(0,1)\subset C[0,1]$, поэтому справедливы неравенства

$$
|\bar\varphi(0)|\leqslant\max_{0\leqslant x\leqslant1}|\bar\varphi(x)|=\|\bar\varphi\|_0^{[0,1]}\leqslant c_1\|\bar\varphi\|_{2,(0,1)}^{(1)}.
$$

Поэтому имеем следующее неравенство:

$$
\begin{aligned}
&\Big(\theta-\frac{c_1}{\varepsilon}\Big)\iint\limits_{Q_\tau}e^{-\theta t}|D_xh|^2\,dxdt+(2\bar a-\varepsilon c_1)\iint\limits_{Q_\tau}e^{-\theta t}\big|D_x^2h\big|^2\,dxdt\\
&\qquad\leqslant\frac{c_1}{\varepsilon}\bigg(\iint\limits_{Q_\tau}e^{-\theta t}[|\varphi|^2+|h_3|^2+|h|^2]\,dxdt+\big(\|\bar\varphi\|_{2,(0,1)}^{(1)}\big)^2\bigg).
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Умножим первое уравнение системы (10) скалярно на $e^{-\theta t}h(x,t)$, проинтегрировав по Q_τ, имеем

$$\iint\limits_{Q_\tau} \big[-(D_t h, h) + \big(a_0 D_x^2 h, h\big) - (a_1 D_x h, h) + (a_2 h, h)\big] e^{-\theta t}\, dxdt$$
$$= \iint\limits_{Q_\tau} [-(a_3 h_3, h) - (\varphi, h)] e^{-\theta t}\, dxdt.$$

Интегрируя по частям, из последнего выражения получим

$$\int\limits_0^1 |h(x,\tau)|^2 e^{-\theta\tau}\, dx + \theta \iint\limits_{Q_\tau} |h|^2 e^{-\theta t}\, dxdt + \int\limits_0^\tau |h(0,t)|^2 e^{-\theta t}\, dt$$
$$+ 2a \iint\limits_{Q_\tau} |D_x h_1|^2 e^{-\theta t}\, dxdt + 2b \iint\limits_{Q_\tau} |D_x h_2|^2 e^{-\theta t}\, dxdt + \int\limits_0^\tau |h(1,t)|^2 e^{-\theta t}\, dt$$
$$= 2 \iint\limits_{Q_\tau} (a_2 h, h) e^{-\theta t}\, dxdt + \int\limits_0^1 |\bar\varphi|^2\, dx + 2 \iint\limits_{Q_\tau} [(a_3 h_3, h) + (\varphi, h)] e^{-\theta t}\, dxdt. \quad (18)$$

В силу неравенства (6) имеем $|(a_2 h, h)| \leqslant c_1 |h|^2$. В результате из выражения (18) получим следующее неравенство:

$$\int\limits_0^1 |h(x,\tau)|^2 e^{-\theta\tau}\, dx + \theta \iint\limits_{Q_\tau} |h|^2 e^{-\theta t}\, dxdt + 2\bar a \iint\limits_{Q_\tau} |D_x h|^2 e^{-\theta t}\, dxdt$$
$$\leqslant 2c_1 \iint\limits_{Q_\tau} |h|^2 e^{-\theta t}\, dxdt + \int\limits_0^1 |\bar\varphi|^2 dx + 2 \iint\limits_{Q_\tau} [|a_3 h_3||h| + |\varphi||h|] e^{-\theta t}\, dxdt. \quad (19)$$

Оценим в правой части неравенства (19) последнее слагаемое:

$$2 \iint\limits_{Q_\tau} [|a_3 h_3||h| + |\varphi||h|] e^{-\theta t}\, dxdt \leqslant \iint\limits_{Q_\tau} e^{-\theta t} \left[\frac{1}{\varepsilon}|a_3 h_3|^2 + \varepsilon |h|^2 + \frac{1}{\varepsilon}|\varphi|^2 + \varepsilon |h|^2\right] dxdt$$
$$= 2\varepsilon \iint\limits_{Q_\tau} |h|^2 e^{-\theta t}\, dxdt + \frac{g^2}{\varepsilon} \int\limits_0^\tau |h_3|^2 e^{-\theta t}\, dt + \frac{1}{\varepsilon} \iint\limits_{Q_\tau} |\varphi|^2 e^{-\theta t}\, dxdt,$$

где g — элемент вектор-столбца a_3.

С учётом последней оценки неравенство (19) примет вид

$$\int\limits_0^1 |h(x,\tau)|^2 e^{-\theta\tau}\, dx + (\theta - 2c_1 - 2\varepsilon) \iint\limits_{Q_\tau} |h|^2 e^{-\theta t}\, dxdt + 2\bar a \iint\limits_{Q_\tau} |D_x h|^2 e^{-\theta t}\, dxdt$$
$$\leqslant \int\limits_0^1 |\bar\varphi(x)|^2\, dx + \frac{1}{\varepsilon} \iint\limits_{Q_\tau} |\varphi|^2 e^{-\theta t}\, dxdt + \frac{g^2}{\varepsilon} \int\limits_0^\tau h_3^2 e^{-\theta t}\, dt. \quad (20)$$

Выбирая малое $\varepsilon > 0$ и достаточно большое $\theta > 0$, из (17) и (20) получим следующие оценки:

$$\iint\limits_{Q_\tau} |D_x h|^2\, dxdt + \iint\limits_{Q_\tau} \left|D_x^2 h\right|^2 dxdt \leqslant c_1 [\int\limits_0^\tau |h_3|^2\, dt + \iint\limits_{Q_\tau} |h|^2\, dxdt + P_1(\tau)], \tag{21}$$

$$\int\limits_0^1 |h(x,\tau)|^2\, dx + \iint\limits_{Q_\tau} |h|^2\, dxdt + \iint\limits_{Q_\tau} |D_x h|^2\, dxdt \leqslant c_1 \left[\int\limits_0^\tau |h_3|^2\, dt + P_1(\tau)\right]. \tag{22}$$

В силу (22) имеем

$$\int\limits_0^1 h_2^2(x,\tau) dx \leqslant \int\limits_0^1 |h(x,\tau)|^2\, dx \leqslant c_1 \left[\int\limits_0^\tau |h_3(t)|^2\, dt + P_1(\tau)\right].$$

Из последнего неравенства следует

$$\int\limits_0^1 |h_2(x,\tau)| dx \leqslant \sqrt{\int\limits_0^1 |h_2(x,\tau)|^2\, dx} \leqslant \sqrt{c_1 \left[\int\limits_0^\tau |h_3(t)|^2\, dt + P_1(\tau)\right]}$$

$$\leqslant \sqrt{c_1} \left[\sqrt{\int\limits_0^\tau |h_3(t)|^2\, dt} + \sqrt{P_1(\tau)}\right] \leqslant \sqrt{c_1} [\sqrt{T} \max_{0 \leqslant t \leqslant \tau} |h_3(t)| + \sqrt{P_1(\tau)}].$$

Обозначая $M_3 = \sqrt{c_1} \max\{1, \sqrt{T}\}$, отсюда получим неравенство (15).

Из неравенства (22) следует

$$\iint\limits_{Q_\tau} |h|^2\, dxdt \leqslant c_1 \left[\int\limits_0^\tau |h_3|^2\, dt + P_1(\tau)\right].$$

Поэтому оценку (21) с учётом последнего неравенства можно записать в виде

$$\iint\limits_{Q_\tau} |D_x h|^2\, dxdt + \iint\limits_{Q_\tau} \left|D_x^2 h\right|^2 dxdt \leqslant c_1 \left[\int\limits_0^\tau |h_3|^2\, dt + P_1(\tau)\right]. \tag{23}$$

Из первого уравнения системы (10) с учётом последних двух неравенств получим

$$\iint\limits_{Q_\tau} |D_t h|^2\, dxdt \leqslant c_1 \left[\int\limits_0^\tau |h_3|^2\, dt + P_1(\tau)\right]. \tag{24}$$

Из неравенств (22)–(24) следует оценка (13).

Интегрируя второе уравнение системы (10) по промежутку $[0,\tau]$, $0 < \tau \leqslant T$, получим

$$h_3(\tau) = \varphi_6 + \int\limits_0^\tau \left[p \int\limits_0^1 h_2(x,s)\, dx + a_{31}(s) h_3(s) + \varphi_3(s)\right] ds.$$

Отсюда следует

$$|h_3(\tau)| \leqslant |\varphi_6| + p\int\limits_0^\tau\int\limits_0^1 |h_2(x,s)|\,dxds + (p+u_0)\int\limits_0^\tau |h_3(s)|\,ds + \int\limits_0^\tau |\varphi_3(s)|\,ds.$$

Поэтому в силу неравенства (15) имеем

$$|h_3(\tau)| \leqslant (pM_3 + p + u_0)\int\limits_0^\tau \max_{0\leqslant t\leqslant s}|h_3(t)|\,ds + \Phi_1,$$

где

$$\Phi_1 = \varphi_6 + \int\limits_0^\tau |\varphi_3(s)|\,ds + pM_3\sqrt{P_1(\tau)}.$$

Теперь последнее неравенство можно записать в следующем виде:

$$\max_{0\leqslant t\leqslant \tau}|h_3(t)| \leqslant (pM_3 + p + u_0)\int\limits_0^\tau \max_{0\leqslant t\leqslant s}|h_3(t)|\,ds + \Phi_1.$$

В силу неравенства Гронуолла имеем $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant \tau}|h_3(t)| \leqslant \Phi_1 e^{(pM_3+p+u_0)\tau}$, т. е.

$$\|h_3\|_{C[0,\tau]} \leqslant e^{(pM_3+p+u_0)\tau}\Phi_1 = c_1\Phi_1. \tag{25}$$

Тогда

$$\Phi_1^2 = \left(\varphi_6 + \int\limits_0^\tau |\varphi_3(s)|\,ds + pM_3\sqrt{P_1(\tau)}\right)^2 \leqslant c_1 P_2(\tau).$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^\tau |h_3(t)|^2\,dt \leqslant c_1\Phi_1^2 T,$$

т. е.

$$\int\limits_0^\tau |h_3(t)|^2 dt \leqslant c_1 P_2(\tau). \tag{26}$$

Из второго уравнения системы (10), пользуясь неравенствами (13), (26), имеем

$$\int\limits_0^\tau \left|\frac{dh_3}{dt}\right|^2 dt \leqslant c_1 P_2(\tau). \tag{27}$$

Из (26), (27) следует оценка (14). Лемма 1 доказана. □

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ВАРИАЦИЯХ В ГЁЛЬДЕРОВСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Перейдём к доказательству существования и единственности решения $h(x,t) \in H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q_T})$, $h_3(t) \in H^{\alpha/2}[0,T]$ системы уравнений (10)–(12). Для этого предположим, что $\varphi(x,t) \in H^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q_T})$, $\varphi_3(t) \in L_2(0,T)$, и пусть выполняются условия согласования граничных и начальных данных

$$a_0 D_x\bar{\varphi}(0) - \bar{\varphi}(0) = 0, \quad D_x\bar{\varphi}(1) = 0. \tag{28}$$

Лемма 2. *Если при* $\varphi(x,t) \in H^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q_T})$, $0 < \alpha < 1$, $\varphi_3(t) \in L_2(0,T)$ *решение* $h(x,t) \in H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q_T})$, $h_3(t) \in H^{\alpha/2}[0,T]$ *системы дифференциальных уравнений* (10)–(12) *существует, то оно будет единственным.*

Доказательство. Допустим, что система (10)–(12) имеет два решения:

$$\big(h_1^1(x,t), h_2^1(x,t), h_3^1(t)\big), \quad \big(h_1^2(x,t), h_2^2(x,t), h_3^2(t)\big),$$

где

$$h_1^1(x,t), h_2^1(x,t), h_1^2(x,t), h_2^2(x,t) \in H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q_T}), \quad h_3^1(t), h_3^2(t) \in H^{\alpha/2}[0,T].$$

Обозначим $\omega_i = h_i^1 - h_i^2$, $i = 1,2,3$. Тогда функции $\omega_1(x,t)$, $\omega_2(x,t)$, $\omega_3(t)$ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered} -D_t\omega + a_0 D_x^2\omega - a_1 D_x\omega + a_2\omega = -a_3\omega_3, \\ -D_t\omega_3 + p\int_0^1 \omega_2(x,t)\,dx + a_{31}(t)\omega_3 = 0, \end{gathered} \tag{29}$$

$$a_0 D_x\omega(0,t) - \omega(0,t) = 0, \quad D_x\omega(1,t) = 0, \tag{30}$$

$$\omega(x,0) = 0, \quad \omega_3(0) = 0. \tag{31}$$

В силу работы [9] первое уравнение системы (29)–(31) имеет единственное решение $\omega(x,t) \in H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q_T})$, и выполняется неравенство

$$\|\omega\|_{2+\alpha}^{Q_T} \leqslant c_1 \|\omega_3\|_{\alpha/2}^{(0,T)}. \tag{32}$$

Воспользуемся неравенствами леммы 1. Для системы (29)–(31) имеем

$$\varphi(x,t) \equiv 0, \quad \varphi_3(t) \equiv 0, \quad (x,t) \in \overline{Q_T}, \quad \varphi_6 = 0.$$

Поэтому в силу неравенства (14) имеем $\|\omega_3\|_{2,(0,T)}^{(1)} \equiv 0$. Поскольку имеет место вложение $W_2^1(0,T) \subset C[0,T]$, то выполняется неравенство $\|\omega_3\|_0^{[0,T]} \leqslant c_1\|\omega_3\|_{2,(0,T)}^{(1)}$. Поэтому $\|\omega_3\|_0^{[0,T]} = 0$, т. е. $\omega_3(t) \equiv 0$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Следовательно, $\|\omega_3\|_{\alpha/2}^{(0,T)} = 0$. В силу неравенства (32) имеем $\|\omega\|_{2+\alpha}^{Q_T} = 0$. Следовательно,

$$h_1^1(x,t) \equiv h_1^2(x,t), \quad h_2^1(x,t) \equiv h_2^2(x,t), \quad h_3^1(t) \equiv h_3^2(t), \quad (x,t) \in \overline{Q_T}.$$

Лемма 2 доказана. □

Доказательство существования решения системы (10)–(12) проведём с использованием теоремы Лере — Шаудера о неподвижной точке [10, 11].

Рассмотрим функциональное уравнение вида

$$v = V(v, \lambda). \tag{33}$$

Воспользуемся следующим вариантом теоремы Лере — Шаудера [11].

Теорема 1. *Пусть H — банахово пространство, а $\overline{\mathfrak{R}}$ – замыкание какого-либо связного ограниченного открытого множества $\mathfrak{R}$ в H. Пусть Ξ есть топологическое произведение H на отрезок $[0 \leqslant \lambda \leqslant 1]$, так что элементами $\Xi = H \times [0,1]$ являются пары (w, λ), где $w \in H$, $\lambda \in [0,1]$; $\overline{\mathfrak{R}}_1 = \overline{\mathfrak{R}} \times [0,1]$.*

Уравнение (33) имеет по крайней мере одно решение в $\mathfrak{R}$ при всех $\lambda \in [0,1]$, если:

1) преобразование $V(v, \lambda)$ определено и вполне непрерывно из $\overline{\mathfrak{R}}_1$ в H;

2) граница области $\mathfrak{R}$ не содержит решений уравнения (33) ни при каком $\lambda \in [0,1]$;

3) при $\lambda = 0$ уравнение (33) имеет в $\mathfrak{R}$ конечное число решений и суммарный индекс их отличен от нуля.

Условие полной непрерывности $V(v, \lambda)$ на $\overline{\mathfrak{R}}_1$ означает, что $V(v, \lambda)$ непрерывно в каждой точке $\overline{\mathfrak{R}}_1$ и множество значений $V(v, \lambda)$ на $\overline{\mathfrak{R}}_1$ компактно в H. Оно заведомо будет выполняться, если $V(v, \lambda)$ удовлетворяет условиям:

а) непрерывно по (v, λ) на $\overline{\mathfrak{R}}_1$,

б) при каждом фиксированном λ из $[0,1]$ преобразует $\overline{\mathfrak{R}}$ в компактное множество,

в) непрерывно по $\lambda \in [0,1]$ равномерно относительно $v \in \overline{\mathfrak{R}}$.

В соответствии с теоремой Лере — Шаудера рассмотрим семейство уравнений

$$
\begin{gathered}
L_\lambda h \equiv -D_t h + a_0 D_x^2 h - a_1 D_x h + a_2 h = -\lambda a_3 h_3 - \varphi, \\
-D_t h_3 + p \int_0^1 h_2(x,t)\, dx + a_{31}(t) h_3 + \varphi_3(t) = 0
\end{gathered}
\tag{34}
$$

с граничными и начальными условиями (11)–(12), где $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Здесь при $\lambda = 1$ имеем систему (10)–(12).

Прежде всего найдём априорные оценки решений системы (34), (11), (12).

Лемма 3. *Если при $\varphi(x,t) \in H^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q_T})$, $0 < \alpha < 1$, $\varphi_3(t) \in L_2(0,T)$ решение $h(x,t) \in H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q_T})$, $h_3(t) \in H^{\alpha/2}[0,T]$ системы дифференциальных уравнений (34), (11), (12) существует, то справедлива оценка*

$$
\|h\|_{2+\alpha}^{Q_T} + \|h_3\|_{\alpha/2}^{(0,T)} \leqslant c_1,
\tag{35}
$$

где c_1 — постоянная, зависящая от α и от данных задачи и не зависящая от функций h, h_3, u.

Доказательство. Пусть система (34), (11), (12) имеет решение $h(x,t) \in H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q_T})$, $h_3(t) \in H^{\alpha/2}[0,T]$. Тогда в силу [9] имеем оценку решения

$$
\|h\|_{2+\alpha}^{Q_T} \leqslant c_1 \big(\|\varphi\|_\alpha^{Q_T} + \|\lambda h_3\|_{\alpha/2}^{(0,T)} + \|\bar{\varphi}\|_{2+\alpha}^{(0,1)} \big).
\tag{36}
$$

Поскольку $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, то в правой части неравенства (36) имеем $\|\lambda h_3\|_{\alpha/2}^{(0,T)} = |\lambda| \|h_3\|_{\alpha/2}^{(0,T)} \leqslant \|h_3\|_{\alpha/2}^{(0,T)}$. Поэтому достаточно оценить норму $\|h_3\|_{\alpha/2}^{(0,T)}$. Для этого второе уравнение системы (34) запишем в следующем виде:

$$
h_3(\tau) = \varphi_6 + \int_0^\tau \left[p \int_0^1 h_2(x,s)\, dx + a_{31}(s) h_3(s) + \varphi_3(s) \right] ds.
$$

Отсюда имеем

$$
|h_3(\tau)| \leqslant |\varphi_6| + p \int_0^\tau \int_0^1 |h_2(x,s)|\, dx ds + \int_0^\tau |a_{31}(s)| |h_3(s)|\, ds + \int_0^\tau |\varphi_3(s)|\, ds.
$$

Воспользуемся неравенством (15). Тогда последнее неравенство примет вид

$$|h_3(\tau)| \leqslant \Phi_1 + (pM_3 + p + u_0) \int\limits_0^\tau \max_{0 \leqslant t \leqslant s} |h_3(t)|\, ds$$

для $0 \leqslant \tau \leqslant T$, где

$$\Phi_1 = |\varphi_6| + TM_3 p\sqrt{P_1(\tau)} + \sqrt{T} \sqrt{\int\limits_0^T |\varphi_3(s)|^2\, ds}.$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant \tau} |h_3(t)| \leqslant \Phi_1 + (pM_3 + p + u_0) \int\limits_0^\tau \max_{0 \leqslant t \leqslant s} |h_3(t)|\, ds.$$

Тогда в силу неравенства Гроноулла получим оценку

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant \tau} |h_3(\tau)| \leqslant \Phi_1 e^{(pM_3+p+u_0)\tau}, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant T,$$

т. е.

$$\|h_3(t)\|_0^{[0,T]} \leqslant c_1. \tag{37}$$

Найдём оценку полунормы

$$[h_3]_{\alpha/2}^{(0,T)} = \sup_{\substack{t',\, t'' \in [0,T] \\ t' \neq t''}} \frac{|h_3(t') - h_3(t'')|}{|t' - t''|^{\alpha/2}}.$$

Для этого рассмотрим выражение

$$h_3(\tau) - h_3(0) = \int\limits_0^\tau \frac{dh_3}{dt}\, dt = \int\limits_0^\tau \left[p \int\limits_0^1 h_2(x,s)\, dx + a_{31}(s) h_3(s) + \varphi_3(s) \right] ds.$$

Тогда имеем

$$h_3(t') - h_3(t'') = \int\limits_{t''}^{t'} \left[p \int\limits_0^1 h_2(x,s)\, dx + a_{31}(s) h_3(s) + \varphi_3(s) \right] ds$$

или отсюда

$$|h_3(t') - h_3(t'')| \leqslant \left| \int\limits_{t''}^{t'} \left[p \int\limits_0^1 |h_2(x,s)|\, dx + |a_{31}(s) h_3(s)| + |\varphi_3(s)| \right] ds \right|.$$

Пользуясь оценкой (37) и неравенством (15), из последнего выражения получим

$$|h_3(t') - h_3(t'')| \leqslant \left[pM_3 (c_1 + \sqrt{P_1(\tau)}\,) \sqrt{T} + (p + u_0) c_1 \sqrt{T} + \sqrt{\int\limits_0^T |\varphi_3(s)|^2\, ds} \right] |t' - t''|^{1/2},$$

поэтому

$$\frac{|h_3(t') - h_3(t'')|}{|t' - t''|^{\alpha/2}} \leqslant c_1 |t' - t''|^{(1-\alpha)/2} \leqslant c_1 T^{(1-\alpha)/2}.$$

Следовательно,

$$[h_3(t)]^{(0,T)}_{\alpha/2} \leqslant c_1 T^{(1-\alpha)/2}. \tag{38}$$

В конечном итоге в силу неравенств (37), (38) получим $\|h_3\|^{(0,T)}_{\alpha/2} \leqslant c_1$. Подставляя найденную оценку $\|h_3\|^{(0,T)}_{\alpha/2}$ в неравенство (36), получим искомую оценку

$$\|h_1\|^{Q_T}_{2+\alpha} + \|h_2\|^{Q_T}_{2+\alpha} + \|h_3\|^{(0,T)}_{\alpha/2} \leqslant c_1,$$

т. е. решения системы (34), (11), (12) ограничены. Лемма 3 доказана. □

Теорема 2. *Если* $\varphi(x,t) \in H^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q_T})$, $\varphi_3(t) \in L_2(0,T)$, $\bar{\varphi}(x) \in H^{2+\alpha}[0,1]$ *и выполняются условия согласования* (28), *то система уравнений* (10)–(12) *имеет единственное решение:*

$$h(x,t) \in H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q_T}), \quad h_3(t) \in C_1[0,T].$$

Доказательство. Чтобы воспользоваться теоремой Лере — Шаудера, проверим выполнимость условий этой теоремы.

В качестве банахова пространства H примем пространство $H^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{Q_T})$, а в качестве $\mathfrak{R}$ какой-либо шар в H с центром в нулевом элементе H. Для каждого $h(x,t) \in H^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{Q_T})$ и произвольного $\lambda \in [0,1]$ построим решение $w(x,t)$ линейной системы

$$-D_t w + a_0 D_x^2 w - a_1 D_x w + a_2 w + \varphi = -\lambda a_3 h_3, \tag{39}$$

где

$$h_3(t) = \left(\varphi_6 + \int_0^t \left[p \int_0^1 h_2(x,\xi)\,dx + \varphi_3(\xi)\right] e^{-\int_0^\xi a_{31}(s)\,ds}\, d\xi\right) e^{\int_0^t a_{31}(s)\,ds}$$

— решение второго уравнения системы (34). Существование решения $w(x,t) \in H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q_T})$ линейной системы (39), (11), (12) следует из [9]. Тем самым определён оператор $V\colon h \to w$.

При $\lambda = 0$, в силу [9], система (39), (11), (12) имеет единственное решение $w(x,t) \in H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q_T})$. Следовательно суммарный индекс их отличен от нуля. Таким образом, выполняется условие 3 теоремы Лере — Шаудера. В силу неравенства (35) и неравенства $\|h\|^{Q_T}_{1+\alpha} \leqslant c_1\|h\|^{Q_T}_{2+\alpha}$ (которое выполняется как следствие вложения $H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q_T}) \subset H^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{Q_T})$), справедливого для любого возможного решения уравнения $h = V(h,\lambda)$ выполняется априорная оценка $\|h\|^{Q_T}_{1+\alpha} \leqslant c_1$.

Чтобы решение $h(x,t)$ системы (34), (11), (12) при изменении параметра λ в пределах от нуля до единицы не вышло на границу области $\mathfrak{R}$, достаточно взять множество $\mathfrak{R}$ таким, чтобы оно содержало шар радиуса c_1, и тогда мы будем знать, что решение $h(x,t)$ не выходит на границу $\mathfrak{R}$. Таким образом, условие 2 теоремы Лере — Шаудера также выполняется.

Перейдём к проверке выполнимости условия 1 теоремы Лере — Шаудера. Рассмотрим шар $I_r = \left\{h \in H^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{Q_T}) \mid \|h\|^{Q_T}_{1+\alpha} \leqslant r\right\}$ и покажем, что при всех $\lambda \in [0,1]$ оператор $V(h,\lambda)$ вполне непрерывен. Для каждого $h \in I_r$ уравнение (39) с соответствующими граничными и начальными условиями (11), (12) имеет решение $w(x,t) \in H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q_T})$. Покажем, что

$$\|w\|^{Q_T}_{2+\alpha} \leqslant c_1(r). \tag{40}$$

Для системы (39) с соответствующими граничными и начальными условиями в силу работы [9] имеем

$$\|w\|^{Q_T}_{2+\alpha} \leqslant c_1\left[\|\varphi\|^{Q_T}_{\alpha} + \|\bar{\varphi}\|^{(0,1)}_{2+\alpha} + \|\lambda h_3\|^{(0,T)}_{\alpha/2}\right]. \tag{41}$$

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение системы (34). Имеем

$$h_3(t) = \varphi_6 + \int_0^t \left[p \int_0^1 h_2(x,s)\,dx + a_{31}h_3 + \varphi_3 \right] ds.$$

Отсюда

$$|h_3(t)| \leqslant |\varphi_6| + pTr + \int_0^T |\varphi_3(s)|\,ds + (p+u_0)\int_0^t \max_{0\leqslant t\leqslant s} |h_3(t)|\,ds.$$

Обозначая

$$\tilde{c}_1(r) = |\varphi_6| + pTr + \sqrt{T}\sqrt{\int_0^T \varphi_3^2(s)\,ds}\,,$$

имеем

$$\max_{0\leqslant\tau\leqslant t} |h_3(\tau)| \leqslant \tilde{c}_1(r) + (p+u_0)\int_0^t \max_{0\leqslant t\leqslant s} |h_3(t)|\,ds.$$

Воспользуемся неравенством Гронуолла и тогда получим $\max_{0\leqslant\tau\leqslant t} |h_3(\tau)| \leqslant \tilde{c}_1(r)e^{(p+u_0)t}$. Обозначая $c_1(r) = \tilde{c}_1(r)e^{(p+u_0)T}$, получим

$$\|h_3\|_0^{[0,T]} \leqslant c_1(r). \tag{42}$$

Повторяя рассуждения, проведённые при выводе неравенства (38), получим $[h_3]_{\alpha/2}^{(0,T)} \leqslant c_1$ и в конечном итоге, учитывая неравенство (42), имеем $\|h_3\|_{\alpha/2}^{(0,T)} \leqslant c_1(r)$. В итоге, из последнего неравенства и неравенства (41) получим неравенство (40).

Таким образом, оператор $V(h,\lambda)$ переводит ограниченное множество I_r в ограниченное множество $J_r = \left\{ w \mid |w|_{2+\alpha}^{Q_T} \leqslant c_1(r) \right\}$ пространства $H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q_T})$, а значит, и в ограниченное множество пространства $H^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{Q_T})$. Вложение $H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q_T}) \subset H^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{Q_T})$ является вполне непрерывным, это означает, что множество J_r является компактным в $H^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{Q_T})$. Следовательно, оператор V переводит ограниченное множество I_r пространства $H^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{Q_T})$ в относительно компактное множество пространства $H^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{Q_T})$, т. е. оператор V компактный.

Покажем равномерную непрерывность оператора $V(h,\lambda)$ на $I_r \times [0,1]$. Рассмотрим функции $h_1^1, h_2^1, h_1^2, h_2^2 \in I_r$. Обозначим

$$w^j = V(h^j,\lambda), \quad \Delta w_i = w_i^1 - w_i^2, \quad \Delta h_i = h_i^1 - h_i^2, \quad \Delta h_3 = h_3^1 - h_3^2,$$
$$h^j = \begin{pmatrix} h_1^j \\ h_2^j \end{pmatrix}, \quad \Delta h = \begin{pmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \end{pmatrix}, \quad \Delta w = \begin{pmatrix} \Delta w_1 \\ \Delta w_2 \end{pmatrix}, \quad i,j = 1,2.$$

Тогда функция $\Delta w(x,t)$ является решением следующей задачи:

$$\begin{gathered} -D_t\Delta w + a_0 D_x^2 \Delta w - a_1 D_x \Delta w + a_2 \Delta w = -\lambda a_3 \Delta h_3, \\ a_0 D_x \Delta w(0,t) - \Delta w(0,t) = 0,\ D_x\Delta w(1,t) = 0, \quad \Delta w(x,0) = 0. \end{gathered} \tag{43}$$

Оценивая, как в работе [9], норму решения этого уравнения через норму правой части, имеем неравенство

$$\|\Delta w\|_{2+\alpha}^{Q_T} \leqslant c_1 \|\Delta h_3\|_{\alpha/2}^{(0,T)}. \tag{44}$$

Теперь оценим правую часть неравенства (44). Для этого воспользуемся обыкновенным дифференциальным уравнением нашей системы. Имеем

$$\Delta h_3(t) = \int\limits_0^t \left[p \int\limits_0^1 \Delta h_2(x,s)\,dx + a_{31}(s)\Delta h_3(s) \right] ds. \tag{45}$$

Отсюда следует

$$|\Delta h_3(t)| \leqslant pT\|\Delta h_2\|_0^{Q_T} + (p+u_0)\int\limits_0^t |\Delta h_3(s)|\,ds.$$

Поэтому в силу неравенства Гронуолла имеем $|\Delta h_3(t)| \leqslant pTe^{(p+u_0)T}\|\Delta h_2\|_0^{Q_T}$, т. е.

$$\|\Delta h_3(t)\|_0^{[0,T]} \leqslant c_1\|\Delta h_2\|_0^{Q_T}. \tag{46}$$

Чтобы оценить полунорму $[\Delta h_3]_{\alpha/2}^{(0,T)}$, рассмотрим уравнение (45). Отсюда получим

$$\Delta h_3(t') - \Delta h_3(t'') = \int\limits_{t''}^{t'} \left[p \int\limits_0^1 \Delta h_2(x,s)\,dx + a_{31}(s)\Delta h_3(s) \right] ds.$$

Следовательно,

$$|\Delta h_3(t') - \Delta h_3(t'')| \leqslant \bigl(p\|\Delta h_2\|_0^{Q_T} + (p+u_0)\|\Delta h_3\|_0^{[0,T]}\bigr)|t'-t''|.$$

Отсюда получим

$$\frac{|\Delta h_3(t') - \Delta h_3(t'')|}{|t'-t''|^{\alpha/2}} \leqslant \bigl(p\|\Delta h_2\|_0^{Q_T} + (p+u_0)\|\Delta h_3\|_0^{[0,T]}\bigr)T^{1-\alpha/2}.$$

Поэтому, учитывая неравенство (46), имеем $[\Delta h_3(t)]_{\alpha/2}^{(0,T)} \leqslant c_1\|\Delta h_2\|_0^{Q_T}$, т. е.

$$\|\Delta h_3(t)\|_{\alpha/2}^{(0,T)} \leqslant c_1\|\Delta h_2\|_0^{Q_T}. \tag{47}$$

Очевидно, что $\|\Delta w\|_{1+\alpha}^{Q_T} \leqslant c_1\|\Delta w\|_{2+\alpha}^{Q_T}$, поэтому, учитывая неравенства (44), (47), имеем

$$\|\Delta w\|_{1+\alpha}^{Q_T} \leqslant \|\Delta w\|_{2+\alpha}^{Q_T} \leqslant c_1\|\Delta h_2\|_0^{Q_T} \leqslant c_1\|\Delta h\|_{1+\alpha}^{Q_T},$$

т. е. $\|\Delta w\|_{1+\alpha}^{Q_T} \leqslant c_1\|\Delta h\|_{1+\alpha}^{Q_T}$. Следовательно, оператор $V(h,\lambda)$ равномерно непрерывен по h на $I_r \times [0,1]$. Учитывая ещё компактность оператора V, имеем вполне непрерывный оператор $V(h,\lambda)$.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$. Обозначим $w^j = V(h,\lambda_j)$, $j = 1,2$. Тогда функция $\Delta w = w^1 - w^2$ удовлетворяет уравнениям

$$\begin{gathered} -D_t\Delta w + a_0 D_x^2\Delta w - a_1 D_x\Delta w + a_2\Delta w = -(\lambda_1-\lambda_2)a_3 h_3, \\ a_0 D_x\Delta w(0,t) - \Delta w(0,t) = 0, \quad D_x\Delta w(1,t) = 0, \quad \Delta w(x,0) = 0, \end{gathered} \tag{48}$$

где $h_3(t)$ — решение второго уравнения системы (34). Поэтому в силу [9] имеем

$$\|\Delta w\|_{2+\alpha}^{Q_T} \leqslant c_1|\lambda_1-\lambda_2|\|h_3\|_{\alpha/2}^{(0,T)} \leqslant c_1(r)|\lambda_1-\lambda_2|.$$

Но это означает равномерную непрерывность оператора $V(h,\lambda)$ по λ.

Поскольку оператор $V(h,\lambda)$ является непрерывным по h равномерно по λ и непрерывным по λ равномерно по h, то оператор $V(h,\lambda)$ будет непрерывным по (h,λ). Таким образом, все условия теоремы Лере — Шаудера выполнены, следовательно, уравнение $h = V(h,\lambda)$, $\lambda \in [0,1]$ имеет по крайней мере одно решение при $\lambda \in [0,1]$. Очевидно, $h(x,t) \in H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q_T})$. Теорема 2 доказана. □

4. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ВАРИАЦИЯХ В СОБОЛЕВСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Для завершения доказательства существования решения системы (10)–(12) в пространстве $W_2^{2,1}(Q_T) \times W_2^{2,1}(Q_T) \times W_2^1(0,T)$ воспользуемся плотностью пространств $H^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q_T})$, $H^{2+\alpha}[0,1]$ соответственно в пространствах $L_2(Q_T)$, $W_2^1(0,1)$. Рассмотрим произвольные функции $\varphi_1(x,t), \varphi_2(x,t) \in L_2(Q_T)$, $\varphi_3(t) \in L_2(0,T)$, $\varphi_4(x), \varphi_5(x) \in W_2^1(0,1)$, $\varphi_6 \in \mathbb{R}$. Тогда существуют последовательности

$$\big\{\varphi_1^n(x,t)\big\}, \big\{\varphi_2^n(x,t)\big\} \subset H^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q_T}); \quad \big\{\varphi_4^n(x)\big\}, \big\{\varphi_5^n(x)\big\} \subset H^{2+\alpha}[0,1],$$

сходящиеся соответственно:

$$\begin{gathered}\varphi_1^n(x,t) \to \varphi_1(x,t), \quad \varphi_2^n(x,t) \to \varphi_2(x,t) \quad \text{по норме } L_2(Q_T),\\ \varphi_4^n(x) \to \varphi_4(x), \quad \varphi_5^n(x) \to \varphi_5(x) \quad \text{по норме } W_2^1(0,1),\end{gathered}$$

причём последовательности $\big\{\varphi_4^n(x)\big\}$, $\big\{\varphi_5^n(x)\big\}$ удовлетворяют условиям согласования (28).

В силу теоремы 2, для каждой вектор-функции $\big(\varphi_1^n, \varphi_2^n, \varphi_3, \varphi_4^n, \varphi_5^n, \varphi_6\big)$ существует единственное решение $\big(h_1^n, h_2^n, h_3^n\big)$ системы (10)–(12), где

$$h_1^n(x,t), h_2^n(x,t) \in H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q_T}), \quad h_3^n(t) \in C_1[0,T].$$

Остановимся на принадлежности $h_3^n(t) \in W_2^1(0,T)$. Здесь $h_3^n(t) \in C_1[0,T]$, $h_2^n(x,t) \in H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q_T})$. Поэтому можно считать, что

$$h_3^n(t) \in L_2(0,T); \quad \int\limits_0^1 h_2^n(x,t)\,dx \in L_2(0,T).$$

По условию $\varphi_3(t) \in L_2(0,T)$. Следовательно, из уравнения

$$\frac{dh_3^n}{dt} = p\int\limits_0^1 h_2^n(x,t)\,dx + a_{31}(t)h_3^n(t) + \varphi_3(t)$$

следует, что $\dfrac{dh_3^n}{dt} \in L_2(0,T)$. В итоге $h_3^n(t) \in W_2^1(0,T)$.

Поскольку последовательности $\big\{\varphi_1^n(x,t)\big\}$, $\big\{\varphi_2^n(x,t)\big\}$, $\big\{\varphi_4^n(x)\big\}$, $\big\{\varphi_5^n(x)\big\}$ являются сходящимися в пространстве $L_2(Q_T)\times L_2(Q_T)\times W_2^1(0,1)\times W_2^1(0,1)$, то при достаточно больших n и m последовательности $\big\{\varphi_1^n(x,t)-\varphi_1^m(x,t)\big\}$, $\big\{\varphi_2^n(x,t)-\varphi_2^m(x,t)\big\}$, $\big\{\varphi_4^n(x)-\varphi_4^m(x)\big\}$, $\big\{\varphi_5^n(x)-\varphi_5^m(x)\big\}$ будут сколь угодно малыми. Если последовательности $\big\{\varphi_1^m, \varphi_2^m, \varphi_3, \varphi_4^m, \varphi_5^m, \varphi_6\big\}$ соответствует решение $\big\{h_1^m(x,t), h_2^m(x,t), h_3^m(t)\big\}$ системы (10)–(12), то разность $\big\{h_1^n - h_1^m, h_2^n - h_2^m, h_3^n - h_3^m\big\}$, являющаяся решением системы (10)–(12) в силу неравенств (13)–(14), будет сколь угодно малой. Следовательно, последовательность $\big\{h_1^n, h_2^n, h_3^n\big\}$ в пространстве $W_2^{2,1}(Q_T) \times W_2^{2,1}(Q_T) \times W_2^1(0,T)$ будет сходиться к некоторой вектор-функции $(h_1(x,t), h_2(x,t), h_3(t))$, удовлетворяющей граничным и начальным условиям (11)–(12).

При этом в силу неравенств (13)–(14) имеем $h_1^n(x,t) \to h_1(x,t)$, $h_2^n(x,t) \to h_2(x,t)$ по норме $W_2^{2,1}(Q_T)$, $h_3^n(t) \to h_3(t)$ по норме $W_2^1(0,T)$ при $n \to \infty$. Таким образом построенную вектор-функцию $(h_1(x,t), h_2(x,t), h_3(t))$ можно принять за решение (сильное решение) системы (10)–(12) в пространстве $W_2^{2,1}(Q_T) \times W_2^{2,1}(Q_T) \times W_2^1(0,T)$, соответствующую вектор-функции

$$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6) \in L_2(Q_T) \times L_2(Q_T) \times L_2(0,T) \times W_2^1(0,1) \times W_2^1(0,1) \times \mathbb{R}.$$

Теорема 3. *Для любых функций*

$$\varphi_1(x,t), \varphi_2(x,t) \in L_2(Q_T), \quad \varphi_3(t) \in L_2(0,T), \quad \varphi_4(x), \varphi_5(x) \in W_2^1(0,1)$$

и конечного числа $\varphi_6 \in \mathbb{R}$ *соответствующее решение*

$$h_1(x,t), h_2(x,t) \in W_2^{2,1}(Q_T), \quad h_3(t) \in W_2^1(0,T)$$

системы (10)–(12) *существует и единственно.*

Доказательство. Допустим, что существуют два решения $(h_1(x,t), h_2(x,t), h_3(t))$, $(\bar{h}_1(x,t), \bar{h}_2(x,t), \bar{h}_3(t))$ системы (10)–(12), где $h_1, h_2, \bar{h}_1, \bar{h}_2 \in W_2^{2,1}(Q_T)$; $h_3, \bar{h}_3 \in W_2^1(0,T)$. Это означает, что существуют две последовательности

$$\{\varphi_1^n, \varphi_2^n, \varphi_3, \varphi_4^n, \varphi_5^n, \varphi_6, h_1^n, h_2^n, h_3^n,\}, \quad \{\bar{\varphi}_1^n, \bar{\varphi}_2^n, \varphi_3, \bar{\varphi}_4^n, \bar{\varphi}_5^n, \varphi_6, \bar{h}_1^n, \bar{h}_2^n, \bar{h}_3^n\},$$

где

$$\varphi_1^n, \varphi_2^n, \bar{\varphi}_1^n, \bar{\varphi}_2^n \in H^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q_T}), \quad \varphi_4^n, \varphi_5^n, \bar{\varphi}_4^n, \bar{\varphi}_5^n \in H^{2+\alpha}[0,1],$$
$$h_1^n, h_2^n, \bar{h}_1^n, \bar{h}_2^n \in H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q_T}), \quad h_3^n, \bar{h}_3^n \in W_2^1(0,T),$$

сходящиеся соответственно к

$$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, h_1, h_2, h_3), \quad (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{h}_3),$$

т. е.

$$\varphi_i^n(x,t) \to \varphi_i(x,t), \quad \bar{\varphi}_i^n(x,t) \to \varphi_i(x,t) \quad \text{по норме } L_2(Q_T), \quad i = 1,2;$$
$$\varphi_i^n(x) \to \varphi_i(x), \quad \bar{\varphi}_i^n(x) \to \varphi_i(x) \quad \text{по норме } W_2^1(0,1), \quad i = 4,5;$$
$$h_i^n(x,t) \to h_i(x,t), \quad \bar{h}_i^n(x,t) \to \bar{h}_i(x,t) \quad \text{по норме } W_2^{2,1}(Q_T), \quad i = 1,2;$$
$$h_3^n(t) \to h_3(t), \quad \bar{h}_3^n(t) \to \bar{h}_3(t) \quad \text{по норме } W_2^1(0,T).$$

Обозначим

$$\Delta h_i^n = h_i^n - \bar{h}_i^n, \quad i = 1,2,3; \quad \Delta\varphi_j^n = \varphi_j^n - \bar{\varphi}_j^n, \quad j = 1,2,4,5,$$

тогда в силу неравенств (13), (14) имеем

$$\sum_{k=0}^{2} \iint_{Q_T} \left|D_x^k \Delta h^n\right|^2 dxdt + \iint_{Q_T} |D_t \Delta h^n|^2 dxdt \leqslant M_1 \left[\Delta P_1(\tau) + \int_0^T \left(\Delta h_3^n\right)^2 dt\right],$$
$$\int_0^T \left(\Delta h_3^n\right)^2 dt + \int_0^T \left(D_t \Delta h_3^n\right)^2 dt \leqslant M_2 \Delta P_2(\tau) \to 0 \quad \text{при } n \to \infty,$$

где

$$\Delta P_1(\tau) = \iint\limits_{Q_\tau} \left[\left(\Delta\varphi_1^n\right)^2 + \left(\Delta\varphi_2^n\right)^2\right] dxdt$$

$$+ \int\limits_0^1 \left[\left(\Delta\varphi_4^n\right)^2 + \left(\Delta\varphi_5^n\right)^2\right] dx + \int\limits_0^1 \left[\left(D_x\Delta\varphi_4^n\right)^2 + \left(D_x\Delta\varphi_5^n\right)^2\right] dx,$$

$$\Delta P_2(\tau) = \Delta P_1(\tau).$$

Поэтому $\left\|\Delta h_3^n\right\|_{2,(0,T)}^{(1)} \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно $\|\Delta h^n\|_{2,Q_T}^{(2)} \to 0$ при $n \to \infty$. В итоге имеем $h_1(x,t) \equiv \bar{h}_1(x,t)$, $h_2(x,t) \equiv \bar{h}_2(x,t)$, $h_3(t) \equiv \bar{h}_3(t)$ почти всюду в Q_T. Единственность решения системы (10)–(12) доказана. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Georgakis C., Aris R., Amundson N. R.* Studies in the control of tubular reactors // Chemical Engng. Sci. 1977. V. 32, N 11. P. 1359–1387.
2. *Мусабеков К. С.* Теоремы существования решения в одной задаче оптимального управления химическим реактором // Управляемые процессы и оптимизация. Управляемые системы. Новосибирск, 1982. Вып. 22. С. 30–50.
3. *Белоносов В. С., Зеленяк Т. И.* Нелокальные проблемы в теории квазилинейных параболических уравнений. Новосибирск: изд. НГУ, 1975.
4. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
5. *Мусабеков К. С.* Существование оптимального управления в одной регуляризованной задаче с фазовым ограничением // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2010. Т. 10, вып. 2. С. 61–74.
6. *Мусабеков К. С.* Метод штрафных функций в одной задаче оптимального управления с фазовым ограничением // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2013. Т. 13, вып. 2. С. 86–98.
7. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961.
8. *Гирсанов И. В.* Лекции по математической теории экстремальных задач. М.: Изд-во МГУ, 1970.
9. *Солонников В. А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. Физ.-мат. ин-та им. Стеклова АН СССР. 1965. Т. 83. С. 3–162.
10. *Лерэй Ж., Шаудер Ю.* Топология и функциональные уравнения // Успехи мат. наук. 1946. Т. 1, вып. 3–4. С. 71–95.
11. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 519.63:519.24:550.83

EXISTENCE OF A SOLUTION TO A SYSTEM OF EQUATIONS IN VARIATIONS IN AN OPTIMAL CONTROL PROBLEM

K. S. Musabekov

Kokshetau State University named after S. Ualikhanov, ul. Abay 76, Kokshetau 020000, Kazakhstan

E-mail: it.kgu@mail.ru

Received 16.07.2020, revised 02.10.2020, accepted 15.10.2020

Abstract. We consider an optimal control problem for some mathematical problem of a chemical reactor. We prove the existence of a solution to the system in variations which arises in deriving a necessary optimality condition in the form of the Pontryagin Maximum Principle.

Keywords: mathematical model, chemical reactor, optimal control, functional, necessary optimality condition, Pontryagin Maximum Principle.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.104

REFERENCES

1. Georgakis C., Aris R., Amundson N.R. Studies in the control of tubular reactors. *Chemical Engrg. Sci.*, 1977, Vol. 32, No. 11, pp. 1359–1387.
2. Musabekov K.S. Teoremy sushchestvovaniya resheniya v odnoi zadache optimal'nogo upravleniya khimicheskim reaktorom [Theorems of existence of a solution to an optimal control problem of a chemical reactor]. *Upravlyaemye protsessy i optimizatsiya. Upravlyaemye Sistemy* [Controlled processes and optimization. Controlled systems]. Novosibirsk, 1982, Vyp. 22, pp. 30–50 (in Russian).
3. Belonosov V.S., Zelenyak T.I. Nelokal'nye problemy v teorii kvazilineinykh parabolicheskikh uravnenii [Nonlocal problems of theory of quasilinear parabolic equations]. Novosibirsk: Izd. Novosib. Gos. Univ., 1975 (in Russian).
4. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. Lineinye i kvazilineinye uravneniya parabolicheskogo tipa [Linear and quasilinear equations of parabolic type]. Moscow: Nauka, 1967 (in Russian).
5. Musabekov K.S. Sushchestvovanie optimal'nogo upravleniya v odnoi regulyarizovannoi zadache s fazovym ogranicheniem [Existence of an optimal control in a regularized problem with phase constraints]. *Vestnik Novosib. Gos. Univ. Ser. Mat. Mekh. Inform.*, 2010, Vol. 10, Vyp. 2, pp. 61–74 (in Russian).
6. Musabekov K.S. Metod shtrafnykh funktsii v odnoi zadache optimal'nogo upravleniya s fazovym ogranicheniem [The penalty method in an optimal control problem with a phase constraint]. *Vestnik Novosib. Gos. Univ. Ser. Mat. Mekh. Inform.*, 2013, Vol. 13, Vyp. 2, pp. 86–98 (in Russian).
7. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov [Mathematical theory of optimal processes]. Moscow: Nauka, 1961 (in Russian).
8. Girsanov I.V. Lektsii po matematicheskoi teorii ekstremal'nykh zadach [Lecture notes on mathematical theory of extremum problems]. Moscow: Moskov. Gos. Univ. Press, 1970 (in Russian).
9. Solonnikov V.A. O kraevykh zadachakh dlya lineinykh parabolicheskikh sistem differentsial'nykh uravnenii obshchego vida [On boundary value problems on linear parabolic systems of differential equations of general kind]. *Trudy Fiz.-Mat. Inst. Steklov. Akad. Nauk. SSSR*, 1965, Vol. 83, pp. 3–162 (in Russian).

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2021, Vol. 15, No. 1, pp. 62–77; DOI: 10.1134/S1990478921010063

10. Lerei Zh., Shauder Yu. Topologiya i funktsional'nye uravneniya [Topology and functional equations]. *Uspekhi Mat. Nauk*, 1946, Vol. 1, Vyp. 3–4, pp. 71–95 (in Russian).

11. Ladyzhenskaya O.A., Ural'tseva N.N. Lineinye i kvazilineinye uravneniya ellipticheskogo tipa [Linear and quasilinear equations of elliptic type]. Moscow: Nauka, 1973 (in Russian).