УДК 517.9

МЕТОД КОММУТАТОРОВ ДЛЯ ИНТЕГРИРОВАНИЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ РИККАТИ

© 2021 **М. В. Нещадим**[1,3a], **А. П. Чупахин**[2,3b]

[1]*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,*
просп. Акад. Коптюга, 4, г. Новосибирск 630090, Россия,
[2]*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,*
просп. Акад. Лаврентьева, 15, Новосибирск 630090, Россия,
[3]*Новосибирский государственный университет,*
ул. Пирогова, 1, г. Новосибирск 630090, Россия

E-mails: [a]neshch@math.nsc.ru, [b]chupakhin@hydro.nsc.ru

Поступила в редакцию 28.12.2020 г.; после доработки 28.12.2020 г.;
принята к публикации 28.12.2021 г.

Проводится полное интегрирование матричного уравнения Риккати, возникающего в механике континуума в двумерном случае. Используется метод коммутаторов для получения условий совместности.

Ключевые слова: матричное уравнение Риккати, коммутаторы дифференциальных операторов.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.106

Данная работа продолжает начатые в [1] исследования матричного уравнения Риккати, основанные на анализе алгебраической структуры матриц, входящих в это уравнение. Матричное уравнение Риккати (МУР) возникает во многих разделах математики [2–4] и широко используется в различных приложениях [5–8], включая механику континуума [9, 10]. В последнем случае МУР получается как дифференциальное следствие уравнений импульсов для матрицы градиента векторного поля скорости континуума. В отличие от других приложений, например в теории управления, МУР в этом случае является уравнением в частных производных по пространственным переменным и материальной производной, включающей дифференцирование как по времени, так и по пространственным координатам. При использовании дифференциальных следствий уравнений необходимо получать условия совместности возникающей при этом переопределённой системы [12–13]. Для МУР механики континуума это влечёт вычисление коммутаторов оператора градиента по пространственным переменным и полной производной. Оказывается, условия обрыва цепочки коммутаторов приводят к уравнениям Эйлера идеальной сжимаемой жидкости для среды без давления (барохронные решения в терминологии работы [14]). В работе приведено полное интегрирование МУР механики континуума для размерности два. Представляется, что развиваемая техника может быть использована для интегрирования более сложных уравнений в высших размерностях.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программ фундаментальных научных исследований СО РАН III.22.4.1 и I.1.5.(проект 0314-2019-0011).

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И КОММУТАТОРНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Пусть вектор-функция $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^n)$ и функция h зависят от переменных $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$ и t. Рассмотрим систему уравнений

$$D\mathbf{u} = -\nabla h, \tag{1}$$

где

$$D = \partial_t + u^1 \partial_{x^1} + \dots + u^n \partial_{x^n} \tag{2}$$

— дифференциальный оператор первого порядка, $\nabla h = (h_{x^1}, \dots, h_{x^n})^T$ — градиент функции h (вектор-столбец), T — знак транспонирования. Введём также матрицу Якоби J для вектор-функции $\mathbf{u}$:

$$J = \begin{pmatrix} u^1_{x^1} & u^1_{x^2} & \dots & u^1_{x^n} \\ u^2_{x^1} & u^2_{x^2} & \dots & u^2_{x^n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u^n_{x^1} & u^n_{x^2} & \dots & u^n_{x^n} \end{pmatrix} \tag{3}$$

и матрицу Гессе H для функции h:

$$H = \begin{pmatrix} h_{x^1x^1} & h_{x^1x^2} & \dots & h_{x^1x^n} \\ h_{x^2x^1} & h_{x^2x^2} & \dots & h_{x^2x^n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{x^nx^1} & h_{x^nx^2} & \dots & h_{x^nx^n} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Лемма 1. *Для системы* (1) *имеют место равенства*

$$DJ^* + J^{*2} + H = 0, \tag{5}$$

$$DJ + J^2 + H = 0, \tag{6}$$

где $J^* = J^T$ *— транспонированная матрица* J.

Доказательство. Дифференцируя уравнение

$$Du^k = u^k_t + u^1 u^k_{x^1} + \dots + u^n u^k_{x^n} = -h_{x^k}, \quad k = 1, \dots, n,$$

по переменной x^s, $s = 1, \dots, n$, получим

$$u^k_{tx^s} + \left(u^1_{x^s} u^k_{x^1} + u^1 u^k_{x^1x^s}\right) + \dots + \left(u^1_{x^s} u^k_{x^n} + u^1 u^k_{x^nx^s}\right) = -h_{x^kx^s}$$

или $D\left(u^k_{x^s}\right) + \mathbf{u}_{x^s} \cdot \nabla u^k = -h_{x^kx^s}$.

Учитывая вид матрицы J, получаем матричное равенство (5): $DJ^* + J^{*2} + H = 0$. Так как матрица H симметрична, то транспонированием из (5) получаем (6). □

Лемма 2. *Для операторов* D *и* ∇ *имеют место равенства*

$$[\nabla, D] = J^* \nabla, \tag{7}$$

$$[D, \nabla] = -J^* \nabla, \tag{8}$$

где $[A, B] = AB - BA$ *— стандартный коммутатор операторов* A, B.

Доказательство. Пусть $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t)$ — некоторая функция. Тогда

$$[\nabla, D]\varphi = \nabla D\varphi - D\nabla\varphi = \nabla(\varphi_t + u^1\varphi_{x^1} + \ldots + u^n\varphi_{x^n}) - D\nabla\varphi$$
$$= D\nabla\varphi + \nabla u^1\varphi_{x^1} + \ldots + \nabla u^n\varphi_{x^n}) - D\nabla\varphi = J^*\nabla\varphi$$

— равенство (7). Так как $[D, \nabla] = -[\nabla, D]$, то из (6) получаем (7). □

Лемма 3. *Пусть K — оператор вида $K = A\nabla$, где A — некоторая переменная матрица размера $n \times n$. Тогда справедливо равенство*

$$[D, K] = (DA - AJ^*)\nabla. \tag{9}$$

Доказательство. Пусть $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t)$ — некоторая функция. Тогда в силу (7)

$$[D, K]\varphi = DA\nabla\varphi - A\nabla D\varphi = D(A)\nabla\varphi + AD\nabla\varphi - A\nabla D\varphi =$$
$$= D(A)\nabla\varphi + A[D, \nabla]\varphi = D(A)\nabla\varphi - AJ^*\nabla\varphi = (DA - AJ^*)\nabla\varphi.$$

Лемма 3 доказана. □

Следствие 1. Имеют место равенства

$$[D, [\nabla, D]] = -(H + 2J^{*2})\nabla, \tag{10}$$
$$[D, [D, [\nabla, D]]] = (-DH + 6J^{*3} + 2J^*H + 3HJ^*)\nabla. \tag{11}$$

Доказательство. Так как $[\nabla, D] = J^*\nabla$, то в силу леммы 3 и (6)

$$[D, [\nabla, D]] = (DJ^* - J^{*2})\nabla = -(H + 2J^{*2})\nabla.$$

Для получения (11) применяем формулу (9) к (10); в силу (6) можем написать

$$[D, [D, [\nabla, D]]] = (-DH - 2DJ^{*2} + (H + 2J^{*2})J^*)\nabla$$
$$= (-DH - 2J^*DJ^* - 2DJ^* \cdot J^* + HJ^* + 2J^{*3})\nabla$$
$$= (-DH + 2J^*(H + J^{*2}) + 2(H + J^{*2})J^* + HJ^* + 2J^{*3})\nabla$$
$$= (-DH + 6J^{*3} + 2J^*H + 3HJ^*)\nabla.$$

Следствие 1 доказано. □

Замечание 1. Используя (9), можно найти общую реккурентную формулу для коммутатора $[D_n, \nabla] \equiv [D, [D, \ldots [D, \nabla] \ldots]]$, где оператор D встречается n раз.

Замечание 2. Естественно рассмотреть систему (1) с дополнительным требованием $[D_n, \nabla] = 0$ для некоторого натурального $n \geqslant 2$. Возможно, что таким образом удастся найти новые:

— классы решений системы (1),

— инварианты пары матриц (J, H),

— дифференциально-алгебраические соотношения на решения и т. п.

Замечание 3. Если $[D_2, \nabla] = 0$, то в силу (10)

$$H = -2J^{*2} \tag{12}$$

и, следовательно, система (6) принимает вид

$$DJ = J^2. \tag{13}$$

Данное матричное уравнение Риккати исследовано в [14]. Если $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — собственные значения матрицы J и $j_1 = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$, $\dots$, $j_n = \lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n$ — элементарные симметрические многочлены переменных $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, то, как показано в [14], в силу (1) имеет место следующая система равенств:

$$Dj_l + j_1 j_l - (l+1)j_{l+1} = 0, \quad Dj_n + j_1 j_n = 0, \quad l = 1, \dots, n-1. \tag{14}$$

В [14] также доказано, что система (13) эквивалентна следующей системе для собственных значений матрицы J:

$$D\lambda_k + \lambda_k^2 = 0, \quad k = 1, \dots, n. \tag{15}$$

Отметим, что наличие равенства (12) накладывает ограничения на жорданову форму матрицы J: так как матрица H симметрична, то в силу (12) симметричен квадрат матрицы J, а поэтому жордановы клетки матрицы J могут быть только двух типов:

— невырожденные одномерные,

— вырожденные двумерные.

В частности, если матрица Гессе H невырожденная, то J полупростая, т. е. приводится к диагональному виду.

В [1] исследована задача приведения матрицы J, удовлетворяющей уравнению (13), к жордановой форме в случае $n = 2, 3$.

Лемма 4. *Имеет место равенство*

$$DH = -J^*H - \nabla(\nabla^T h \cdot J) + \nabla\nabla^T(Dh). \tag{16}$$

Доказательство. Так как $H = \nabla\nabla^T h$, то в силу (8)

$$\begin{aligned} DH = D\nabla(\nabla^T h) &= (D\nabla - \nabla D + \nabla D)(\nabla^T h) = [D, \nabla](\nabla^T h) + \nabla D(\nabla^T h) \\ &= -J^*\nabla(\nabla^T h) + \nabla D(\nabla^T h) = -J^*H + \nabla D(\nabla^T h). \end{aligned}$$

Преобразуем выражение $D(\nabla^T h)$. Так как $D(\nabla^T h) = (D\nabla h)^T$, то в силу (8)

$$D(\nabla^T h) = (D\nabla - \nabla D + \nabla D)^T h = ([D, \nabla] + \nabla D)^T h = -\nabla^T h \cdot J + \nabla^T(Dh).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} DH = -J^*H + \nabla D(\nabla^T h) &= -J^*H + \nabla(-\nabla^T h \cdot J + \nabla^T(Dh)) \\ &= -J^*H - \nabla(\nabla^T h \cdot J) + \nabla\nabla^T(Dh). \end{aligned}$$

Лемма 4 доказана. □

Замечание 4. Если $Dh = 0$, то имеет место равенство $DH = -J^*H - \nabla(\nabla^T h \cdot J)$.

Природу слагаемого $\nabla(\nabla^T h \cdot J)$ проясняет следующая

Лемма 5. *Имеет место равенство* $\nabla(\nabla^T h \cdot J) = HJ + \sum\limits_{k=1}^{n} U^k h_{x^k}$, *где* U^k — *матрица Гессе функции* u^k, $k = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Непосредственно проверяется, что для любой вектор-функции $\mathbf{a} = (a^1, \ldots, a^n)$ и любой функциональной матрицы $B = \begin{pmatrix} b_1^1 & b_1^2 & \ldots & b_1^n \\ b_2^1 & b_2^2 & \ldots & b_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n^1 & b_n^2 & \ldots & b_n^n \end{pmatrix}$ имеет место равенство $\nabla(\mathbf{a}B) = (\nabla a^1, \ldots, \nabla a^n)B + \sum\limits_{k=1}^{n} a^k B_k$, где $B_k = \left(\nabla b_k^1, \ldots, \nabla b_k^n\right)$, $k = 1, \ldots, n$. В нашем случае $\mathbf{a} = \nabla^T h$, $B = J$. Следовательно, $B_k = U^k$ — матрица Гессе функции u^k. □

Замечание 5. В силу (1) имеем представление $\nabla h = -D\mathbf{u}$. Поэтому

$$\nabla(\nabla^T h \cdot J) = HJ - \sum_{k=1}^{n} U^k D u^k.$$

Следствие 2. В силу системы (1) гессиан H удовлетворяет соотношению

$$DH = -J^* H + \nabla\nabla^T(Dh) - HJ + \sum_{k=1}^{n} U^k D u^k.$$

В частности, если выполнено равенство $Dh = 0$, то $DH = -J^* H - HJ + \sum\limits_{k=1}^{n} U^k D u^k$.

2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ $H + 2J^{*2} = 0$, $n = 2$

Так как $H^* = H$, то уравнение $H + 2J^{*2} = 0$ равносильно уравнению

$$H + 2J^2 = 0. \tag{17}$$

В размерности $n = 2$ будем использовать индивидуальные обозначения для переменных $\mathbf{x} = (x, y)$ и функций $\mathbf{u} = (u, v)$. Соответственно матрицы Гессе и Якоби примут вид

$$H = \begin{pmatrix} h_{xx} & h_{xy} \\ h_{yx} & h_{yy} \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}.$$

Имеет место следующая

Теорема. *Система* (1) *в размерности* $n = 2$ *имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда* $u_x + v_y = 0$ *или* $u_y - v_x = 0$.

Если $u_x + v_y = 0$, *то решение* (h, u, v) *имеет один из следующих видов:*

1) $h = c_0(t) + a_1(t)x + b_1(t)y$ *и функции* u, v — *решение системы*

$$v = \varphi(u, t), \quad x\varphi_u(u, t) + \psi(u, t) = y$$

для некоторых функций $\varphi(u, t)$, $\psi(u, t)$, $c_0(t)$, $a_1(t)$, $b_1(t)$;

2) $h = c_0(t) + (a_1(t)x + b_1(t)y) - \lambda^2(t)(x^2 + y^2)$, *где* $c_0(t)$, $a_1(t)$, $b_1(t)$, $\lambda(t)$ — *произвольные функции переменной* t, $\lambda \neq 0$ *и функции* $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ — *решение системы неявных уравнений*

$$F(u - \lambda x, v - \lambda y, t) = 0, \quad G(u + \lambda x, v + \lambda y, t) = 0,$$

где $F(\alpha, \beta, t)$, $G(\gamma, \delta, t)$ — *произвольные функции такие, что* $F_\alpha G_\delta - F_\beta G_\gamma \neq 0$.

Если $u_y - v_x = 0$, то решение (h, u, v) определяется как решение следующих задач Коши:

3) *функция $v = v(x, y, t)$ — решение системы*

$$v_{xx} = v_{yy} + q(t)v_{xy}, \quad v|_{x=0} = v_0(y,t), \quad v_x|_{x=0} = v_1(y,t),$$

для некоторых функции $q = q(t)$ и $v_0(y,t)$, $v_1(y,t)$;

4) *функция $u = u(x, y, t)$ — решение системы*

$$u_y = v_x, \quad u_x = v_y + q(t)v_x, \quad u|_{x=y=0} = u_0(t),$$

для некоторой функции $u_0(t)$, совместной в силу условия 3 теоремы;

5) *функция $h = h(x, y, t)$ — решение системы*

$$h_{xx} = -2\bigl(u_x^2 + v_x^2\bigr), \quad h_{xy} = -2(u_x + v_y)v_x, \quad h_{yy} = -2\bigl(v_x^2 + v_y^2\bigr),$$
$$h|_{x=y=0} = h_0(t), \quad h_x|_{x=y=0} = h_1(t), \quad h_y|_{x=y=0} = h_2(t),$$

совместной в силу условий 3, 4 теоремы.

Доказательство. Матричное равенство (17) равносильно системе

$$h_{xx} = -2\bigl(u_x^2 + u_yv_x\bigr), \quad h_{xy} = -2(u_x+v_y)u_y, \quad h_{xy} = -2(u_x+v_y)v_x, \quad h_{yy} = -2\bigl(u_yv_x + v_y^2\bigr). \quad (18)$$

Из второго и третьего уравнений системы (18) находим

$$(u_x + v_y)(u_y - v_x) = 0. \quad (19)$$

Следовательно, $u_x + v_y = 0$ или $u_y - v_x = 0$.

Рассмотрим случай

$$u_x + v_y = 0. \quad (20)$$

В силу (18) $h_{xy} = 0$ и, следовательно, $h = a(x,t) + b(y,t)$ для некоторых функций a, b. Система (18) принимает вид $a_{xx} = -2\bigl(u_x^2 + u_yv_x\bigr)$, $b_{yy} = -2\bigl(u_x^2 + u_yv_x\bigr)$. Следовательно,

$$a(x,t) = a_0(t) + a_1(t)x - p(t)x^2, \quad b(y,t) = b_0(t) + b_1(t)y - p(t)y^2$$

для некоторых функций a_0, a_1, b_0, b_1, p переменной t. Итак,

$$h = c_0(t) + (a_1(t)x + b_1(t)y) - p(t)(x^2 + y^2), \quad (21)$$

где $c_0 = a_0 + b_0$.

Отметим, что в силу (18) и (21)

$$p = u_x^2 + u_yv_x = -u_xv_y + u_yv_x = -\det J. \quad (22)$$

Систему (20), (22) можно записать в виде

$$\operatorname{tr} J = 0, \quad \det J = -p \quad (23)$$

от инвариантов матрицы J. Отсюда получаем, что собственные числа матрицы J имеют вид:

1) $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = -\lambda$, $\lambda^2 = p$, если $p \neq 0$, и матрица J подобна матрице $\Lambda = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{smallmatrix}\right)$;

2) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, если $p \neq 0$, и матрица J подобна матрице $\Lambda = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Во втором случае $\Lambda^2 = 0$ и, следовательно, $J^2 = 0$. Поэтому в силу (17) $H = 0$, т. е. $h = c_0(t) + a_1(t)x + b_1(t)y$. Соотношения (23) равносильны системе $u_x + v_y = 0$, $\Phi(u, v, t) = 0$

для некоторой функции Φ. Разрешим второе соотношение относительно v: $v = \varphi(u,t)$. Тогда $u_x + u_y\varphi_u(u,t) = 0$. Следовательно, функции u, v являются решением системы

$$v = \varphi(u,t), \quad x\varphi_u(u,t) + \psi(u,t) = y$$

для некоторых функций $\varphi(u,t)$, $\psi(u,t)$.

В случае, когда $p \neq 0$, функции u, v являются решениями системы неявных уравнений [14]:

$$F(u-\lambda x, v-\lambda y, t) = 0, \quad G(u+\lambda x, v+\lambda y, t) = 0,$$

где $F(\alpha,\beta,t)$, $G(\gamma,\delta,t)$ — произвольные функции такие, что $F_\alpha G_\delta - F_\beta G_\gamma \neq 0$.

Рассмотрим случай $u_y = v_x$. Система (17) примет вид

$$h_{xx} = -2\big(u_x^2 + v_x^2\big), \quad h_{xy} = -2(u_x+v_y)v_x, \quad h_{yy} = -2\big(v_x^2 + v_y^2\big).$$

Составляем условия совместности $h_{xxy} = h_{xyx}$, $h_{xyy} = h_{yyx}$ и исключаем $u_y = v_x$. Имеем

$$\begin{gathered} h_{xxy} = -4(u_x u_{xy} + v_x v_{xy}) = -4(u_x v_{xx} + v_x v_{xy}), \\ h_{xyx} = -2(u_{xx} + v_{xy})v_x - 2(u_x+v_y)v_{xx}, \\ h_{xyy} = -2(u_{xy} + v_{yy})v_x - 2(u_x+v_y)v_{xy} = -2(v_{xx}+v_{yy})v_x - 2(u_x+v_y)v_{xy}, \\ h_{yyx} = -4(v_x v_{xx} + v_y v_{xy}). \end{gathered}$$

Следовательно,

$$\begin{gathered} 2(u_x v_{xx} + v_x v_{xy}) = (u_{xx}+v_{xy})v_x + (u_x+v_y)v_{xx}, \\ (v_{xx}+v_{yy})v_x + (u_x+v_y)v_{xy} = 2(v_x v_{xx} + v_y v_{xy}) \end{gathered}$$

или

$$\begin{gathered} v_{xx}u_x - v_x u_{xx} = v_{xx}v_y - v_x v_{xy}, \\ v_{yy}v_x - v_y v_{xy} = v_{xx}v_x - u_x v_{xy}. \end{gathered}$$

Разделим уравнения на v_x^2 и во втором равенстве заменим v_{xx} на u_{xy}, получим

$$\left(\frac{u_x}{v_x}\right)_x = \left(\frac{v_y}{v_x}\right)_x, \quad \left(\frac{v_y}{v_x}\right)_y = \left(\frac{u_x}{v_x}\right)_y.$$

Следовательно, $u_x - v_y = q(t)v_x$ для некоторой функции $q = q(t)$. Таким образом,

$$u_y = v_x, \quad u_x = v_y + q(t)v_x.$$

Условие совместности $u_{yx} = u_{xy}$ имеет вид $v_{xx} = v_{yy} + q(t)v_{xy}$. □

Замечание 6. Разрешая систему

$$F(u-\lambda x, v-\lambda y, t) = 0, \quad G(u+\lambda x, v+\lambda y, t) = 0$$

относительно $u-\lambda x$, $u+\lambda x$, получим

$$u = \lambda x - \varphi(v-\lambda y, t), \quad u = -\lambda x + \psi(v-\lambda y, t)$$

или

$$u = \lambda x - \varphi(v-\lambda y, t), \quad \varphi(v-\lambda y, t) + \psi(v-\lambda y, t) = 2\lambda x,$$

для некоторых функций φ, ψ. Дифференцируя эти равенства по переменным x, y, получим

$$u_x = \lambda\frac{\psi'-\varphi'}{\varphi'+\psi'}, \quad u_y = 2\lambda\frac{\varphi'\cdot\psi'}{\varphi'+\psi'}, \quad v_x = 2\lambda\frac{1}{\varphi'+\psi'}, \quad u_y = \lambda\frac{\varphi'-\psi'}{\varphi'+\psi'},$$

где штрих обозначает производную по первому аргументу.

Пример 1. Пусть $u_x + v_y = 0$. Предположим, что $\varphi(\alpha) = \psi(\alpha) = e^\alpha$. Тогда

$$e^v(e^{\lambda y} + e^{-\lambda y}) = 2\lambda x, \quad v = \ln\left(\frac{\lambda x}{\cosh(\lambda y)}\right),$$
$$u = \lambda x - e^{v-\lambda y} = \lambda x\left(1 - \frac{e^{-\lambda y}}{\cosh(\lambda y)}\right) = \lambda x \tanh(\lambda y).$$

Итак,

$$u = \lambda x \tanh(\lambda y), \quad v = \ln\left(\frac{\lambda x}{\cosh(\lambda y)}\right).$$

Пример 2. Пусть $u_y = v_x$. Предположим, что $q(t) = 0$. Тогда в силу условия 3 теоремы

$$v = f(x + y, t) + g(x - y, t)$$

для некоторых $f(\alpha, t)$, $g(\beta, t)$. В силу условия 4 теоремы получаем систему уравнений для функции u:

$$u_y = f_\alpha(x + y, t) + g_\beta(x - y, t), \quad u_x = f_\alpha(x + y, t) - g_\beta(x - y, t).$$

Отсюда $u = f(x + y, t) - g(x - y, t) + u_0(t)$ для некоторой функции $u_0(t)$. Соответственно, функция h удовлетворяет системе уравнений

$$h_{xx} = -4\bigl(f_\alpha^2 + g_\beta^2\bigr), \quad h_{xy} = -4\bigl(f_\alpha^2 - g_\beta^2\bigr), \quad h_{yy} = -4\bigl(f_\alpha^2 + g_\beta^2\bigr).$$

Непосредственно проверяется, что данная система совместна.

В случае $n \geqslant 3$ система (1) имеет нетривиальные решения, как показывает следующий

Пример 3. Пусть $\mathbf{u} = \nabla\varphi = (\varphi_{x^1}, \ldots, \varphi_{x^1})$ для некоторой функции $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t)$. Тогда непосредственно проверяется, что функция $h = -\varphi_t - |\nabla\varphi|^2/2$ удовлетворяет уравнению (1), а следовательно, и (17).

В заключение приведём формулу для вычисления коммутатора $[D, \mathrm{rot}]$ в размерности $n = 3$. Возможно, что она окажется полезной при исследовании системы (1).

Пусть A, B — матрицы размерности 3×3. Запишем их в виде $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$, $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$, где $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{b}_3$ — соответствующие вектор-столбцы. Определим вектор $A \times B$ формулой

$$A \times B = (\langle a_2, b_3\rangle - \langle a_3, b_2\rangle, \langle a_3, b_1\rangle - \langle a_1, b_3\rangle, \langle a_1, b_2\rangle - \langle a_2, b_1\rangle)^T,$$

где $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle$ — скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$.

Лемма 6. *Пусть $\mathbf{v} = (P, Q, R)^T$ — вектор-функция (столбец). Тогда имеет место равенство $[D, \mathrm{rot}]\mathbf{v} = (\nabla\mathbf{v})^T \times J$, где $(\nabla\mathbf{v})^T = (\nabla P, \nabla Q, \nabla R)$, $J = (\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z)$, $\mathbf{u} = (u, v, w)^T$ — вектор-столбец.*

Доказательство. Имеем

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)^T,$$
$$D\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = (DR_y - DQ_z, DP_z - DR_x, DQ_x - DP_y)^T,$$
$$D\mathbf{v} = (DP, DQ, DR)^T,$$
$$\mathrm{rot}\,D\mathbf{v} = ((DR)_y - (DQ)_z, (DP)_z - (DR)_x, (DQ)_x - (DP)_y)^T,$$
$$[D, \mathrm{rot}]\mathbf{v} = \begin{pmatrix} (DR_y - (DR)_y) - (DQ_z - (DQ)_z) \\ (DP_z - (DP)_z) - (DR_x - (DR)_x) \\ (DQ_x - (DQ)_x) - (DP_y - (DP)_y) \end{pmatrix}.$$

Находим $DR_y - (DR)_y = -\langle \mathbf{u}_y, \nabla R\rangle$. Аналогично находятся остальные разности. □

Для системы (1) при $n = 3$ есть очевидное дифференциальное следствие $\operatorname{rot} D\mathbf{u} = 0$, которое не содержит функции h. Это будет полная система соотношений для (1), связывающих только функции $\mathbf{u}$.

Интересно было бы найти полную систему соотношений для системы (1) с дополнительным условием $Dh = 0$, связывающих только функции $\mathbf{u}$. Система (1) с дополнительным условием $Dh = 0$ — определённая система дифференциальных уравнений в частных производных (система типа Коши — Ковалевской). Добавляя условие на функции $\mathbf{u}$, получаем уже переопределённую систему дифференциальных уравнений с частными производными. Например, естественное соотношение $\operatorname{tr} J = 0$ (условие несжимаемости) приводит к переопределённой системе дифференциальных уравнений в частных производных [11, 13].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нещадим М. В., Чупахин А. П.* Об интегрировании одного матричного уравнения Риккати // Сиб. журн. индустр. математики. 2020. Т. 23, № 4. С. 1–11.
2. *Зеликин М. И.* Однородные пространства и уравнение Риккати в вариационном исчислении. М.: Факториал, 1998.
3. *Черноусько Ф. А., Колмановский В. Б.* Оптимальное управление при случайных возмущениях. М.: Наука, 1978.
4. *Овсянников Л. В.* Лекции по основам газовой динамики. Москва; Ижевск: изд. Ин-та компьютерных исследований, 2003.
5. *Фатьянов А. Г.* Полуаналитический метод решения прямых динамических задач в слоистых средах // Докл. АН СССР. 1990. Т. 310, № 2. С. 323–327.
6. *Карчевский А. Л.* Аналитическое решение уравнений Максвелла в частотной области для горизонтально-слоистых анизотропных сред // Геология и геофизика. 2007. Т. 48, № 8. С. 889–898.
7. *Karchevsky A. L., Rysbayuly B. R.* Analitical expressions for a solution of convective heat and moisture transfer equations in the frequency domain for layered media // Euras. J. Math. Comp. Appl. 2015. V. 3, N 4. P. 55–67.
8. *Карчевский А. Л.* Аналитическое решение дифференциального уравнения поперечных колебаний кусочно-однородной балки в частотной области для краевых условий любого вида // Сиб. журн. индустр. математики. 2020. Т. 23, № 4. С. 46–68.
9. *Miller E.* A regularity criterion for the Navier—Stokes equation involving only the middle eigenvalue of the strain tensor // Arch. Rational Mech. Anal. 2020. V. 235. P. 99–139.
10. *Anco S. C., Webb G. M.* Hierarchies of new invariants and conserved integrals in inviscid fluid flow // Phys. Fluids. 2020. V. 32. P. 086104; https://doi.org/10.1063/5.0011649
11. *Поммаре Ж.* Системы уравнений с частными производными и псевдогруппы Ли. М.: Мир, 1983.
12. *Сидоров А. Ф., Шапеев В. П., Яненко Н. Н.* Метод дифференциальных связей и его приложение в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1984.
13. *Фиников С. П.* Метод внешних форм Картана. М.: Гостехиздат, 1948.
14. *Чупахин А. П.* Барохронные движения газа: общие свойства и подмодели типов (1, 2) и (1, 1). Новосибирск, 1998. (Препринт/ Ин-т гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН; № 4-98).

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 517.9

METHOD OF COMMUTATORS FOR INTEGRATION OF A MATRIX RICCATI EQUATION

© 2021 **M. V. Neshchadim**[1,3a], **A. P. Chupakhin**[2,3b]

[1]*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, pr. Acad. Koptyuga 4, Novosibirsk 630090, Russia,*
[2]*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, pr. Akad. Lavrentyeva 15, Novosibirsk 630090, Russia,*
[3]*Novosibirsk State University, ul. Pirogova 1, Novosibirsk 630090, Russia*

E-mails: [a]neshch@math.nsc.ru, [b]chupakhin@hydro.nsc.ru

Received 28.12.2020, revised 28.12.2020, accepted 28.12.2020

Abstract. Complete integration is carried out of the matrix Riccati equation arising in continuum mechanics in the two-dimensional case. The method of commutators is used to obtain some compatibility conditions.

Keywords: a matrix Riccati equation, commutator of differential operators.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.106

REFERENCES

1. Neshchadim M.V., Chupakhin A.P. On Integration of a matrix Riccati equation. *J. Appl. Ind. Math.*, 2020, Vol. 14, No. 4, pp. 732–742.
2. Zelikin M.I. Odnorodnye prostranstva i uravnenie Rikkati v variatsionnom ischislenii [Homogeneous spaces and the Riccati equation in the calculus of variations]. Moscow: Faktorial, 1998.
3. Chernous'ko F.A., Kolmanovskii V.B. Optimal'noe upravlenie pri sluchainykh vozmushcheniyakh [Optimal control under random perturbations]. Moscow: Nauka, 1978.
4. Ovsyannikov L.V. Lektsii po osnovam gazovoi dinamiki [Lectures on the Fundamentals of Gas Dynamics]. Moscow–Izhevsk: Inst. Kompyuternykh Issledovanii, 2003.
5. Fat'yanov A.G. Poluanaliticheskii metod resheniya pryamykh dinamicheskikh zadach v sloistykh sredakh [Some semianalytical method for solution of the direct dynamical problems in stratified media]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* , 1990, Vol. 310, No. 2, pp. 323–327.
6. Karchevsky A. L. Analiticheckoe peshenie upavnenii Makcvella v chactotnoi oblacti dlya gopizontal'nocloictyx anizotpopnyx cped [Analytical solution of the maxwell equations in the frequency domain for horizontal layered anisotropic media]. Geologiya i Geofizika. 2007. Vol. 48, No 8, pp. 889–898.
7. Karchevsky A.L., Rysbayuly B.R. Analitical expressions for a solution of convective heat and moisture transfer equations in the frequency domain for layered media. *Euras. J. Math. Comp. Appl.*, 2015, Vol. 3, No. 4, pp. 55–67.
8. Karchevsky A.L. Analytical solutions of the differential equation of transverse vibrations of a piecewise homogeneous beam in the frequency domain for the boundary conditions of various types. *J. Appl. Ind. Math.*, 2020, Vol. 14, No. 4, pp. 648–665.
9. Miller E. A regularity criterion for the Navier—Stokes equation involving only the middle eigenvalue of the strain tensor. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 2020, Vol. 235, pp. 99–139.

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2021, Vol. 15, No. 1, pp. 78–86; DOI: 10.1134/S1990478921010075

10. Anco S.C., Webb G.M. Hierarchies of new invariants and conserved integrals in inviscid fluid flow. *Phys. Fluids*, 2020, Vol. 32, pp. 086104; https://doi.org/10.1063/5.0011649

11. Pommare Zh. Systems of Partial Differential Equations and Lie Pseudogroup. Routledge, 1978.

12. Sidorov A.F., Shapeev V.P., Yanenko N.N. Metod differentsial'nykh svyazei i ego prilozhenie v gazovoi dinamike [Method of differential constraints and applications in gas dynamics]. Novosibirsk: Nauka, 1984.

13. Finikov S.P. Metod vneshnikh form Kartana [Cartan's Method of Exterior Forms]. Moscow: Gostekhizdat, 1948.

14. Chupakhin A.P. Barokhronnye dvizheniya gaza: obshchie svoistva i podmodeli tipov $(1, 2)$ i $(1, 1)$ [Barochronous gas motions: general properties and submodels of types $(1, 2)$ and $(1, 1)$]. Novosibirsk, 1998. (Preprint/ Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SO RAN; No. 4-98).