УДК 517.968

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

© 2021 **В. Г. Романов**[1a], **Т. В. Бугуева**[1,2b], **В. А. Дедок**[1,2c]

[1] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, просп. Акад. Коптюга, 4, г. Новосибирск 630090, Россия,*
[2] *Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 1, г. Новосибирск 630090, Россия*

E-mails: [a]romanov@math.nsc.ru, [b]bugueva@math.nsc.ru, [c]dedok@math.nsc.ru

Поступила в редакцию 20.11.2020 г.; после доработки 20.11.2020 г.;
принята к публикации 28.12.2020 г.

Для гиперболического уравнения с переменными коэффициентами построен регуляризирующий алгоритм для решения задачи о продолжении волнового поля с границы полуплоскости внутрь неё. Введены N-приближённые решения, установлена их сходимость к точному решению. Рассмотрен случай, когда данные задачи имеют погрешность δ. Найдена оценка точности приближённых решений, доказана сходимость приближённых решений к точному при $\delta \to 0$.

Ключевые слова: задача Коши, продолжение волнового поля, регуляризация.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.107

Впервые вопросы продолжения решений задачи Коши для дифференциальных уравнений с границы области внутрь её начали изучаться в работах Ф. Джона [1, 2]. Р. Курант рассмотрел в [3] задачу Коши для волнового уравнения с данными на времениподобной плоскости. Решение которой сведено к задаче интегральной геометрии об определении некоторой функции по её сферическим средним. Обобщениям этой задачи и её приложениям посвящена обширная литература (см., например, [4-9]). Л. Ниренберг и Л. В. Овсянников предложили в [10, 11] для исследования задач о продолжении решения метод шкал банаховых пространств для функций, аналитических по части переменных. В [12] вопрос о регуляризации решения задачи Коши был рассмотрен для гиперболического уравнения второго порядка с двумя пространственными переменными x, y и с данными на границе полуплоскости $x > 0$. Построен регуляризирующий алгоритм решения задачи для гиперболического уравнения второго порядка, главная часть которого совпадает с волновым оператором, а младшие члены содержат коэффициенты, зависящие от x и y. Доказано, что при подходящем выборе $N = N(\delta)$ приближённые решения сходятся к точному при $\delta \to 0$. В [13] для аналогичного уравнения рассмотрено регуляризирующее уравнение с малым параметром, доказано его существование, единственность и устойчивость решения по данным Коши, установлена сходимость этого решения к точному при стремлении малого параметра к нулю. Построено решение регуляризирующего уравнения с данными Коши, обладающими некоторой погрешностью, и доказано, что при подходящем выборе малого параметра приближённое решение сходится к точному. Построенный регуляризирующий алгоритм основан на методе квазиобращения, предложенном Р. Латтесом и Ж.-Л. Лионсом в работе [14]. В [15] построен регуляризирующий алгоритм для решения задачи о продолжении волнового поля с границы полупространства внутрь него для системы уравнений Максвелла.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № 0314-2019-0011).

В настоящей работе рассматривается вопрос о регуляризации решения задачи Коши для гиперболического уравнения с коэффициентами, зависящими от пространственных переменных x и y, и данными на границе полуплоскости $x > 0$ в предположении, что коэффициент при u_{xx} равен единице. Вводятся N-приближённые решения, устанавливается их сходимость к точному решению. В случае, когда данные задачи имеют δ-погрешность, найдена оценка точности приближённых решений и доказана сходимость этих решений к точному при $\delta \to 0$.

1. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В области $G(T) = \{(x, y, t) \mid (x, t) \in D(T), y \in \mathbb{R}\}$, где $D(T) = \{(x, t) \mid x \in [0, T], t \in [-T + x, T - x]\}$, рассмотрим задачу Коши

$$u_{tt} = u_{xx} + A(x, y)u_{yy} + B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_y + D(x, y)u_x + E(x, y)u + f(x, y, t), \qquad (1)$$

$$u|_{x=0} = g(y, t), \quad u_x|_{x=0} = h(y, t), \quad (y, t) \in \{y \in \mathbb{R},\ t \in [T, T]\}. \qquad (2)$$

Будем предполагать, что уравнение (1) является в области $G(T)$ равномерно гиперболическим, т. е. $A(x, y) - B^2(x, y)/4 \geqslant q_0 > 0$ для всех $(x, y, t) \in G(T)$. Обозначим через $\tilde{u}(x, \lambda, t)$ преобразование Фурье функции $u(x, y, t)$ по переменной y:

$$\tilde{u}(x, \lambda, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x, y, t)e^{-i\lambda y} dy.$$

Аналогично, для любой функции φ зависящей от y, символ $\widetilde{\varphi}$ будет соответствовать её преобразованию Фурье по этой переменной.

Предположим, что функции $A(x, y)$, $B(x, y)$, $C(x, y)$, $D(x, y)$, $E(x, y)$ представимы в виде

$$\begin{gathered} A(x, y) = A_0(x) + A_1(x, y), \quad B(x, y) = B_0(x) + B_1(x, y), \quad C(x, y) = C_0(x) + C_1(x, y), \\ D(x, y) = D_0(x) + D_1(x, y), \quad E(x, y) = E_0(x) + E_1(x, y), \end{gathered} \qquad (3)$$

причём функции $A_0(x)$, $B_0(x)$, $C_0(x)$, $D_0(x)$, $E_0(x)$ являются непрерывными и ограниченными вместе с производными $\partial_x B_0(x)$, $\partial_x D_0(x)$ для всех $x \in [0, T]$ некоторой постоянной K_0:

$$\begin{gathered} |A_0(x)| \leqslant K_0, \quad |B_0(x)| \leqslant K_0, \quad |C_0(x)| \leqslant K_0, \quad |D_0(x)| \leqslant K_0, \\ |E_0(x)| \leqslant K_0, \quad |\partial_x B_0(x)| \leqslant K_0, \quad |\partial_x D_0(x)| \leqslant K_0. \end{gathered} \qquad (4)$$

Функции $A_1(x, y)$, $B_1(x, y)$, $\partial_x B_1(x, y)$, $C_1(x, y)$, $D_1(x, y)$, $\partial_x D_1(x, y)$, $E_1(x, y)$, $f(x, y, t)$, $g(x, y)$, $h(x, y)$ абсолютно суммируемы по переменной y и непрерывны для $(x, t) \in D(T)$, а для их образов Фурье выполнены следующие неравенства для всех $(x, t) \in D(T)$:

$$\begin{gathered} |\tilde{A}_1(x, \lambda)| \leqslant K_1 e^{-\alpha|\lambda|}, \quad |\widetilde{B}_1(x, \lambda)| \leqslant K_1 e^{-\alpha|\lambda|}, \quad |\widetilde{C}_1(x, \lambda)| \leqslant K_1 e^{-\alpha|\lambda|}, \\ |\widetilde{D}_1(x, \lambda)| \leqslant K_1 e^{-\alpha|\lambda|}, \quad |\widetilde{E}_1(x, \lambda)| \leqslant K_1 e^{-\alpha|\lambda|}, \\ \left|\frac{\partial}{\partial x}\widetilde{B}_1(x, \lambda)\right| \leqslant K_1 e^{-\alpha|\lambda|}, \quad \left|\frac{\partial}{\partial x}\widetilde{D}_1(x, \lambda)\right| \leqslant K_1 e^{-\alpha|\lambda|}, \end{gathered} \qquad (5)$$

$$|\tilde{f}(x, \lambda, t)| \leqslant K_2 e^{-\alpha|\lambda|}, \quad |\tilde{g}(\lambda, t)| \leqslant K_2 e^{-\alpha|\lambda|}, \quad |\tilde{h}(\lambda, t)| \leqslant K_2 e^{-\alpha|\lambda|} \qquad (6)$$

с некоторыми положительными постоянными K_1, K_2 и α. При выполнении этих условий (см. [10, 11]) решение задачи (1), (2) является аналитической функцией по y и непрерывной по переменным (x, t) в некоторой усечённой части области $D(T)$, которую обозначим через

$D(T, x_0) = \{(x,t) \in D(T) \mid x \in [0, x_0]\}$, $x_0 \in (0, T)$. При этом для образа Фурье функции $u(x,y,t)$ справедлива оценка

$$|\tilde{u}(x,\lambda,t)| \leqslant M e^{-\beta|\lambda|}, \quad (x,t) \in D(T, x_0), \ \lambda \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

с некоторыми постоянными $M > 0$ и $0 < \beta < \alpha$. В дальнейшем оценка (7) будет рассматриваться как априорное условие на решение задачи (1), (2).

В терминах преобразования Фурье равенства (1), (2) примут вид

$$\tilde{u}_{tt} - \tilde{u}_{xx} = (\mathcal{L}^0 + \mathcal{L}^1)\tilde{u} + \tilde{f}(x,\lambda,t), \tag{8}$$

$$\tilde{u}|_{x=0} = \tilde{g}(\lambda,t), \quad \tilde{u}_x|_{x=0} = \tilde{h}(\lambda,t), \tag{9}$$

где

$$\mathcal{L}^0\tilde{u}(x,\lambda,t) = (i\lambda B_0(x) + D_0(x))\frac{\partial}{\partial x}\tilde{u}(x,\lambda,t) + (-\lambda^2 A_0(x) + i\lambda C_0(x) + E_0(x))\tilde{u}(x,\lambda,t),$$

$$\mathcal{L}^1\tilde{u}(x,\lambda,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}[(-\lambda'^2\tilde{A}_1(\xi,\lambda-\lambda') + i\lambda'\widetilde{C}_1(\xi,\lambda-\lambda') + \widetilde{E}_1(\xi,\lambda-\lambda'))\tilde{u}(\xi,\lambda',t)$$
$$+ (i\lambda'\widetilde{B}_1(\xi,\lambda-\lambda') + \widetilde{D}_1(\xi,\lambda-\lambda'))\frac{\partial}{\partial\xi}\tilde{u}(\xi,\lambda',t)]\,d\lambda'.$$

Задача (8), (9) эквивалентна решению интегродифференциального уравнения

$$\tilde{u}(x,\lambda,t) = \widetilde{F}(x,\lambda,t) - \frac{1}{2}\int\limits_0^x\int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi}\big[\mathcal{L}^0 + \mathcal{L}^1]\tilde{u}(\xi,\lambda,\tau)\big]\,d\tau d\xi, \tag{10}$$

в котором

$$\widetilde{F}(x,\lambda,t) = -\frac{1}{2}\int\limits_0^x\int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi}\tilde{f}(\xi,\lambda,\tau)\,d\tau d\xi + \frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t+x}\tilde{h}(\lambda,\tau)\,d\tau + \frac{1}{2}(\tilde{g}(\lambda,t-x) + \tilde{g}(\lambda,t+x)). \tag{11}$$

Преобразуем слагаемые, входящие в операторы $\mathcal{L}^0$ и $\mathcal{L}^1$ и содержащие производную по переменной ξ, с помощью интегрирования по частям. В результате этого получим из (10) интегральное уравнение

$$\tilde{u}(x,\lambda,t) = \widetilde{\Phi}(x,\lambda,t) + (\mathcal{M}^0 + \mathcal{M}^1)\tilde{u}(x,\lambda,t), \quad (x,t) \in D(T), \tag{12}$$

в котором

$$\widetilde{\Phi}(x,\lambda,t) = \widetilde{F}(x,\lambda,t) + \frac{1}{2}\int\limits_0^x[i\lambda B_0(0) + D(0)]\big(\tilde{g}(\lambda,t-x+\xi) + \tilde{g}(\lambda,t+x-\xi)\big)\,d\xi$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x\int\limits_{-\infty}^{\infty}[i\lambda'\widetilde{B}_1(0,\lambda-\lambda') + \widetilde{D}_1(0,\lambda-\lambda')]\big(\tilde{g}(\lambda',t-x+\xi) + \tilde{g}(\lambda',t+x-\xi)\big)\,d\lambda' d\xi,$$

$$\mathcal{M}^0\tilde u(x,\lambda,t) = -\frac{1}{2}\int\limits_0^x\int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi}\Big[-(\lambda^2A_0(\xi)+i\lambda C_0(\xi)+E_0(\xi))-\frac{\partial}{\partial\xi}(i\lambda B_0(\xi)+D_0(\xi))\Big]\tilde u(\xi,\lambda,\tau)\,d\tau d\xi$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^x(i\lambda B_0(\xi)+D_0(\xi))[\tilde u(\xi,\lambda,t+x-\xi)+\tilde u(\xi,\lambda,t-x+\xi)]\,d\xi, \quad (13)$$

$$\mathcal{M}^1\tilde u(x,\lambda,t) = -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x\int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big(-\lambda'^2\tilde A_1(\xi,\lambda-\lambda')+i\lambda'\widetilde C_1(\xi,\lambda-\lambda')+\widetilde E_1(\xi,\lambda-\lambda')$$
$$-\frac{\partial}{\partial\xi}[i\lambda'\widetilde B_1(\xi,\lambda-\lambda')+\widetilde D_1(\xi,\lambda-\lambda')]\Big)\tilde u(\xi,\lambda',\tau)\,d\lambda' d\tau d\xi$$
$$-\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x\int\limits_{-\infty}^{\infty}[i\lambda'\widetilde B_1(\xi,\lambda-\lambda')+\widetilde D_1(\xi,\lambda-\lambda')](\tilde u(\xi,\lambda',t+x-\xi)+\tilde u(\xi,\lambda',t-x+\xi))\,d\lambda' d\xi.$$

Пусть $N\geqslant 0$. Определим N-приближение $\tilde u_N(x,\lambda,t)$ при $|\lambda|\leqslant N$ как решение уравнения

$$\tilde u_N(x,\lambda,t) = \widetilde\Phi_N(x,\lambda,t) + \big(\mathcal{M}^0+\mathcal{M}^1_N\big)\tilde u_N(x,\lambda,t), \quad (x,t)\in D(T), \quad |\lambda|\leqslant N, \quad (14)$$

где

$$\widetilde\Phi_N(x,\lambda,t) = \widetilde F(x,\lambda,t) + \frac{1}{2}\int\limits_0^x[i\lambda B_0(0)+D(0)]\big(\tilde g(\lambda,t-x+\xi)+\tilde g(\lambda,t+x-\xi)\big)\,d\xi$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x\int\limits_{-N}^{N}[i\lambda'\widetilde B_1(0,\lambda-\lambda')+\widetilde D_1(0,\lambda-\lambda')]\big(\tilde g(\lambda',t-x+\xi)+\tilde g(\lambda',t+x-\xi)\big)\,d\lambda' d\xi, \quad (15)$$

$$\mathcal{M}^1_N\tilde u(x,\lambda,t) = -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x\int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi}\int\limits_{|\lambda'|\leqslant N}\Big(-\lambda'^2\tilde A_1(\xi,\lambda-\lambda')+i\lambda'\widetilde C_1(\xi,\lambda-\lambda')+\widetilde E_1(\xi,\lambda-\lambda')$$
$$-\frac{\partial}{\partial\xi}[i\lambda'\widetilde B_1(\xi,\lambda-\lambda')+\widetilde D_1(\xi,\lambda-\lambda')]\Big)\tilde u(\xi,\lambda',\tau)\,d\lambda' d\tau d\xi$$
$$-\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x\int\limits_{|\lambda'|\leqslant N}[i\lambda'\widetilde B_1(\xi,\lambda-\lambda')+\widetilde D_1(\xi,\lambda-\lambda')]$$
$$\times(\tilde u(\xi,\lambda',t+x-\xi)+\tilde u(\xi,\lambda',t-x+\xi))\,d\lambda' d\xi, \quad (16)$$

а при $|\lambda|\geqslant N$ положим $\tilde u_N(x,\lambda,t)=0$.

В силу того, что (14) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода, решение его существует и единственно в классе функций, непрерывных для всех $(x,t)\in D(T)$ при любом конечном N.

Обозначим через $u_N(x,y,t)$ прообраз Фурье функции $\tilde u_N(x,\lambda,t)$.

2. СХОДИМОСТЬ $u_n(x,y,t)$ К ТОЧНОМУ РЕШЕНИЮ

Пусть $\beta' \in (0,\beta)$ и

$$K = K_0 + \frac{2K_1}{\alpha\sqrt{2\pi}}, \quad \eta = \max\{(10K)^{1/2}, 4K\}, \quad \gamma = \beta'/\eta, \quad D(T,x_0,\gamma) = D(T,x_0) \cap \{x \in [0,\gamma]\}.$$

Теорема 1. *При выполнении условий* (3)–(7) *приближённые решения* $u_N(x,y,t)$ *равномерно сходятся в области* $D(T,x_0,\gamma)$ *при* $N \to \infty$ *к решению задачи* (1), (2):

$$\max_{(x,t)\in D(T,x_0,\gamma)} \|u(x,\cdot,t) - u_N(x,\cdot,t)\|_{L_1(\mathbb{R})} \to 0. \tag{17}$$

Доказательство. Пусть $\tilde{u}(x,\lambda,t)$ — решение уравнения (12). Рассмотрим функцию

$$\tilde{v}_N(x,\lambda,t) = \tilde{u}(x,\lambda,t) - \tilde{u}_N(x,\lambda,t).$$

Эта функция при $|\lambda| \geqslant N$ совпадает с $\tilde{u}(x,\lambda,t)$, следовательно, для неё выполнено неравенство, вытекающее из априорного предположения (7):

$$|\tilde{v}_N(x,\lambda,t)| \leqslant Me^{-\beta N}, \quad (x,t) \in D(T,x_0) \quad |\lambda| \geqslant N, \tag{18}$$

а при $|\lambda| \leqslant N$ она удовлетворяет соотношению

$$\tilde{v}_N(x,\lambda,t) = \widetilde{\Psi}_N(x,\lambda,t) + (\mathcal{M}^0 + \mathcal{M}^1_N)\tilde{v}_N(x,\lambda,t) \\ + S_N\tilde{u}(x,\lambda,t), \quad (x,t) \in D(T,x_0), \quad |\lambda| \leqslant N, \tag{19}$$

где

$$\widetilde{\Psi}_N(x,\lambda,t) = \widetilde{\Phi}(x,\lambda,t) - \widetilde{\Phi}_N(x,\lambda,t) \\ = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^x \int_{|\lambda'|\geqslant N} [i\lambda'\widetilde{B}_1(0,\lambda-\lambda') + \widetilde{D}_1(0,\lambda-\lambda')]\big(\tilde{g}(\lambda',t-x+\xi) + \tilde{g}(\lambda',t+x-\xi)\big)\,d\lambda' d\xi, \tag{20}$$

$$S_N\tilde{u}(x,\lambda,t) = (\mathcal{M}^1 - \mathcal{M}^1_N)\tilde{u}(x,\lambda,t) \\ = -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} \int_{|\lambda'|\geqslant N} \Big(-\lambda'^2\tilde{A}_1(\xi,\lambda-\lambda') + i\lambda'\widetilde{C}_1(\xi,\lambda-\lambda') + \widetilde{E}_1(\xi,\lambda-\lambda') \\ + \frac{\partial}{\partial\xi}[i\lambda'\widetilde{B}_1(\xi,\lambda-\lambda') + \widetilde{D}_1(\xi,\lambda-\lambda')]\Big)\tilde{u}(\lambda',\xi,\tau)\,d\lambda' d\tau d\xi \\ - \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^x \int_{|\lambda'|\geqslant N} [i\lambda'\widetilde{B}_1(\xi,\lambda-\lambda') + \widetilde{D}_1(\xi,\lambda-\lambda')] \\ \times (\tilde{u}(\xi,\lambda',t+x-\xi) + \tilde{u}(\xi,\lambda',t-x+\xi))\,d\lambda' d\xi. \tag{21}$$

Оценим $\widetilde{\Psi}_N(x,\lambda,t)$ для $|\lambda| \leqslant N$. Используя формулу (20) и условия (4)–(6), получаем

$$|\widetilde{\Psi}_N(x,\lambda,t)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} TK_1K_2 \int_{|\lambda'|\geqslant N} (|\lambda'|+1)e^{-\alpha|\lambda-\lambda'|}\,e^{-\alpha|\lambda'|}\,d\lambda'.$$

В этой формуле интеграл является чётной функцией параметра λ. Поэтому

$$\int\limits_{|\lambda'|\geqslant N} (|\lambda'|+1)e^{-\alpha|\lambda-\lambda'|}\, e^{-\alpha|\lambda'|}\, d\lambda'$$
$$= 2\int\limits_{N}^{\infty}(\lambda'+1)e^{-\alpha|\lambda'-|\lambda||}\, e^{-\alpha\lambda'}\, d\lambda' \leqslant 2e^{-\alpha N}\int\limits_{N-|\lambda|}^{\infty}(|\lambda|+1+\rho)e^{-\alpha\rho}\, d\rho$$
$$\leqslant 2e^{-\alpha N}\int\limits_{0}^{\infty}(N+1+\rho)e^{-\alpha\rho}\, d\rho = \frac{2}{\alpha^2}[(N+1)\alpha+1]e^{-\alpha N}.$$

В результате получаем оценку

$$|\widetilde{\Psi}_N(x,\lambda,t)| \leqslant C_1^*(N)e^{-\alpha N}, \quad (x,t)\in D(T,x_0), \quad |\lambda|\leqslant N, \tag{22}$$

в которой

$$C_1^*(N) = \frac{2}{\alpha^2\sqrt{2\pi}}TK_1K_2[(N+1)\alpha+1]. \tag{23}$$

Оценим теперь $S_N\tilde{u}(x,\lambda,t)$. Используя формулу (21) и неравенства (5), (7), получаем, что

$$|S_N\tilde{u}(x,\lambda,t)| \leqslant \frac{K_1T^2}{2\sqrt{2\pi}}\int\limits_{|\lambda'|\geqslant N}(|\lambda'|^2+2|\lambda'|+2)e^{-\alpha|\lambda-\lambda'|}\, e^{-\beta|\lambda'|}\, d\lambda'$$
$$+\frac{K_1T}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{|\lambda'|\geqslant N}(|\lambda'|+1)e^{-\alpha|\lambda-\lambda'|}\, e^{-\beta|\lambda'|}\, d\lambda'.$$

Интегралы, входящие в эту формулу, оценим с помощью техники, уже использованной выше. А именно, воспользуемся тем, что эти интегралы являются чётными функциями параметра λ. Тогда для $|\lambda|\leqslant N$ справедливы неравенства

$$|S_N\tilde{u}(x,\lambda,t)| \leqslant \frac{K_1T^2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\beta N}\int\limits_{0}^{\infty}[(N+\rho)^2+2(N+\rho)+2]e^{-\alpha\rho}\, d\rho$$
$$+\frac{2K_1T}{\sqrt{2\pi}}e^{-\beta N}\int\limits_{0}^{\infty}(N+\rho+1)e^{-\alpha\rho}\, d\rho.$$

Вычисляя интегралы, получаем оценку

$$|S_N\tilde{u}(x,\lambda,t)| \leqslant C_2^*(N)e^{-\beta N}, \quad (x,t)\in D(T,x_0), \quad |\lambda|\leqslant N, \tag{24}$$

где

$$C_2^*(N) = \frac{K_1T^2}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{(N^2+2N+2)\beta^2+2(N+1)\beta+2}{\beta^3}+2\frac{(N+1)\beta+1}{T\beta^2}\right]. \tag{25}$$

Оценим, наконец, $\mathcal{M}^0\tilde{v}_N(x,\lambda,t)$ и $\mathcal{M}^1_N\tilde{v}_N(x,\lambda,t)$. Обозначим

$$w_N(x,\lambda) = \max_{x-T\leqslant t\leqslant T-x}|\tilde{v}_N(x,\lambda,t)|, \quad x\in(0,x_0).$$

Для $|\lambda| \leqslant N$ находим, что

$$|\mathcal{M}^0 \tilde{v}_N(x,\lambda,t)| \leqslant K_0\left[(N^2+2N+2)\int\limits_0^x (x-\xi)w_n(\xi,\lambda)\,d\xi + (N+1)\int\limits_0^x w_n(\xi,\lambda)\,d\xi\right], \tag{26}$$

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{M}^1_N \tilde{v}_N(x,\lambda,t)\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}K_1\Bigg[(N^2+2N+2)\int\limits_0^x (x-\xi)\int\limits_{|\lambda'|\leqslant N} w_n(\xi,\lambda')e^{-\alpha|\lambda-\lambda'|}\,d\lambda' d\xi \\ + (N+1)\int\limits_0^x \int\limits_{|\lambda'|\leqslant N} w_n(\xi,\lambda')e^{-\alpha|\lambda-\lambda'|}\,d\lambda' d\xi\Bigg].\end{aligned} \tag{27}$$

Определим новую функцию

$$W_N(x) = \int\limits_{|\lambda|\leqslant N} w_N(x,\lambda)\,d\lambda = \max_{x-T\leqslant t\leqslant T-x} \int\limits_{|\lambda|\leqslant N} |\tilde{v}_N(x,\lambda,t)|\,d\lambda, \quad x\in[0,x_0]. \tag{28}$$

Проинтегрируем (19) по λ от $-N$ до N, учтём оценки (22), (24), (26), (27) и воспользуемся соотношениями

$$\begin{aligned}\int\limits_{|\lambda|\leqslant N}\int\limits_{|\lambda'\leqslant N} e^{-\alpha|\lambda-\lambda'|} w_N(\xi,\lambda')\,d\lambda' d\lambda = \int\limits_{|\lambda'|\leqslant N} w_N(\xi,\lambda') \int\limits_{|\lambda|\leqslant N} e^{-\alpha|\lambda-\lambda'|} d\lambda\, d\lambda' \\ \leqslant \int\limits_{|\lambda'|\leqslant N} w_N(\xi,\lambda') \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\lambda-\lambda'|} d\lambda\, d\lambda' = \frac{2}{\alpha} W_N(\xi).\end{aligned}$$

Тогда получим

$$\begin{aligned}W_N(x) \leqslant 2N\big(C_1^*(N)e^{-\alpha N} + C_2^*(N)e^{-\beta N}\big) \\ + K_0\left[(N^2+2N+2)\int\limits_0^x (x-\xi)W_n(\xi)\,d\xi + (N+1)\int\limits_0^x W_n(\xi)\,d\xi\right] \\ + \frac{2K_1}{\alpha\sqrt{2\pi}}\left[(N^2+2N+2)\int\limits_0^x (x-\xi)W_n(\xi)\,d\xi + (N+1)\int\limits_0^x W_n(\xi)\,d\xi\right], \quad x\in[0,x_0].\end{aligned} \tag{29}$$

Обозначим

$$C_3^*(N) = 2N\big(C_1^*(N) + C_2^*(N)\big), \quad K = K_0 + \frac{2K_1}{\alpha\sqrt{2\pi}}. \tag{30}$$

Так как $\beta < \alpha$, то неравенство (29) для $N \geqslant 1$ можно записать следующим образом:

$$W_N(x) \leqslant C_3^* e^{-\beta N} + NK\int\limits_0^x [5N(x-\xi)+2)]W_N(\xi)\,d\xi, \quad x\in[0,x_0]. \tag{31}$$

Для оценки $W_N(x)$ используем обобщённое неравенство Гроноулла — Беллмана, установленное в работе [16]. Суть его заключается в следующем. Если некоторая неотрицательная и непрерывная на отрезке $[0,x_0]$ функция $\varphi(x)$ удовлетворяет неравенству

$$\varphi(x) \leqslant A + N\int\limits_0^x \sum_{k=0}^m N^k a_k \frac{(x-\xi)^k}{k!}\varphi(\xi)\,d\xi, \quad 0\leqslant x\leqslant x_0,$$

с некоторыми неотрицательными постоянными A, $a_0, a_1, \dots, a_m$, то она удовлетворяет оценке

$$\varphi(x) \leqslant A e^{\eta N x}, \quad x \in [0, x_0],$$

в которой постоянная η вычисляется по формуле

$$\eta = \max_{0 \leqslant k \leqslant m} \left(2^m a_k / C_k^m\right)^{1/(k+1)}.$$

Здесь C_k^m — биномиальные коэффициенты. В данном случае $m = 1$ и $a_1 = 5K$, $a_0 = 2K$, поэтому

$$\eta = \max\{(10K)^{1/2}, 4K\}. \tag{32}$$

Потому из неравенства (31) следует оценка

$$W_N(x) \leqslant C_3^*(N) e^{-N(\beta - \eta x)}, \quad x \in [0, x_0], \quad N \geqslant 1. \tag{33}$$

Пусть $\beta' \in (0, \beta)$ и $\gamma = \beta'/\eta$, $D(T, x_0, \gamma) = D(T, x_0) \cap \{x \in [0, \gamma]\}$. Тогда из неравенства (33) вытекает оценка

$$|\tilde{u}(x, \lambda, t) - \tilde{u}_N(x, \lambda, t)| \leqslant C_3^*(N) e^{-N(\beta - \beta')}, \quad (x, t) \in D(T, x_0, \gamma), \quad N \geqslant 1. \tag{34}$$

Из неравенств (18), (34) следует, что

$$\begin{aligned}
\|u(x, \cdot, t) - u_N(x, \cdot, t)\|_{L_1(\mathbb{R})} &\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Bigg[\int\limits_{|\lambda| \leqslant N} |\tilde{u}(x, \lambda, t) - \tilde{u}_N(x, \lambda, t)|\, d\lambda + \int\limits_{|\lambda| \geqslant N} |\tilde{u}(x, \lambda, t)|\, d\lambda \Bigg] \\
&\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Bigg[2N C_3^*(N) e^{-N(\beta - \beta')} + M \int\limits_{|\lambda| \geqslant N} e^{-\beta|\lambda|}\, d\lambda \Bigg] \\
&\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Bigg[2N C_3^*(N) e^{-N(\beta - \beta')} + \frac{2M}{\beta} e^{-\beta N} \Bigg], \quad (x, t) \in D(T, x_0, \gamma), \quad N \geqslant 1.
\end{aligned} \tag{35}$$

Так как $C_3^*(N)$ зависит от N полиномиально, то правая часть неравенства (35) равномерно относительно $(x, t) \in D(T, x_0, \gamma)$ стремится к нулю при $N \to \infty$:

$$\|u(x, \cdot, t) - u_N(x, \cdot, t)\|_{L_1(\mathbb{R})} \to 0, \quad (x, t) \in D(T, x_0, \gamma), \quad N \to \infty.$$

Это завершает доказательство теоремы 1. □

3. ПРИБЛИЖЁННЫЕ РЕШЕНИЯ С НЕТОЧНЫМИ ДАННЫМИ

Пусть функции $f_\delta(x, y, t)$, $g_\delta(x, y, t)$, $h_\delta(x, y, t)$ являются некоторыми приближениями функций $f(x, y, t)$, $g(x, y, t)$, $h(x, y, t)$, причём $f_\delta(x, y, t)$, $g_\delta(x, y, t)$, $h_\delta(x, y, t)$ как функции переменной y принадлежат $L^1(-\infty, \infty)$ и для них выполнены условия

$$\begin{gathered}
\|f(x, \cdot, t) - f_\delta(x, \cdot, t)\|_{L_1(\mathbb{R})} \leqslant \delta, \quad \|g(\cdot, t) - g_\delta(\cdot, t)\|_{L_1(\mathbb{R})} \leqslant \delta, \\
\|h(\cdot, t) - h_\delta(\cdot, t)\|_{L_1(\mathbb{R})} \leqslant \delta, \quad (x, t) \in D(T),
\end{gathered} \tag{36}$$

где δ — некоторое положительное число. Из неравенств (36) следуют оценки для образов Фурье соответствующих функций:

$$\begin{gathered}
|\tilde{f}(x, \lambda, t) - \tilde{f}_\delta(x, \lambda, t)| \leqslant \delta/\sqrt{2\pi}, \quad |\tilde{g}(\lambda, t) - \tilde{g}_\delta(\lambda, t)| \leqslant \delta/\sqrt{2\pi}, \\
|\tilde{h}(\lambda, t) - \tilde{h}_\delta(\lambda, t)| \leqslant \delta/\sqrt{2\pi}, \quad t \in [0, T], \quad (x, t) \in D(T), \quad \lambda \in \mathbb{R}.
\end{gathered} \tag{37}$$

Построим семейство приближённых решений $u_{\delta N}(x,y,t)$ таких, что $u_{\delta N}(x,y,t) \to u(x,y,t)$ при $\delta \to +0$ и подходящем выборе $N = N(\delta)$. Пусть $\tilde{f}_\delta(x,y,t)$, $\tilde{g}_\delta(x,y,t)$, $\tilde{h}_\delta(x,y,t)$ — образы Фурье функций $f_\delta(x,y,t)$, $g_\delta(x,y,t)$, $h_\delta(x,y,t)$.

Определим функцию $\tilde{u}_{\delta N}(x,\lambda,t)$, аналогично $\tilde{u}_N(x,\lambda,t)$, при $|\lambda| \leqslant N$ как решение уравнения

$$\tilde{u}_{\delta N}(x,\lambda,t) = \widetilde{\Phi}_{\delta N}(x,\lambda,t) + \big(\mathcal{M}^0 + \mathcal{M}^1_N\big)\tilde{u}_{\delta N}(x,\lambda,t), \quad (x,t) \in D(T), \quad |\lambda| \leqslant N, \tag{38}$$

в котором

$$\begin{gathered}\widetilde{\Phi}_{\delta N}(x,\lambda,t) = -\frac{1}{2}\int\limits_0^x \int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} \tilde{f}_\delta(\xi,\lambda,\tau)\,d\tau d\xi + \frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t+x} \tilde{h}_\delta(\lambda,\tau)\,d\tau + \frac{1}{2}(\tilde{g}_\delta(\lambda,t-x) + \tilde{g}_\delta(\lambda,t+x)) \\ + \frac{1}{2}\int\limits_0^x [i\lambda B_0(0) + D(0)]\big(\tilde{g}_\delta(\lambda,t-x+\xi) + \tilde{g}_\delta(\lambda,t+x-\xi)\big)\,d\xi \\ + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x \int\limits_{-N}^{N} [i\lambda'\widetilde{B}_1(0,\lambda-\lambda') + \widetilde{D}_1(0,\lambda-\lambda')]\big(\tilde{g}_\delta(\lambda',t-x+\xi) + \tilde{g}_\delta(\lambda',t+x-\xi)\big)\,d\lambda' d\xi,\end{gathered} \tag{39}$$

а при $|\lambda| \geqslant N$ положим $\tilde{u}_{\delta N}(x,\lambda,t) = 0$.

Интегральное уравнение (38) является уравнением типа Вольтерра второго рода, поэтому его решение существует и единственно в классе функций, непрерывных при $|\lambda| \leqslant N$, $(x,t) \in D(T)$. Для его решения может быть использован обычный метод последовательных приближений.

Пусть $v_{\delta N}(x,y,t)$ — прообраз Фурье функции $\tilde{u}_{\delta N}(x,\lambda,t)$.

4. СХОДИМОСТЬ ПРИБЛИЖЁННЫХ РЕШЕНИЙ

Теорема 2. *Пусть $\delta \in (0, \min(1, e^{-\beta}))$, а число γ и область $D(T,x_0,\gamma)$ те же, что и в разд. 2. Тогда при выполнении условий (3)–(7) и выборе $N = N(\delta) = |\ln\delta|/\beta$ приближённые решения $u_{\delta N}(x,y,t)$ равномерно сходятся в области $D(T,x_0,\gamma)$ при $N \to \infty$ к решению задачи* (1), (2):

$$\max_{(x,t)\in D(T,x_0,\gamma)} \|u(x,\cdot,t) - u_{\delta N}(x,\cdot,t)\|_{L_1(\mathbb{R})} \to 0. \tag{40}$$

Доказательство. Введём следующие обозначения:

$$\begin{gathered}\tilde{v}_{\delta N}(x,\lambda,t) = \tilde{u}(x,\lambda,t) - \tilde{u}_{\delta N}(x,\lambda,t), \quad \bar{f}_\delta(x,\lambda,t) = \tilde{f}(x,\lambda,t) - \tilde{f}_\delta(x,\lambda,t), \\ \bar{h}_\delta(\lambda,t) = \tilde{h}(\lambda,t) - \tilde{h}_\delta(\lambda,t), \quad \bar{g}_{\delta N}(\lambda,t) = \tilde{g}(\lambda,t) - \tilde{g}_\delta(\lambda,t).\end{gathered} \tag{41}$$

Функция $\tilde{v}_{\delta N}(x,\lambda,t)$ при $|\lambda| \geqslant N$ совпадает с $\tilde{u}(x,\lambda,t)$, следовательно, для неё выполнено неравенство

$$|\tilde{v}_N(x,\lambda,t)| \leqslant Me^{-\beta N}, \quad (x,t) \in D(T,x_0), \quad |\lambda| \geqslant N, \tag{42}$$

а при $|\lambda| \leqslant N$ она удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned}\tilde{v}_{\delta N}(x,\lambda,t) = \widetilde{\Psi}_{\delta N}(x,\lambda,t) + \big(\mathcal{M}^0 + \mathcal{M}^1_N\big)\tilde{v}_{\delta N}(x,\lambda,t)& \\ + S_N\tilde{u}(x,\lambda,t), \quad (x,t) \in D(T,x_0), \quad |\lambda| \leqslant N,&\end{aligned} \tag{43}$$

в котором

$$\widetilde{\Psi}_{\delta N}(x,\lambda,t)=\widetilde{\Phi}(x,\lambda,t)-\widetilde{\Phi}_{\delta N}(x,\lambda,t)$$
$$=-\frac{1}{2}\int\limits_0^x\int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi}\bar{f}_\delta(\xi,\lambda,\tau)\,d\tau d\xi+\frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t+x}\bar{h}_\delta(\lambda,\tau)\,d\tau+\frac{1}{2}(\bar{g}_\delta(\lambda,t-x)+\bar{g}_\delta(\lambda,t+x))$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x\int\limits_{|\lambda'|\leqslant N}[i\lambda'\widetilde{B}_1(0,\lambda-\lambda')+\widetilde{D}_1(0,\lambda-\lambda')]\big(\bar{g}_\delta(\lambda',t-x+\xi)+\bar{g}_\delta(\lambda',t+x-\xi)\big)\,d\lambda' d\xi$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x\int\limits_{|\lambda'|\geqslant N}[i\lambda'\widetilde{B}_1(0,\lambda-\lambda')+\widetilde{D}_1(0,\lambda-\lambda')]$$
$$\times\big(\tilde{g}_\delta(\lambda',t-x+\xi)+\tilde{g}_\delta(\lambda',t+x-\xi)\big)\,d\lambda' d\xi. \quad (44)$$

Заметим, что последнее слагаемое формулы (44) совпадает с $\widetilde{\Psi}_N(x,\lambda,t)$. Ниже мы воспользуемся оценкой (22) этой функции. Из формул (44), (22) и принятых выше обозначений следует, что при $(x,t)\in D(T,x_0)$, $|\lambda|\leqslant N$ имеет место

$$|\widetilde{\Psi}_{\delta N}(x,\lambda,t)|$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\iint\limits_{D(T)}|\bar{f}_\delta(\lambda,\xi,\tau)|\,d\tau d\xi+\frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t+x}|\bar{h}_\delta(\lambda,\tau)|\,d\tau+\frac{1}{2}(|\bar{g}_\delta(\lambda,t-x)|+|\bar{g}_{\delta N}(\lambda,t+x)|)$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x\int\limits_{|\lambda'|\leqslant N}[|\lambda'||\widetilde{B}(0,\lambda-\lambda')|+|\widetilde{D}(0,\lambda-\lambda')|]\big(|\bar{g}_\delta(\lambda,t-x+\xi)|+|\bar{g}_\delta(\lambda,t+x-\xi)\big)|\,d\lambda d\xi$$
$$+C_1^*(N)e^{-\alpha N}\leqslant\bigg(\frac{T^2}{2}+T+1+\frac{2TK}{\sqrt{2\pi}}\,(N+1)\bigg)\frac{\delta}{\sqrt{2\pi}}+C_1^*(N)e^{-\alpha N}.$$

Таким образом, справедлива оценка

$$|\widetilde{\Psi}_{\delta N}(x,\lambda,t)|\leqslant C_0^*(T)\delta+C_1^*(N)e^{-\alpha N},\quad (x,t)\in D(T,x_0),\quad |\lambda|\leqslant N, \quad (45)$$

где

$$C_0^*(N)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\bigg(\frac{T^2}{2}+T+1+\frac{2TK}{\sqrt{2\pi}}\,(N+1)\bigg). \quad (46)$$

Оценка функции $S_N(x,\lambda,t)$ дана формулой (24). Введём

$$w_{\delta N}(x,\lambda)=\max_{x-T\leqslant t\leqslant T-x}|\tilde{v}_{\delta N}(x,\lambda,t)|,\quad x\in(0,x_0),$$

а затем, аналогично равенству (28), введём функцию

$$W_{\delta N}(x)=\int\limits_{|\lambda|\leqslant N}w_{\delta N}(x,\lambda)\,d\lambda=\max_{x-T\leqslant t\leqslant T-x}\int\limits_{|\lambda|\leqslant N}|\tilde{v}_{\delta N}(x,\lambda,t)|\,d\lambda,\quad x\in[0,x_0].$$

Оценка операторов $\mathcal{M}^0$, $\mathcal{M}^1$ дана формулами (26), (27). Проинтегрируем равенство (43) по λ в пределах от $-N$ до N и воспользуемся техникой оценок, применённой выше для оценки $W_N(x)$. Тогда получим полный аналог оценки (31) в виде

$$W_{\delta N}(x)\leqslant 2NC_0^*\delta+C_3^*e^{-\beta N}+NK\int\limits_0^x[5N(x-\xi)+2)]W_{\delta N}(\xi),\quad x\in[0,x_0],\quad N\geqslant 1. \quad (47)$$

Для оценки $W_{\delta N}(x)$ используем упомянутое выше обобщённое неравенство Гронуолла — Беллмана. Тогда получим, что

$$W_{\delta N}(x) \leqslant \left(2NC_0^*\delta + C_3^* e^{-N\beta}\right)e^{N\eta x}, \quad x \in [0, x_0], \quad N \geqslant 1. \tag{48}$$

В этой оценке величина η определена формулой (32). Пусть, как и ранее, $\beta' \in (0, \beta)$ и $\gamma = \beta'/\eta$, $D(T, x_0, \gamma) = D(T, x_0) \cap \{x \in [0, \gamma]\}$. Тогда из неравенства (48) вытекает оценка

$$W_{\delta N}(x) \leqslant \left(2NC_0^*\delta + C_3^* e^{-N\beta}\right)e^{N\beta'}, \quad (x,t) \in D(T, x_0, \gamma), \quad N \geqslant 1. \tag{49}$$

Используя неравенство (42), получаем

$$\int\limits_{|\lambda|\geqslant N} |\tilde{v}(x,\lambda,t)|\, d\lambda \leqslant M \int\limits_{|\lambda|\geqslant N} e^{-\beta|\lambda|}\, d\lambda \leqslant \frac{2M}{\beta} e^{-\beta N}, \quad (x,t) \in D(T, x_0), \tag{50}$$

Обозначим через $u_{\delta N}(x,y,t)$ прообраз Фурье функции $\tilde{u}_{\delta N}(x,\lambda,t)$:

$$u_{\delta N}(x,y,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}_{\delta N}(x,\lambda,t) e^{i\lambda y} d\lambda.$$

В силу (49), (50), справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \|u(x,\cdot,t) - u_{N\delta}(x,\cdot,t)\|_{L_1(\mathbb{R})} &\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int\limits_{|\lambda|\leqslant N} |\tilde{v}_{\delta N}(x,\lambda,t)|\, d\lambda + \int\limits_{|\lambda|\geqslant N} |\tilde{v}_{\delta N}(x,\lambda,t)|\, d\lambda \right) \\ &\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left((2NC_0^*\delta + C_3^* e^{-N\beta})e^{N\beta'} + \frac{2M}{\beta} e^{-\beta N} \right), \quad (x,t) \in D(T, x_0, \gamma), \quad N \geqslant 1. \end{aligned} \tag{51}$$

Полагая $\delta \in (0, \min(1, e^{-\beta}))$, выберем в (51) N из условия $N\beta = -\ln \delta$. Тогда справедливо соотношение $e^{-\beta N} = \delta$, и неравенство принимает вид

$$\begin{gathered} \|u(x,\cdot,t) - u_{N\delta}(x,\cdot,t)\|_{L_1(\mathbb{R})} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left((2NC_0^* + C_3^*) e^{N(\delta)\beta'} + \frac{2M}{\beta} \right)\delta, \\ (x,t) \in D(T, x_0, \gamma), \quad N \geqslant 1. \end{gathered} \tag{52}$$

В силу равенств (23), (25), (30), (46), имеет место оценка

$$\left(2N(\delta)C_0^*(N(\delta)) + C_3^*(N(\delta))\right)\delta \sim C_4^*\delta|\ln^3\delta| \quad \text{при} \quad \delta \to 0,$$

в которой постоянная C_4^* вычисляется по формуле $C_4^* = \dfrac{2T^2K_1}{\beta^4\sqrt{2\pi}}$. Кроме того, $e^{N(\delta)\beta'} = e^{-(\beta'\ln\delta)/\beta} = \delta^{-\beta'/\beta}$. Поэтому неравенство (52) можно представить в виде

$$\|u(x,\cdot,t) - u_{N\delta}(x,\cdot,t)\|_{L_1(\mathbb{R})} \sim C_4^*\delta^{(1-\beta'/\beta)}|\ln^3\delta| \text{ при } \delta \to +0, \quad (x,t) \in D(T, x_0.\gamma). \tag{53}$$

Из (53) следует утверждение теоремы 2. □

Замечание. Изложенное выше легко переносится на случай, когда $y \in \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *John F.* Continuous dependence on data for solutions of partial differential equations with a prescribed bound // Communs. Pure Appl. Math. 1960. N 4. P. 551–585.
2. *John F.* Differential Equations with Approximate and Improper Data. Lectures. N. Y.: New York Univer., 1995.
3. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
4. *Романов В. Г.* Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа. Новосибирск: Наука, 1972.
5. *Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П.* Некорректные задачи математической физики. М.: Наука, 1980.
6. *Finch D., Patch S. K., Rakesh.* Determining a function from its mean values over a family of spheres // SIAM J. Math. Anal. 2004. V. 35, N 5. P. 1213–1240.
7. *Natterer F.* Photo-acoustic inversion in convex domains // Inverse Probl. Imaging. 2012. V. 6, N 2. P. 1–6.
8. *Palamodov V. P.* Reconstruction from limited data of arc means // J. Fourier Anal. Appl. 2000. V. 6, N 1. P. 25–42.
9. *Symes W. W.* A trace theorem for solutions of the wave equation, and the remote determination of acoustic sources // Math. Meth. Appl. Sci. 1983. V. 5. P. 131–152.
10. *Nirenberg L.* Topics in nonlinear functional analysis. N. Y.: Courant Institute of Math. Sci., New York Univ., 1974.
11. *Овсянников Л. В.* Нелинейная задача Коши в шкалах банаховых пространств // Докл. АН СССР. 1971. Т. 200, № 4. С. 789–792.
12. *Романов В. Г.* Регуляризация решения задачи Коши с данными на времени-подобной плоскости // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 3. С. 879–890.
13. *Романов В. Г., Бугуева Т. В., Дедок В. А.* Регуляризация решения задачи Коши. Метод квазиобращения // Сиб. журн. индустр. математики. 2018. Т. 21, № 4. С. 96–109.
14. *Латтес Р., Лионс Ж.-Л.* Метод квазиобращения и его приложения. М.: Мир, 1970.
15. *Romanov V. G.* Regularization of a continuation problem for electrodynamic equations // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2020; https://doi.org/10.1515/jiip-2020-0012
16. *Romanov V. G.* Обобщённое неравенство Гронуолла — Беллмана // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 3. С. 674–680.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 517.968

REGULARIZATION OF THE SOLUTION OF A CAUCHY PROBLEM FOR A HYPERBOLIC EQUATION

© 2021 **V. G. Romanov**[1a], **T. V. Bugueva**[1,2b], **V. A. Dedok**[1,2c]

[1]*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, pr. Acad. Koptyuga 4, Novosibirsk 630090, Russia,*
[2]*Novosibirsk State University, ul. Pirogova 1, Novosibirsk 630090, Russia*

E-mails: [a]romanov@math.nsc.ru, [b]bugueva@math.nsc.ru, [c]dedok@math.nsc.ru

Received 20.11.2020, revised 20.11.2020, accepted 28.12.2020

Abstract. Given a hyperbolic equation with variable coefficients, we construct a regularizing algorithm to solve the problem of continuation of the wave field from the boundary of the half-plane inside it. We introduce some N-approximate solutions and establish their convergence to the exact solution. Under consideration is the case when the problem data have an error of δ. We find an estimate of the accuracy of the approximate solutions and prove the convergence of the approximate solutions to the unique solution as $\delta \to 0$.

Keywords: a Cauchy problem, wave field continuation, regularization.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.107

REFERENCES

1. John F. Continuous dependence on data for solutions of partial differential equations with a prescribed bound. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1960, No. 4, pp. 551–585.
2. John F. Differential Equations with Approximate and Improper Data. Lectures. N. Y.: N. Y. University, 1955.
3. Kurant R. Uravneniya s chastnymi proizvodnymi [Partial differential equations]. Moscow: Mir, 1964 (in Russian).
4. Romanov V.G. Integral Geometry and Inverse Problems for Hyperbolic Equations. Berlin: Springer-Verl., 1974.
5. Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., Shishatskii S.P. Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis. Providence: Amer. Math. Soc., 1986.
6. Finch D., Patch S.K., Rakesh. Determining a function from its mean values over a family of spheres. *SIAM J. Math. Anal.*, 2004, Vol. 35, No. 5, pp. 1213–1240.
7. Natterer F. Photo-acoustic inversion in convex domains. *Inverse Probl. Imaging*, 2012, Vol. 6, No. 2, pp. 1–6.
8. Palamodov V.P. Reconstruction from limited data of arc means. *J. Fourier Anal. Appl.*, 2000, Vol. 6, No. 1, pp. 25–42.
9. Symes W.W. A trace theorem for solutions of the wave equation, and the remote determination of acoustic sources. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 1983, Vol. 5, pp. 131–152.
10. Nirenberg L. Topics in Nonlinear Functional Analysis. N. Y.: Courant Institute of Math. Sci.; N. Y. Univ., 1974.

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2021, Vol. 15, No. 1, pp. 118–128; DOI: 10.1134/S1990478921010105

11. Ovsyannikov L.V. A nonlinear Cauchy problem in a scale of Banach spaces. *Sov. Math., Dokl.*, 1971, Vol. 12, No. 4, pp. 1497–1502.

12. Romanov V.G. Regularization of a solution to the Cauchy problem with data on a timelike plane. *Siberian Math. J.*, 2018, Vol. 59, No. 4, pp. 694–704.

13. Romanov V. G., Bugueva T. V., Dedok V. A. Regularization of the solution of the Cauchy problem: the quasi-reversibility method. *J. Appl. Ind. Math.*, 2018, Vol. 12, No. 4, pp. 716–728.

14. Lattes R., Lions Zh.-L. The Method of Quasi-Reversibility. Applications to Partial Differential Equations. N. Y.: American Elsevier, 1970.

15. Romanov V.G. Regularization of a continuation problem for electrodynamic equations. *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 2020; https://doi.org/10.1515/jiip-2020-0012

16. Romanov V.G. A generalized Gronwall—Bellman inequality. *Siberian Math. J.*, 2020, Vol. 61, No. 3, pp. 532–537.