УДК 517.951:539.37

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ ТОНКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ В УПРУГОМ ТЕЛЕ В РАМКАХ АНТИПЛОСКОГО СДВИГА

© 2021 Е. М. Рудой[1,2a], Х. Итоу[3b], Н. П. Лазарев[4c]

[1]*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,*
просп. Акад. Лаврентьева, 15, г. Новосибирск 630090, Россия,
[2]*Новосибирский государственный университет,*
ул. Пирогова, 1, г. Новосибирск 630090, Россия,
[3]*Токийский университет науки,*
Кагуразака, 1-3, Синдзюку-ку, Токио 162-8601, Япония,
[4]*Северо-Восточный федеральный университет,*
ул. Кулаковского, 48, г. Якутск 677000, Россия

E-mails: [a]rem@hydro.nsc.ru, [b]h-itou@rs.tus.ac.jp, [c]nyurgun@ngs.ru

Поступила в редакцию 20.07.2020 г.; после доработки 26.10.2020 г.;
принята к публикации 28.12.2020 г.

В рамках модели антиплоского сдвига рассматривается задача о равновесии упругого тела, содержащего неоднородное включение с криволинейными границами. Предполагается, что модуль сдвига включения зависит степенным образом от малого параметра, характеризующего его ширину. Обоснован предельный переход к пределу при стремлении параметра к нулю и построена асимптотическая модель упругого тела, содержащего тонкое включение. Показано, что в зависимости от показателя степени параметра существует пять типов тонких включений: трещина, жёсткое включение, идеальный контакт, упругое включение и трещина с адгезионным взаимодействием берегов. Установлена сильная сходимость семейства решений исходной задачи к решению предельной.

Ключевые слова: асимптотический анализ, антиплоский сдвиг, неоднородное упругое тело, тонкое жёсткое включение, тонкое упругое включение, трещина.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.108

В рамках модели антиплоского сдвига рассматривается задача о равновесии упругого тела, содержащего неоднородное включение с липшицевой границей. Считается, что модули сдвига включения и его ширина зависят от малого параметра ε. При этом модули сдвига материала, из которого состоит включение, пропорциональны ε^N, где N — произвольное действительное число. На внешней границе упругого тела задаются смешанные краевые условия. Задача о равновесии формулируется в виде задачи минимизации функционала энергии в пространстве Соболева H^1.

Основная цель статьи — исследовать асимптотику решения при стремлении параметра ε к нулю. Основываясь на вариационных свойствах решения задачи минимизации, предложен метод асимптотического анализа, позволяющий доказать сильную сходимость семейства решений исходной задачи к решению предельной. Данный метод позволил получить предельную модель упругого тела с тонким включением для всех значений параметра N. При этом показано, что в зависимости от N существует пять типов тонких включений: трещина при $N > 1$;

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 18-41-140003, 19-51-50004) и Японского общества продвижения науки (проект J19-721).

жёсткое включение при $N < -1$; идеальный контакт при $-1 < N < 1$, означающий, что предельная задача есть задача о равновесии однородного тела; упругое включение при $N = -1$; трещина с адгезионным контактом берегов при $N = 1$. Установлена сильная сходимость семейства решений исходной задачи к решению предельной.

Приведём краткий обзор работ, наиболее близких к настоящему исследованию. В работах [1–5] проводился асимптотический анализ моделей упругих тел, связанных между собой тонким клеевым слоем. При этом в указанных работах в отличие от настоящей статьи метод асимптотического обоснования (Г-сходимость, формальное асимптотическое разложение и пр.) предельной модели зависит от упругих свойств клеевого слоя.

В недавних работах [6–10] исследовались модели упругих тел с тонкими включениями и трещинами, учитывающие, в том числе, взаимодействие берегов трещин друг с другом. Результаты численного моделирования поведения упругих тел с тонкими включениями можно найти в [11–16]. Здесь же отметим работы [17–19] по численному решению задач теории трещин с возможных контактом берегов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В $\mathbb{R}^2$ зададим область Ω с липшицевой границей $\partial\Omega$. Пусть Γ_N и Γ_D — части $\partial\Omega$ с ненулевыми мерами Хаусдорфа такие, что $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ и $\overline{\Gamma}_D \cup \overline{\Gamma}_N = \partial\Omega$. Обозначим через S пересечение области Ω с осью абсцисс. Зададим два интервала I_1 и I_2, лежащие на оси абсцисс и содержащиеся в Ω, такие, что $\overline{I}_1 \subset I_2$ и $\overline{I}_2 \subset S$. Дополнительно будем считать, что существует выпуклая подобласть $D \subset \Omega$ такая, что её пересечение с осью абсцисс есть интервал I_2 и, кроме того, $\overline{D} \subset \Omega$.

Рассмотрим две липшицевые функции $\psi_\pm$, определённые на S, такие, что $\pm\psi_\pm > 0$ на I_1 и $\psi_\pm = 0$ на $S \setminus I_1$. Зафиксируем малый параметр $\varepsilon > 0$ и введём ряд обозначений:

$$\begin{gathered}\Omega_\pm = \{(x_1, x_2) \in \Omega \mid \pm x_2 > 0\},\\ \Omega_m^\varepsilon = \{(y_1, y_2) \in \Omega \mid \varepsilon\psi_-(y_1) < y_2 < \varepsilon\psi_+(y_1),\ y_1 \in I_1\},\\ S_\pm^\varepsilon = \{(y_1, y_2) \in \Omega \mid y_2 = \varepsilon\psi_\pm(y_1),\ y_1 \in I_1\},\\ \Omega_0^\varepsilon = \Omega \setminus \overline{\Omega}_m^\varepsilon, \quad \Omega_\pm^\varepsilon = \Omega_0^\varepsilon \cap \Omega_\pm.\end{gathered}$$

Заметим, что существует такое $\varepsilon_0 \in (0,1)$, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ семейство областей Ω_m^ε лежит строго внутри области D.

Наконец, будем считать, что интервал I_1 разбивается на пять подмножеств $S_i \subset I_1$, где S_i есть объединение конечного числа промежутков или пустое множество, $i = \overline{1,5}$; при этом

$$\partial S_i \cap \partial I_1 = \emptyset, \quad i = 4, 5. \tag{1}$$

Условие (1) означает, что множества S_4 и S_5 лежат строго внутри интервала I_1. Наконец, определим множества

$$\Omega_{m_i}^\varepsilon = \bigl\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \varepsilon\psi_-(y_1) < y_2 < \varepsilon\psi_+(y_1),\ y_1 \in S_i\bigr\}, \quad i = \overline{1,5}.$$

Считается, что Ω есть упругое неоднородное тело, состоящее из упругой матрицы Ω_0^ε, содержащей строго внутри себя неоднородное упругое включение Ω_m^ε. При этом напряжённо-деформированное состояние тела Ω описывается в рамках модели антиплоского сдвига. Такое состояние возникает, когда поле перемещений имеет одну ненулевую компоненту, направленную перпендикулярно к плоскости, в которой остальные две компоненты поля перемещений равны нулю (см. [20]). Обозначим через k_0, k_i^ε модули сдвига для подобластей Ω_0^ε и $\Omega_{m_i}^\varepsilon$ соответственно, $i = \overline{1,5}$. Будем считать, что $k_0 > 0$ есть константа, а k_i^ε зависят от ε следующим образом: $k_i^\varepsilon = \varepsilon^{N_i} k_i$, где $k_i > 0$, $i = \overline{1,5}$; N_i — действительные числа такие, что

$$N_1 < -1, \quad N_2 \in (-1, 1), \quad N_3 > 1, \quad N_4 = -1, \quad N_5 = 1.$$

В области Ω определим следующую кусочно-постоянную функцию:

$$k^{\varepsilon}(y) = \begin{cases} k_0, & y \in \Omega_0^{\varepsilon}, \\ k_i^{\varepsilon}, & y \in \Omega_{m_i}^{\varepsilon}, \quad i = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Считаем, что тело Ω закреплено на части Γ_D внешней границы $\partial\Omega$, а к оставшейся части Γ_N приложена сила $g \in L_2(\Gamma_N)$. В случае малых деформаций формулировка задачи о равновесии упругого тела имеет следующий вид: требуется найти функцию $u_\varepsilon \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$, удовлетворяющую вариационному равенству

$$a_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = l(v) \text{ для всех } v \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega), \tag{2}$$

где

$$H^1_{\Gamma_D}(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ п. в. на } \Gamma_D\},$$
$$a_\varepsilon(u, v) = \int\limits_{\Omega} k^{\varepsilon} \nabla u \nabla v \, dy, \quad l(v) = \int\limits_{\Gamma_N} gv \, ds.$$

Отметим, что (2) является слабой вариационная формулировкой краевой задачи

$$-\operatorname{div}(k^{\varepsilon} \nabla u_\varepsilon) = 0 \text{ в } \Omega, \quad u_\varepsilon = 0 \text{ на } \Gamma_D, \quad k^{\varepsilon} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = g \text{ на } \Gamma_N,$$

которая изучалась в работах [12, 21–23] в рамках модели антиплоского сдвига. Здесь ν — внешняя единичная нормаль к $\partial\Omega$.

Дальнейшая цель — исследовать поведение решения задачи (2) при стремлении параметра ε к нулю.

2. ДЕКОМПОЗИЦИЯ ЗАДАЧИ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ

Перепишем задачу (2) в эквивалентном виде, разложив её на несколько подзадач, определённых в областях $\Omega_\pm^\varepsilon$ и Ω_m^ε, решения которых связаны между собой на общих частях границ указанных областей. Для этого определим множество

$$K^{\varepsilon} = \big\{v = (v_-, v_+, v_m) \in H^1(\Omega_-^\varepsilon) \times H^1\big(\Omega_+^\varepsilon\big) \times H^1\big(\Omega_m^\varepsilon\big) \mid v_\pm = 0 \text{ п. в. на } \partial\Omega_\pm^\varepsilon \cap \Gamma_D,$$
$$v_\pm = v_m \text{ п. в. на } S_\pm^\varepsilon, \ v_+ = v_- \text{ п. в. на } \partial\Omega_-^\varepsilon \cap \partial\Omega_+^\varepsilon\big\}.$$

Тогда задачу (2) можно переформулировать в эквивалентном виде: требуется найти тройку функций $(u_{\varepsilon-}, u_{\varepsilon+}, u_{\varepsilon m}) \in K^{\varepsilon}$, удовлетворяющую вариационному равенству

$$b_{\varepsilon-}(u_{\varepsilon-}, v_-) + b_{\varepsilon+}(u_{\varepsilon+}, v_+) + b_{\varepsilon m}(u_{\varepsilon m}, v_m) = l_-(v_-) + l_+(v_+) \text{ для любого } v \in K^{\varepsilon}, \tag{3}$$

где

$$b_{\varepsilon\pm}(u_\pm, v_\pm) = \int\limits_{\Omega_\pm^\varepsilon} k_0 \nabla u_\pm \nabla v_\pm \, dy, \quad b_{\varepsilon m}(u_m, v_m) = \sum_{i=1}^{5} \int\limits_{\Omega_{m_i}^\varepsilon} k_i^{\varepsilon} \nabla u_m \nabla v_m \, dy,$$
$$l_\pm(v_\pm) = \int\limits_{\partial\Omega_\pm^\varepsilon \cap \Gamma_N} g v_\pm \, ds.$$

Используя аналогичные рассуждения из работы [16], можно доказать, что задача (3) имеет единственное решение $u_\varepsilon = (u_{\varepsilon-}, u_{\varepsilon+}, u_{\varepsilon m}) \in K^{\varepsilon}$. При этом $u_{\varepsilon\pm}$ есть сужение u_ε на $\Omega_\pm^\varepsilon$, а $u_{\varepsilon m}$ — сужение u_ε на Ω_m^ε, где u_ε — решение задачи (2).

Введём следующие обозначения:

$$\Omega_m = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \psi_-(z_1) < z_2 < \psi_+(z_1),\ z_1 \in I_1\},$$
$$S_\pm = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 \mid z_2 = \psi_\pm(z_1),\ z_1 \in I_1\},$$
$$\Omega_{m_i} = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \psi_-(z_1) < z_2 < \psi_+(z_1),\ z_1 \in S_i\},$$
$$S^\pm_{m_i} = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 \mid z_2 = \psi_\pm(z_1),\ z_1 \in S_i\},\ i = \overline{1,5}.$$

Определим теперь преобразования координат, которые отображают области $\Omega^\varepsilon_\pm$ и Ω^ε_m на фиксированные и не зависящие от ε. Для этого выберем произвольную срезающую функцию $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ таким образом, чтобы выполнялись условия

$$\theta = 1 \text{ в } \Omega^{\varepsilon_0}_m; \quad 0 < \theta < 1 \text{ в } D; \quad \theta = 0 \text{ в } \Omega \setminus \overline{D}.$$

В областях $\Omega_\pm$ и Ω_m рассмотрим следующие преобразования координат:

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2 \pm \varepsilon\psi_\pm(x_1)\theta(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega_\pm, \quad (y_1, y_2) \in \Omega^\varepsilon_\pm, \tag{4}$$
$$y_1 = z_1, \quad y_2 = \varepsilon z_2, \quad (z_1, z_2) \in \Omega_m, \quad (y_1, y_2) \in \Omega^\varepsilon_m. \tag{5}$$

Несложно показать, что преобразования (4) взаимно-однозначно отображают области $\Omega_\pm$ на $\Omega^\varepsilon_\pm$, соответственно. Кроме того, в силу гладкости функций $\psi_\pm$ отображения (4) и (5) также устанавливают взаимно-однозначное соответствие между пространствами $H^1(\Omega_\pm)$, $H^1(\Omega_m)$ и $H^1(\Omega^\varepsilon_\pm)$, $H^1(\Omega^\varepsilon_m)$ соответственно. При этом нормы соответствующих элементов связаны между собой обычной формулой замены переменных в интегралах (см. [24, лемма 3.2] или [25, с. 46]). Кроме того, множество K^ε отобразится во множество K, где

$$K = \{v = (v_-, v_+, v_m) \in H^1(\Omega_-) \times H^1(\Omega_+) \times H^1(\Omega_m) \mid v_\pm = 0 \text{ п. в. на } \partial\Omega_\pm \cap \Gamma_D,$$
$$v_\pm|_S = v_m|_{S_\pm},\ v_- = v_+ \text{ п. в. на } (\partial\Omega_- \cap \partial\Omega_+) \setminus \overline{S}\}.$$

Здесь и далее равенство $v_\pm|_S = v_m|_{S_\pm}$ означает, что $v_\pm(x_1, 0) = v_m(x_1, \psi_\pm(x_1))$, $z_1 = x_1 \in I_1$.

Применим преобразования координат (4) и (5) к (3). В результате получим, что тройка функций $\big(u^\varepsilon_-, u^\varepsilon_+, u^\varepsilon_m\big) \in K$ является единственным решением следующего вариационного равенства:

$$b^\varepsilon_-\big(u^\varepsilon_-, v_-\big) + b^\varepsilon_+\big(u^\varepsilon_+, v_+\big) + b^\varepsilon_m\big(u^\varepsilon_m, v_m\big) = l_-(v_-) + l_+(v_+) \text{ для всех } (v_-, v_+, v_m) \in K, \tag{6}$$

где

$$u^\varepsilon_\pm(x_1, x_2) = u_{\varepsilon\pm}(x_1, x_2 \pm \varepsilon\psi_\pm(x_1)\theta(x_1, x_2)), \quad (x_1, x_2) \in \Omega_\pm,$$
$$u^\varepsilon_m(z_1, z_2) = u_{\varepsilon m}(z_1, \varepsilon z_2), \quad (z_1, z_2) \in \Omega_m,$$
$$b^\varepsilon_\pm\big(u^\varepsilon_\pm, v_\pm\big) = \int\limits_{\Omega_\pm} k_0\big(\nabla u^\varepsilon_\pm\big)^t \Psi^\pm_\varepsilon \big(\Psi^\pm_\varepsilon\big)^t \nabla v J^\pm_\varepsilon \, dx,$$

$$b^\varepsilon_m(u^\varepsilon_m, v_m) = \int\limits_{\Omega_m} \varepsilon k^\varepsilon \left(u^\varepsilon_{m,1} v_{m,1} + \frac{u^\varepsilon_{m,2} v_{m,2}}{\varepsilon^2} \right) dz$$
$$= \int\limits_{\Omega_{m_1}} k_1 \left(\frac{u^\varepsilon_{m,1} v_{m,1}}{\varepsilon^{-N_1-1}} + \frac{u^\varepsilon_{m,2} v_{m,2}}{\varepsilon^{-N_1+1}} \right) dz + \int\limits_{\Omega_{m_2}} k_2 \left(\varepsilon^{N_2+1} u^\varepsilon_{m,1} v_{m,1} + \frac{u^\varepsilon_{m,2} v_{m,2}}{\varepsilon^{-N_2+1}} \right) dz$$

$$+\int\limits_{\Omega_{m_3}} k_3\big(\varepsilon^{N_3+1}u^\varepsilon_{m,1}v_{m,1}+\varepsilon^{N_3-1}u^\varepsilon_{m,2}v_{m,2}\big)\,dz+\int\limits_{\Omega_{m_4}} k_4\bigg(u^\varepsilon_{m,1}v_{m,1}+\frac{u^\varepsilon_{m,2}v_{m,2}}{\varepsilon^2}\bigg)\,dz$$
$$+\int\limits_{\Omega_{m_5}} k_5\big(\varepsilon^2u^\varepsilon_{m,1}v_{m,1}+u^\varepsilon_{m,2}v_{m,2}\big)\,dz. \quad (7)$$

Здесь и далее нижние индексы после запятой обозначают дифференцирование по соответствующей координате. Заметим, что в (7) все степени при ε положительны.

В дальнейшем удобно использовать асимптотическое представление для билинейных форм $b^\varepsilon_\pm$ с точностью до $o(1)$, а именно, имеют место следующие формулы:

$$b^\varepsilon_\pm(w_\pm,v_\pm)=b_\pm(w_\pm,v_\pm)+r_\pm(\varepsilon,w_\pm,v_\pm),$$

где

$$b_\pm(w_\pm,v_\pm)=\int\limits_{\Omega_\pm} k_0\nabla w_\pm\nabla v_\pm\,dx,$$

$$|r_\pm(\varepsilon,w_\pm,v_\pm)|\leqslant c_\pm(\varepsilon)\big(\|w_\pm\|^2_{H^1(\Omega_\pm)}+\|v_\pm\|^2_{H^1(\Omega_\pm)}\big),\quad c_\pm(\varepsilon)=o(1)\ \text{при}\ \varepsilon\to 0.$$

3. ПРЕДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА

В данном разделе обоснуем предельный переход при $\varepsilon\to 0$. Справедлива следующая вспомогательная лемма, доказательство которой можно найти в [26, 27].

Лемма. *Для любой функции $v_m\in H^1(\Omega_m)$ справедливо неравенство*

$$\|v_m\|^2_{L_2(\Omega_m)}\leqslant C\big(\|v_{m,2}\|^2_{L_2(\Omega_m)}+\|v_m\|^2_{L_2(S_\pm)}\big).$$

Сформулируем и докажем теперь основной результат.

Теорема. *Пусть $u^\varepsilon=\big(u^\varepsilon_-,u^\varepsilon_+,u^\varepsilon_m\big)$ — решение задачи (6), $(u_-,u_+)\in K_l$ — решение следующего вариационного равенства:*

$$b_-(u_-,v_-)+b_+(u_+,v_+)+k_4\int\limits_{S_4}(\psi_+-\psi_-)u_{+,1}v_{+,1}\,dx_1$$
$$+k_5\int\limits_{S_5}\frac{(u_+-u_-)(v_+-v_-)}{\psi_+-\psi_-}\,dx_1=l_-(v_-)+l_+(v_+)\ \textit{для всех}\ (v_-,v_+)\in K_l, \quad (8)$$

где

$$K_l=\big\{(v_-,v_+)\in H^1_{\Gamma_D}(\Omega_-)\times H^1_{\Gamma_D}(\Omega_+)\mid v_-|_{S_i}=v_+|_{S_i},\ i=1,2,4;$$
$$v_+=\text{const}\ \textit{на}\ S_1,\ v_+|_{S_4}\in H^1(S_4)\big\}.$$

Тогда при $\varepsilon\to 0$ имеет место сходимость

$$(u^\varepsilon_-,u^\varepsilon_+)\to(u_-,u_+)\ \textit{сильно в}\ H^1(\Omega_-)\times H^1(\Omega_+),$$
$$u^\varepsilon_m|_{\Omega_{m_i}}\to u_{m_i}|_{\Omega_{m_i}}\ \textit{сильно в}\ L_2(\Omega_{m_i}),\quad i=1,2,4,5,$$

где

$$u_{m_i}(z_1,z_2)=u_-(z_1,0)=u_+(z_1,0)\ \textit{для п. в.}\ (z_1,z_2)\in\Omega_{m_i},\quad i=1,2,4, \quad (9)$$

$$u_{m_5}(z_1,z_2)=\frac{u_+(z_1,0)-u_-(z_1,0)}{\psi_+(z_1)-\psi_-(z_1)}z_2$$
$$+\frac{-u_+(z_1,0)\psi_-(z_1)+u_-(z_1,0)\psi_+(z_1)}{\psi_+(z_1)-\psi_-(z_1)}\quad \textit{для п. в.}\ (z_1,z_2)\in\Omega_{m_5}. \quad (10)$$

Доказательство. Подставим $\left(u_-^\varepsilon, u_+^\varepsilon, u_m^\varepsilon\right)$ в (6) в качестве тестовой. В результате получим следующую оценку:

$$\begin{gathered}
\left\|u_-^\varepsilon\right\|^2_{H^1_{\Gamma_D}(\Omega_-)} + \left\|u_+^\varepsilon\right\|^2_{H^1_{\Gamma_D}(\Omega_+)} + \left\|\frac{u_{m,2}^\varepsilon}{\varepsilon^{\frac{-N_1+1}{2}}}\right\|^2_{L_2(\Omega_{m_1})} + \left\|\frac{u_{m,1}^\varepsilon}{\varepsilon^{\frac{-N_1-1}{2}}}\right\|^2_{L_2(\Omega_{m_1})} \\
+ \left\|\frac{u_{m,2}^\varepsilon}{\varepsilon^{\frac{-N_2+1}{2}}}\right\|^2_{L_2(\Omega_{m_2})} + \left\|\varepsilon^{\frac{N_2+1}{2}} u_{m,1}^\varepsilon\right\|^2_{L_2(\Omega_{m_2})} + \left\|\varepsilon^{\frac{N_3-1}{2}} u_{m,2}^\varepsilon\right\|^2_{L_2(\Omega_{m_3})} + \left\|\varepsilon^{\frac{N_3+1}{2}} u_{m,1}^\varepsilon\right\|^2_{L_2(\Omega_{m_3})} + \\
+ \left\|\frac{u_{m,2}^\varepsilon}{\varepsilon}\right\|^2_{L_2(\Omega_{m_4})} + \left\|u_{m,1}^\varepsilon\right\|^2_{L_2(\Omega_{m_4})} + \left\|u_{m,2}^\varepsilon\right\|^2_{L_2(\Omega_{m_5})} + \left\|\varepsilon u_{m,1}^\varepsilon\right\|^2_{L_2(\Omega_{m_5})} \leqslant C, \quad (11)
\end{gathered}$$

где C — некоторая константа, не зависящая от ε.

Из (11), леммы 1 и определения множества K получаем

$$\|u_m^\varepsilon\|_{L_2(\Omega_{m_i})} \leqslant c, \quad i = 1, 2, 4, 5. \quad (12)$$

Неравенства (11) и (12) влекут существование функций $u_\pm \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega_\pm)$, $u_m \in L_2(\Omega_m)$, $p_i, q_j \in L_2(\Omega_{m_i})$, $i = 1, 2, 3, 4$, $j = 1, 2, 3, 5$, таких, что для некоторой подпоследовательности ε_n, $n \in \mathbb{N}$, по-прежнему обозначаемой ε, справедливы следующие сходимости при $\varepsilon \to 0$:

$$u_\pm^\varepsilon \to u_\pm \quad \text{слабо в} \quad H^1_{\Gamma_D}(\Omega_\pm), \quad u_m^\varepsilon \to u_m \quad \text{слабо в} \quad L_2(\Omega_{m_i}), \quad i = 1, 2, 4, 5, \quad (13)$$

$$\begin{gathered}
\frac{u_{m,2}^\varepsilon}{\varepsilon^{\frac{-N_1+1}{2}}} \to p_1 \text{ слабо в } L_2(\Omega_{m_1}), \quad \frac{u_{m,1}^\varepsilon}{\varepsilon^{\frac{-N_1-1}{2}}} \to q_1 \text{ слабо в } L_2(\Omega_{m_1}), \\
\frac{u_{m,2}^\varepsilon}{\varepsilon^{\frac{-N_2+1}{2}}} \to p_2 \text{ слабо в } L_2(\Omega_{m_2}), \quad \varepsilon^{\frac{N_2+1}{2}} u_{m,1}^\varepsilon \to q_2 \text{ слабо в } L_2(\Omega_{m_2}), \\
\varepsilon^{\frac{N_3-1}{2}} u_{m,2}^\varepsilon \to p_3 \text{ слабо в } L_2(\Omega_{m_3}), \quad \varepsilon^{\frac{N_3+1}{2}} u_{m,1}^\varepsilon \to q_3 \text{ слабо в } L_2(\Omega_{m_3}), \\
\frac{u_{m,2}^\varepsilon}{\varepsilon} \to p_4 \text{ слабо в } L_2(\Omega_{m_4}), \quad u_{m,1}^\varepsilon \to u_{m,1} \text{ слабо в } L_2(\Omega_{m_4}), \\
u_{m,2}^\varepsilon \to u_{m,2} \text{ слабо в } L_2(\Omega_{m_5}), \quad \varepsilon u_{m,1}^\varepsilon \to q_5 \text{ слабо в } L_2(\Omega_{m_5}).
\end{gathered} \quad (14)$$

Далее исследуем свойства предельных функций в (14). Очевидно, что

$$u_{m,1}^\varepsilon \to u_{m,1} = 0 \text{ сильно в } L_2(\Omega_{m_1}), \quad (15)$$

$$u_{m,2}^\varepsilon \to u_{m,2} = 0 \text{ сильно в } L_2(\Omega_{m_i}), \quad i = 1, 2, 4. \quad (16)$$

Покажем, что

$$u_m|_{S^\pm_{m_i}} = u_\pm|_{S_i}, \quad i = 1, 2, 4, 5. \quad (17)$$

Действительно, из доказательства теоремы разд. 4.3 в [28] можно заключить, что для любой функции $v_m \in L_2(\Omega_m)$ такой, что $v_{m,2} \in L_2(\Omega_m)$, определены линейные операторы следа на $S_\pm$. Откуда следует, что

$$u_m^\varepsilon\big|_{S^\pm_{m_i}} \to u_m|_{S^\pm_{m_i}} \text{ слабо в } L_2\big(S^\pm_{m_i}\big)$$

для $i = 1, 2, 4, 5$. В то же время в силу равенства $u_m^\varepsilon\big|_{S_\pm} = u_\pm^\varepsilon\big|_S$ (см. определение множества K) и сходимости

$$u_\pm^\varepsilon\big|_S \to u_\pm|_S \text{ сильно в } L_2(S)$$

получаем (17).

Условие (16) означает, что сужение функции u_m на область Ω_{m_i}, $i = 1, 2, 4$, не зависит от z_2. Откуда, с учётом (17), следует

$$u_-|_{S_i} = u_+|_{S_i}, \quad i = 1, 2, 4. \tag{18}$$

Наконец, условия (15) и (16) означают, что в области Ω_{m_1} функция u_m постоянна.

Возьмём теперь функцию $\varphi_m \in H^1(\Omega_m)$ такую, что $\varphi_m \in C_0^\infty(\Omega_{m_5})$, и подставим $(0, 0, \varphi_m) \in K$ в качестве тестовой в (7). После перехода к пределу при $\varepsilon \to 0$ получим

$$\int\limits_{\Omega_{m_5}} k_5 u_{m,2} \varphi_{m,2}\, dz = 0 \text{ для всех } \varphi_m \in C_0^\infty(\Omega_{m_5}).$$

Это означает, что существуют функции $\alpha(z_1)$ и $\beta(z_1)$ такие, что

$$u_m(z_1, z_2) = \alpha(z_1) z_2 + \beta(z_1) \text{ п. в. в } \Omega_{m_5}.$$

Из условия (17) получим

$$\alpha(z_1) = \frac{u_+(z_1, 0) - u_-(z_1, 0)}{\psi_+(z_1) - \psi_-(z_1)} \text{ п. в. в } \Omega_{m_5},$$
$$\beta(z_1) = \frac{-u_+(z_1, 0)\psi_-(z_1) + u_-(z_1, 0)\psi_+(z_1)}{\psi_+(z_1) - \psi_-(z_1)} \text{ п.в. в } \Omega_{m_5}.$$

Таким образом, формула (10) доказана. А из (16)–(18) следует справедливость формул (9).

Покажем, что

$$u_\pm|_{S_4} \in H^1(S_4). \tag{19}$$

Действительно, из (9) и условия $u_{m,1} \in L_2(\Omega_{m_4})$ получаем

$$\int\limits_{\Omega_{m_4}} |u_{\pm,1}(x_1, 0)|^2\, dx_1 dx_2 = (\psi_+(x_1) - \psi_-(x_1)) \int\limits_{S_4} |u_{\pm,1}(x_1, 0)|^2\, dx_1 < \infty.$$

Так как липшицевые функции $\psi_\pm$ строго положительны на $\overline{S}_4$ (см. условие (1)), то

$$\int\limits_{S_4} |u_{\pm,1}(x_1, 0)|^2\, dx_1 < \infty,$$

т. е. $u_{\pm,1}|_{S_4}$ принадлежит $L_2(S_4)$, что влечёт за собой (19).

Найдём теперь вариационное равенство, которому удовлетворяют предельные функции u_-, u_+, u_m в (14). Для этого возьмём пару $(v_-, v_+) \in (C^1(\Omega_-) \times C^1(\Omega_+)) \cap K_l$ и определим в Ω_m функцию v_m по формуле

$$v_m(z_1, z_2) = \frac{v_+(z_1, 0) - v_-(z_1, 0)}{\psi_+(z_1) - \psi_-(z_1)} z_2 + \frac{-v_+(z_1, 0)\psi_-(z_1) + v_-(z_1, 0)\psi_+(z_1)}{\psi_+(z_1) - \psi_-(z_1)}, \tag{20}$$

если $(z_1, z_2) \in \Omega_{m_3} \cup \Omega_{m_5}$, и

$$v_m(z_1, z_2) = v_+(z_1, 0) \tag{21}$$

иначе. (Напомним, что в этом случае $v_+(z_1, 0) = v_-(z_1, 0)$.)

Так как $\psi_\pm$ — липшицевы функции, то триплет (v_-, v_+, v_m) принадлежит множеству K и может быть подставлен в качестве тестовой функции в (6). Учитывая (14), после перехода к переделу при $\varepsilon \to 0$ получим следующее вариационное равенство для (u_-, u_+, u_m):

$$a_-(u_-,v_-)+a_+(u_+,v_+)+\int\limits_{\Omega_{m_4}} k_4 u_{m,1}v_{m,1}\,dz+\int\limits_{\Omega_{m_5}} k_5 u_{m,2}v_{m,2}\,dz$$
$$+\,l_-(v_-)+l_+(v_+)\ \text{для всех}\ (v_-,v_+)\in (C^1(\Omega_-)\times C^1(\Omega_+))\cap K_l. \quad (22)$$

Далее, в силу (9) и (21) имеет место цепочка равенств

$$\int\limits_{\Omega_{m_4}} u_{m,1}v_{m,1}\,dz=\int\limits_{S_4}\int\limits_{\psi_-(z_1)}^{\psi_+(z_1)} u_{+,1}(z_1,0)v_{+,1}(z_1,0)\,dz_2dz_1=\int\limits_{S_4}(\psi_- -\psi_+)u_{+,1}v_{+,1}\,dz_1,$$

а из (10) и (20) получим

$$\int\limits_{\Omega_{m_5}} u_{m,2}v_{m,2}\,dz=\int\limits_{S_5}\int\limits_{\psi_-(z_1)}^{\psi_+(z_1)} \frac{u_+(z_1,0)-u_-(z_1,0)}{\psi_+(z_1)-\psi_-(z_1)}\frac{v_+(z_1,0)-v_-(z_1,0)}{\psi_+(z_1)-\psi_-(z_1)}\,dz_2dz_1$$
$$=\int\limits_{S_5}\frac{(u_+-u_-)(v_+-v_-)}{\psi_+-\psi_-}\,dz_1.$$

Таким образом, получаем, что предельные функции u_- и u_+ удовлетворяют (8) для всех $(v_-,v_+)\in (C^1(\Omega_-)\times C^1(\Omega_+))\cap K_l$. При этом u_m определяется по формулам (9) и (10).

Из неравенства Пуанкаре, непрерывности оператора следа следует, что множество K_l является банаховым пространством с нормой

$$\|(v_-,v_+)\|^2_{K_l}=\int\limits_{\Omega_-}|\nabla v_-|^2\,dx+\int\limits_{\Omega_+}|\nabla v_+|^2\,dx+\int\limits_{S_4}|v_{+,1}|^2\,dx_2.$$

В силу того, что $(C^1(\Omega_-)\times C^1(\Omega_+))\cap K_l$ плотно в K_l по норме $\|\cdot\|_{K_l}$, получаем вариационное равенство (8) для всех пар $(v_-,v_+)\in K_l$.

Покажем, что (8) имеет единственное решение. Это будет означать сходимость в (14) справедлива не только для некоторой подпоследовательности, но и при $\varepsilon\to 0$. Во-первых, заметим, что из условия (1) следует, что существует константа $c_\psi>0$ такая, что $c_\psi\leqslant\psi_+-\psi_-\leqslant c_\psi^{-1}$ на $\overline{S}_4\cup\overline{S}_5$. Во-вторых, задача (8) эквивалентна следующей задаче минимизации: найти такую пару $(u_-,u_+)\in K_l$, что

$$\Pi(u_-,u_+)=\inf_{(v_-,v_+)\in K_l}\Pi(v_-,v_+), \quad (23)$$

где

$$\Pi(v_-,v_+)=\frac12\int\limits_{\Omega_-}k_0|\nabla v_-|^2\,dx-\int\limits_{\partial\Omega_-\cap\Gamma_N}gv_-\,ds+\frac12\int\limits_{\Omega_+}k_0|\nabla v_+|^2\,dx-\int\limits_{\partial\Omega_+\cap\Gamma_N}gv_+\,ds$$
$$+\frac12\int\limits_{S_4}k_4(\psi_+-\psi_-)|v_{+,1}|^2\,dx_1+\frac12\int\limits_{S_5}\frac{k_5|v_+-v_-|^2}{\psi_+-\psi_-}\,dx_1.$$

Чтобы доказать разрешимость задачи минимизации (23), достаточно установить коэрцитивность функционала Π, которая следует из неравенств Пуанкаре и Коши — Буняковского (см. [8, 9, 29], где рассматривалась аналогичная ситуация для моделей двумерной теории упругости). Единственность решения задачи (23) очевидна.

Покажем, что имеет место сильная сходимость в (14). Для этого подставим функции u_-^ε, u_+^ε и u_m^ε в (6) в качестве тестовых. После перехода к пределу при $\varepsilon \to 0$, учитывая (14), слабую полунепрерывность норм в пространствах $H^1_{\Gamma_D}(\Omega_\pm)$ и $L_2(\Omega_{m_i})$, $i = 1,2,3,4,5$, а также тот факт, что функции $u_\pm$ и u_m удовлетворяют вариационному равенству (22), получим, что

$$p_i = 0, \quad q_j = 0, \quad i = 1,2,3,4, \quad j = 1,2,3,5.$$

Снова подставляя u_-^ε, u_+^ε и u_m^ε в (6) и переходя к пределу в полученном тождестве, будем иметь сходимость норм для функций из (14) к нормам соответствующих пределов. Этот факт и слабая сходимость соответствующих последовательностей влекут за собой сильную сходимость в (14). Наконец, из сильной сходимости в (14) и леммы следует (13). Теорема доказана. $\square$

Задачу (8) перепишем в эквивалентном виде. Для этого определим подпространство $K_0 \subset H^1_{\Gamma_D}(\Omega \setminus (\overline{S}_3 \cup \overline{S}_5))$, где

$$K_0 = \bigl\{ v \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega \setminus (\overline{S}_3 \cup \overline{S}_5)) \mid v = \mathrm{const} \ \text{ на } S_1, \ v|_{S_4} \in H^1(S_4) \bigr\},$$

с нормой

$$\|v\|^2_{K_0} = \int\limits_{\Omega \setminus (\overline{S}_3 \cup \overline{S}_5)} \nabla v \nabla v \, dx + \int\limits_{S_4} v_{,1}^2 \, dx_2.$$

Тогда пара (u_-, u_+) является решением задачи (8) тогда и только тогда, когда функция $u \in K_0$, где

$$u(x_1,x_2) = \begin{cases} u_-(x_1,x_2), & (x_1,x_2) \in \Omega_-, \\ u_+(x_1,x_2), & (x_1,x_2) \in \Omega_+, \end{cases}$$

является решением следующего вариационного равенства:

$$\int\limits_{\Omega \setminus (\overline{S}_3 \cup \overline{S}_5)} k_0 \nabla u \nabla v \, dx + \int\limits_{S_4} k_4 (\psi_+ - \psi_-) u_{,1} v_{,1} \, dx_1 + \int\limits_{S_5} k_5 \frac{[u][v]}{\psi_+ - \psi_-} \, dx_1 = l(v) \ \text{ для всех } v \in K_0. \quad (24)$$

Здесь и далее через $[\cdot]$ обозначается скачок функции на соответствующей кривой (в данном случае на S_5).

4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В статье предложен метод асимптотического обоснования моделей упругих тел, содержащих тонкие включения. Метод основан на вариационных свойствах решения и позволяет с единой позиции одновременно построить все возможные случаи тонких включений в рамках модели антиплоского сдвига. А именно, множество S_1 моделирует тонкое жёсткое включение, на котором скачок перемещений равен нулю, в то время как скачок нормальных напряжений может быть отличен от нуля; множество S_2 моделирует идеальный контакт, при котором скачки перемещений и их нормальных производных равны нулю; множество S_3 соответствует трещине; множество S_4 моделирует тонкое упругое включение; множество S_5 моделирует трещину с адгезивным контактом берегов, т. е. нормальная производная перемещений на каждом из берегов S_5 пропорциональна скачку перемещений.

Ниже для наглядности рассмотрим каждый случай в отдельности и выпишем эквивалентные дифференциальные формулировки с полным набором краевых условий на включениях. Дифференциальные формулировки выводятся из соответствующих вариационных путём использования обобщённой формулы Грина и подстановкой выбранных должным образом тестовых функций. Мы опускаем детали вывода, отметим лишь, что подробности можно найти, например, в [30].

4.1. $N < -1$. Модель тонкого жёсткого включения в упругом теле

Пусть $S = S_1$. Тогда вариационная формулировка задачи о равновесии упругого тела с тонким жёстким включением будет иметь следующий вид: требуется найти такую функцию $u_1 \in K_1$, которая удовлетворяет вариационному равенству

$$\int\limits_{\Omega} k_0 \nabla u_1 \nabla v\, dx = \int\limits_{\Gamma_N} gv\, ds \text{ для всех } v \in K_1 = \big\{v \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega) \mid v = \text{const} \text{ на } S_1\big\}. \tag{25}$$

Если предположить, что функция u_1 обладает дополнительной гладкостью, то можно выписать для (25) эквивалентную дифференциальную постановку:

$$-k_0 \Delta u_1 = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \setminus \overline{S}_1,$$

$$u_1 = 0 \text{ на } \Gamma_D, \quad k_0 \frac{\partial u_1}{\partial \nu} = g \text{ на } \Gamma_N, \quad u_1 = \text{const} \text{ на } S_1, \quad \int\limits_{S_1} \left[\frac{\partial u_1}{\partial \nu}\right] ds = 0.$$

Отметим работы [2, 32–36], в которых рассматривались задачи о тонких жёстких включениях для краевых задач с оператором Лапласа. В работах [11, 14, 37, 38] изучались задачи теории упругости для тел с тонкими жёсткими включениями.

4.2. $N \in (-1, 1)$. Модель антиплоского сдвига однородного (без включений) тела

Пусть $S = S_2$. Тогда множество K_0 в (24) будет совпадать со всем пространством $H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$, и вариационная формулировка задачи о равновесии упругого тела будет иметь следующий вид: требуется найти такую функцию $u_2 \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$, которая удовлетворяет вариационному равенству

$$\int\limits_{\Omega} k_0 \nabla u_2 \nabla v\, dx = \int\limits_{\Gamma_N} gv\, ds \text{ для всех } v \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega). \tag{26}$$

Задача (26) описывает равновесие однородного упругого тела без каких либо включений в рамках модели антиплоского сдвига. При этом дифференциальная формулировка имеет известный вид (см., например, [20]):

$$-k_0 \Delta u_2 = 0 \text{ в } \Omega, \quad u_2 = 0 \text{ на } \Gamma_D, \quad k_0 \frac{\partial u_2}{\partial \nu} = g \text{ на } \Gamma_N.$$

4.3. $N > 1$. Модель упругого тела с трещиной

Пусть $S = S_3$. Тогда вариационная формулировка задачи о равновесии упругого тела с трещиной будет иметь следующий вид: требуется найти такую функцию $u_3 \in K_3$, которая удовлетворяет вариационному равенству

$$\int\limits_{\Omega} k_0 \nabla u_3 \nabla v\, dx = \int\limits_{\Gamma_N} gv\, ds \text{ для всех } v \in K_3 = \{v \in H^1(\Omega \setminus \overline{S}_3) \mid v = 0 \text{ на } \Gamma_D\}. \tag{27}$$

Дифференциальная постановка задачи (27) будет иметь вид

$$-k_0 \Delta u_3 = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \setminus \overline{S}_3,$$

$$u_3 = 0 \text{ на } \Gamma_D, \quad k_0 \frac{\partial u_3}{\partial \nu} = g \text{ на } \Gamma_N, \quad \frac{\partial u_3}{\partial \nu} = 0 \text{ на } S_3^n \cup S_3^p,$$

где S_3^n и S_3^p — положительный и отрицательный берега трещины S_3 соответственно, ν — внешняя единичная нормаль к $\partial\Omega \cup S_3$.

4.4. $N = -1$. Модель упругого тела с тонким упругим включением

В силу условия (1) нельзя формально положить $S = S_4$. Тем не менее, продолжив липшицевые функции $\psi_\pm$ до пересечения с осью абсцисс таким образом, чтобы выполнялись предположения разд. 1 настоящей статьи, в частности условия на интервалы I_1 и I_2, получим задачу, в которой $S_2 = I_1 \setminus \overline{S}_4$ и $k_2^\varepsilon = k_0$. Тогда после перехода к пределу при $\varepsilon \to 0$ будем иметь следующую вариационную задачу о равновесии упругого тела, содержащего тонкое упругое включение:

$$\int\limits_\Omega k_0 \nabla u_4 \nabla v \, dx + \int\limits_{S_4} k_4(\psi_+ - \psi_-) u_{4,1} v_{,1} \, dx_1 = \int\limits_{\Gamma_N} gv \, ds$$
$$\text{для всех} \quad v \in K_4 = \bigl\{ v \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega) \mid v|_{S_4} \in H^1(S_4) \bigr\}. \quad (28)$$

Применяя обобщённую формулу Грина, можно получить дифференциальную постановку задачи (28), которая имеет следующий вид:

$$-k_0 \Delta u_4 = 0 \text{ в } \Omega \setminus \overline{S}_4, \quad u_4 = 0 \text{ на } \Gamma_D, \quad k_0 \frac{\partial u_4}{\partial \nu} = g \text{ на } \Gamma_N,$$
$$-k_4\bigl((\psi_+ - \psi_-) u_{4,1}\bigr)_{,1} = k_0 \left[\frac{\partial u_4}{\partial \nu} \right] \text{ на } S_4, \quad u_{4,1} = 0 \text{ на } \partial S_4.$$

Такая модель возникает при описании упругих тел, содержащих нановолокна, на которых имеются поверхностные напряжения (см, например, [6, 12, 15, 39, 40]. Отметим также работы [7, 10, 16, 29, 41], в которых изучались нелинейные модели тонких упругих включений в упругих телах при наличии трещин отслоения.

4.5. $N = 1$. Модель упругого тела, содержащего трещину с адгезионным взаимодействием берегов

Так же, как и в п. 4.3, продолжим липшицевые функции $\psi_\pm$, определённые на S_5 таким образом, чтобы $\overline{S}_5 \subset I_1$ и выполнялись все условия разд. 1. Положив $S_2 = I_1 \setminus S_5$ и $k_2^\varepsilon = k_0$, после перехода к пределу при $\varepsilon \to 0$ получим следующую вариационную задачу о равновесии упругого тела с трещиной при наличии адгезионного контакта её берегов:

$$\int\limits_\Omega k_0 \nabla u_5 \nabla v \, dx + \int\limits_{S_5} k_5 \frac{[u_5][v]}{\psi_+ - \psi_-} \, dx_1 = \int\limits_{\Gamma_N} gv \, ds$$
$$\text{для всех} \quad v \in K_5 = \{ v \in H^1(\Omega \setminus \overline{S}_5) \mid v = 0 \text{ на } \Gamma_D \}. \quad (29)$$

Дифференциальная постановка задачи (29) будет следующей:

$$-k_0 \Delta u_5 = 0 \text{ в } \Omega \setminus \overline{S}_5, \quad u = 0 \text{ на } \Gamma_D, \quad k_0 \frac{\partial u_5}{\partial \nu} = g \text{ на } \Gamma_N,$$
$$k_0 \frac{\partial u_5}{\partial \nu} = k_5 \frac{[u_5]}{\psi_+ - \psi_-} \text{ на } S_5^n \cup S_5^p,$$

где S_5^n и S_5^p — положительный и отрицательный берега трещины S_5, соответственно, ν — внешняя единичная нормаль к $\partial\Omega \cup S_3$.

Задачи такого рода широко исследовались в работах [9, 10, 13, 42, 43] для моделей упругих тел с трещинами, в том числе в рамках модели антиплоского сдвига [12, 44, 45], а также в [1, 3–5, 46] для задач о склейки упругих тел.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Benveniste Y., Miloh T.* Imperfect soft and stiff interfaces in two-dimensional elasticity // Mech. Mater. 2001. V. 33. P. 309–323.
2. *Caillerie D., Nedelec J. C.* The effect of a thin inclusion of high rigidity in an elastic body // Math. Meth. Appl. Sci. 1980. V. 2, N 3. P. 251–270.
3. *Dumont S., Lebon F., Rizzoni R.* Imperfect interfaces with graded materials and unilateral conditions: theoretical and numerical study // Math. Mech. Solids. 2018. V. 23, N 3. P. 445–460.
4. *Geymonat G., Krasucki F., Lenci S.* Mathematical analysis of a bonded joint with a soft thin adhesive // Math. Mech. Solids. 1999. V. 4, N 2. P. 201–225.
5. *Serpilli M., Rizzoni R., Lebon F., Dumont S.* An asymptotic derivation of a general imperfect interface law for linear multiphysics composites // Internat. J. Solids Structures. 2019. V. 180–181. P. 97–107.
6. *Zemlyanova A. Y., Mogilevskaya S. G.* Circular inhomogeneity with Steigmann-Ogden interface: Local fields, neutrality, and Maxwell's type approximation formula // Internat. J. Solids Structures. 2018. V. 135. P. 85–98.
7. *Shcherbakov V. V.* The Griffith formula and J-integral for elastic bodies with Timoshenko inclusions // Z. Angew. Math. Mech. 2016. V. 96, N 11. P. 1306–1317.
8. *Khludnev A. M.* Asymptotics of anisotropic weakly curved inclusions in an elastic body // J. Appl. Indust. Math. 2017. V. 11. P. 88–98.
9. *Khludnev A.* On modeling elastic bodies with defects // Siber. Electronic Math. Reports. 2018. V. 15. P. 153–166.
10. *Khludnev A.* On thin Timoshenko inclusions in elastic bodies with defects // Arch. Appl. Mechanics. 2019. V. 89, N 8. P. 1691–1704.
11. *Rudoy E.* On numerical solving a rigid inclusions problem in 2D elasticity // Z. Angew. Math. Mech. 2017. V. 68. P. 19.
12. *Baranova S., Mogilevskaya S. G., Mantič V., Jiménez-Alfaro S.* Analysis of the antiplane problem with an embedded zero thickness layer described by the Gurtin-Murdoch Model // J. Elasticity. 2020. V. 140, N 2. P. 171–195.
13. *Furtsev A., Itou H., Rudoy E.* Modeling of bonded elastic structures by a variational method: Theoretical analysis and numerical simulation // Internat. J. Solids Structures. 2020. V. 182–183. P. 100–110.
14. *Rudoy E. M.* Numerical solution of an equilibrium problem for an elastic body with a thin delaminated rigid inclusion // J. Appl. Indust. Math. 2016. V. 10, N 2. P. 264–276.
15. *Rudoy E. M., Lazarev N. P.* Domain decomposition technique for a model of an elastic body reinforced by a Timoshenko's beam // J. Comput. Appl. Math. 2018. V. 334, N 5. P. 18–26.
16. *Казаринов Н. А., Рудой Е. М., Слесаренко В. Ю., Щербаков В. В.* Математическое и численное моделирование равновесия упругого тела, армированного тонким упругим включением // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2018. Т. 58, № 5. С. 790–805.
17. *Rudoy E. M.* Domain decomposition method for a model crack problem with a possible contact of crack edges // Comput. Math. Math. Phys. 2015. V. 55, N 2. P. 305–316.
18. *Hintermüller M., Kovtunenko V., Kunisch K.* The primal-dual active set method for a crack problem with non-penetration // J. Appl. Math. 2004. V. 69. P. 1–26.
19. *Vtorushin E. V.* Numerical investigation of a model problem for the Poisson equation with inequality constraints in a domain with a cut // J. Appl. Indust. Math. 2008. V. 2, N 1. P. 143–150.
20. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твёрдого тела. М.: Наука, 1988.

21. *Ang W. T., Clements D. L.* On some crack problems for inhomogeneous elastic materials // Internat. J. Solids Structures. 1987. V. 23, N 8. P. 1089–1104.

22. *Chinchaladze N.* On a vibration problem of antiplane strain (shear) of orthotropic non-homogeneous prismatic shell-like bodies // Complex Var. Elliptic Equ. 2018. V. 63, N 6. P. 886–895.

23. *Clements D. L.* On a displacement based solution to an antiplane crack problem for inhomogeneous anisotropic elastic materials // J. Elasticity. 2011. V. 103, N 2. P. 137–152.

24. *Nečas J.* Direct Methods in the Theory of Elliptic Equations. Berlin: Springer-Verl., 2012.

25. *Maz'ya V. G., Poborchi S. V.* Differentiable Functions on Bad Domains. World Sci. Publ., 1998.

26. *Rudoy E. M.* Asymptotic modelling of bonded plates by a soft thin adhesive layer // Siber. Elect. Math. Reports. 2020. V. 17. P. 615–625.

27. *Furtsev A., Rudoy E.* Variational approach to modeling soft and stiff interfaces in the Kirchhoff—Love theory of plates // Internat. J. Solids Struct. 2020. V. 202. P. 562–574.

28. *Эванс Л. К., Гариепи Р. Ф.* Теория меры и тонкие свойства функций. Новосибирск: Научн. книга, 2002.

29. *Itou H., Khludnev A. M.* On delaminated thin Timoshenko inclusions inside elastic bodies // Math. Meth. Appl. Sci. 2016. V. 39, N 17. P. 4980–4993.

30. *Хлуднев А. М.* Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010.

31. *Dal Corso F., Shahzad S., Bigoni D.* Isotoxal star-shaped polygonal voids and rigid inclusions in nonuniform antiplane shear fields. Pt. I: Formulation and full-field solution // Internat. J. Solids Structures. 2018. V. 85–86. P. 67–75.

32. *Dal Corso F., Shahzad S., Bigoni D.* Isotoxal star-shaped polygonal voids and rigid inclusions in nonuniform antiplane shear fields. Part II: Singularities, annihilation and invisibility // Internat. J. Solids Structures. 2018. V. 85-86. P. 76–88.

33. *Рудой Е. М.* Численное решение задачи о равновесии мембраны с жёсткими включениями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2016. Т. 56, № 3. С. 455–464.

34. *Симоненко И. Б.* Задачи электростатики в неоднородной среде. Случай тонкого диэлектрика с большой диэлектрической постоянной. I // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10, № 2. С. 301–309.

35. *Симоненко И. Б.* Задачи электростатики в неоднородной среде. Случай тонкого диэлектрика с большой диэлектрической постоянной. II // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11, № 10. С. 1870–1878.

36. *Simonenko I. B.* Limit problem in thermal conductivity in a nonhomogeneous medium // Siber. Math. J. 1975. V. 16, N 6. P. 991–998.

37. *Lazarev N., Itou H.* Optimal location of a rigid inclusion in equilibrium problems for inhomogeneous Kirchhoff—Love plates with a crack // Math. Mech. Solids. 2019. V. 24, N 12. P. 3743–3752.

38. *Rudoy E. M., Shcherbakov V. V.* Domain decomposition method for a membrane with a delaminated thin rigid inclusion // Siber. Elect. Math. Reports. 2016. V. 13. P. 395–410.

39. *Gurtin M. E., Murdoch A. I.* A continuum theory of elastic material surfaces // Arch. Rat. Mech. Analysis. 1975. V. 57, N 4. P. 291–323.

40. *Eremeyev V. A.* On effective properties of materials at the nano- and microscales considering surface effects // Acta Mechanica. 2016. V. 227, N 1. P. 29–42.

41. *Khludnev A. M., Shcherbakov V. V.* Singular path-independent energy integrals for elastic bodies with Euler—Bernoulli inclusions // Math. Mech. Solids. 2017. V. 22, N 11. P. 2180–2195.

42. *Khludnev A. M.* On thin inclusions in elastic bodies with defects // Z. Angew. Math. Mech. 2019. V. 70, N 2. Paper 45.

43. *Furtsev A. I.* A contact problem for a plate and a beam in presence of adhesion // J. Appl. Indust. Math. 2019. V. 13, N 2. P. 208–218.

44. *Luo J., Wang X.* On the anti-plane shear of an elliptic nano inhomogeneity // Eur. J. Mech. A. Solids. 2009. V. 28. P. 926–934.

45. *Dai M., Schiavone P., Gao C.* Prediction of the stress field and effective shear modulus of composites containing periodic inclusions incorporating interface effects in anti-plane shear // J. Elasticity. 2016. V. 125, N 2. P. 217–230.

46. *Serpilli M.* On modeling interfaces in linear micropolar composites // Math. Mech. Solids. 2018. V. 23, N 4. P. 667–685.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 517.951:539.37

ASYMPTOTIC JUSTIFICATION OF THE MODELS OF THIN INCLUSIONS IN AN ELASTIC BODY IN THE ANTIPLANE SHEAR PROBLEM

© 2021 **E. M. Rudoy**[1,2a], **H. Itou**[3b], **N. P. Lazarev**[4c]

[1]*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS,*
pr. Akad. Lavrentyeva 15, Novosibirsk 630090, Russia,
[2]*Novosibirsk State University, ul. Pirogova 1, Novosibirsk 630090, Russia,*
[3]*Tokyo University of Science, Kagurazaka 1-3, Shinjuku-ku, Tokyo 162-8601, Japan,*
[4]*North-Eastern Federal University, ul. Kulakovskogo 48, Yakutsk 677000, Russia*

E-mails: [a]rem@hydro.nsc.ru, [b]h-itou@rs.tus.ac.jp, [c]nyurgun@ngs.ru

Received 20.07.2020, revised 26.10.2020, accepted 28.12.2020

Abstract. The equilibrium problem for an elastic body having an inhomogeneous inclusion with curvilinear boundaries is considered within the framework of antiplane shear. We assume that there is a power-law dependence of the shear modulus of the inclusion on a small parameter characterizing its width. We justify passage to the limit as the parameter vanishes and construct an asymptotic model of an elastic body containing a thin inclusion. We also show that, depending on the exponent of the parameter, there are the five types of thin inclusions: crack, rigid inclusion, ideal contact, elastic inclusion, and a crack with adhesive interaction of the faces. The strong convergence is established of the family of solutions of the original problem to the solution of the limiting one.

Keywords: asymptotic analysis, antiplane shear, inhomogeneous elastic body, thin rigid inclusion, thin elastic inclusion, crack.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.108

REFERENCES

1. Benveniste Y., Miloh T. Imperfect soft and stiff interfaces in two-dimensional elasticity. *Mech. Mater.*, 2001, Vol. 33, pp. 309–323.
2. Caillerie D., Nedelec J.C. The effect of a thin inclusion of high rigidity in an elastic body. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 1980, Vol. 2, No. 3, pp. 251–270.
3. Dumont S., Lebon F., Rizzoni R. Imperfect interfaces with graded materials and unilateral conditions: theoretical and numerical study. *Math. Mech. Solids*, 2018, Vol. 23, No. 3, pp. 445–460.
4. Geymonat G., Krasucki F., Lenci S. Mathematical analysis of a bonded joint with a soft thin adhesive. *Math. Mech. Solids*, 1999, Vol. 4, No. 2, pp. 201–225.
5. Serpilli M., Rizzoni R., Lebon F., Dumont S. An asymptotic derivation of a general imperfect interface law for linear multiphysics composites. *Internat. J. Solids Structures*, 2019, Vol. 180–181, pp. 97–107.
6. Zemlyanova A.Y., Mogilevskaya S.G. Circular inhomogeneity with Steigmann-Ogden interface: Local fields, neutrality, and Maxwell's type approximation formula. *Internat. J. Solids Structures*, 2018, Vol. 135, pp. 85–98.
7. Shcherbakov V.V. The Griffith formula and J-integral for elastic bodies with Timoshenko inclusions. *Z. Angew. Math. Mech.*, 2016, Vol. 96, No. 11, pp. 1306–1317.

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2021, Vol. 15, No. 1, pp. 129–140; DOI: 10.1134/S1990478921010117

8. Khludnev A.M. Asymptotics of anisotropic weakly curved inclusions in an elastic body. *J. Appl. Indust. Math.*, 2017, Vol. 11, pp. 88–98.

9. Khludnev A. On modeling elastic bodies with defects. *Siberian Electronic Math. Reports*, 2018, Vol. 15, pp. 153–166.

10. Khludnev A. On thin Timoshenko inclusions in elastic bodies with defects. *Arch. Appl. Mechanics*, 2019, Vol. 89, No. 8, pp. 1691–1704.

11. Rudoy E. On numerical solving a rigid inclusions problem in 2D elasticity // *Z. Angew. Math. Mech.*, 2017. V. 68. P. 19.

12. Baranova S., Mogilevskaya S.G., Mantič V., Jiménez-Alfaro S. Analysis of the antiplane problem with an embedded zero thickness layer described by the Gurtin—Murdoch Model. *J. Elasticity*, 2020. V. 140, N 2. P. 171–195.

13. Furtsev A., Itou H., Rudoy E. Modeling of bonded elastic structures by a variational method: Theoretical analysis and numerical simulation. *Internat. J. Solids Structures*, 2020, Vol. 182–183, pp. 100–110.

14. Rudoy E.M. Numerical solution of an equilibrium problem for an elastic body with a thin delaminated rigid inclusion. *J. Appl. Indust. Math.*, 2016, Vol. 10, No. 2, pp. 264–276.

15. Rudoy E.M., Lazarev N.P. Domain decomposition technique for a model of an elastic body reinforced by a Timoshenko's beam. *J. Comput. Appl. Math.*, 2018, Vol. 334, No. 5, pp. 18–26.

16. Kazarinov N.A., Rudoi E.M., Slesarenko V.Yu., Shcherbakov V.V. Mathematical and numerical simulation of equilibrium of an elastic body reinforced by a thin elastic inclusion. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2018, Vol. 58, No. 5, pp. 761–774 (in Russian).

17. Rudoy E.M. Domain decomposition method for a model crack problem with a possible contact of crack edges. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2015, Vol. 55, No. 2, pp. 305–316.

18. Hintermüller M., Kovtunenko V., Kunisch K. The primal-dual active set method for a crack problem with non-penetration. *J. Appl. Math.*, 2004, Vol. 69, pp. 1–26.

19. Vtorushin E.V. Numerical investigation of a model problem for the Poisson equation with inequality constraints in a domain with a cut. *J. Appl. Indust. Math.*, 2008, Vol. 2, No. 1, pp. 143–150.

20. Rabotnov Yu.N. Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela [Mechanics of Deformable Solid Body]. Moscow: Nauka, 1988 (in Russian).

21. Ang W.T., Clements D.L. On some crack problems for inhomogeneous elastic materials. *Internat. J. Solids Structures*, 1987, Vol. 23, No. 8, pp. 1089–1104.

22. Chinchaladze N. On a vibration problem of antiplane strain (shear) of orthotropic non-homogeneous prismatic shell-like bodies. *Complex Var. Elliptic Equ.*, 2018, Vol. 63, No. 6, pp. 886–895.

23. Clements D.L. On a displacement based solution to an antiplane crack problem for inhomogeneous anisotropic elastic materials. *J. Elasticity*, 2011, Vol. 103, No. 2, pp. 137–152.

24. Nečas J. Direct Methods in the Theory of Elliptic Equations. Berlin: Springer-Verl., 2012.

25. Maz'ya V.G., Poborchi S.V. Differentiable Functions on Bad Domains. World Sci. Publ., 1998.

26. Rudoy E.M. Asymptotic modelling of bonded plates by a soft thin adhesive layer. *Siber. Elect. Math. Reports*, 2020, Vol. 17, pp. 615–625.

27. Furtsev A., Rudoy E. Variational approach to modeling soft and stiff interfaces in the Kirchhoff—Love theory of plates. *Internat. J. Solids Structures*, 2020, Vol. 202, pp. 562–574.

28. Evans L. K., Gariepi R. F. Teoriya mery i tonkie svoistva funktsii [Measure theory and fine properties of functions]. Novosibirsk: Nauchn. kniga, 2002 (in Russian).

29. Itou H., Khludnev A. M. On delaminated thin Timoshenko inclusions inside elastic bodies. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2016, Vol. 39, No. 17, pp. 4980–4993.

30. Khludnev A.M. Zadachi teorii uprugosti v negladkikh oblastyakh [Elasticity problems in nonsmooth domains]. Moscow: Fizmatlit, 2010 (in Russian).

31. Dal Corso F., Shahzad S., Bigoni D. Isotoxal star-shaped polygonal voids and rigid inclusions in nonuniform antiplane shear fields. Pt. I: Formulation and full-field solution. *Internat. J. Solids Structures*, 2018, Vol. 85–86, pp. 67–75.

32. Dal Corso F., Shahzad S., Bigoni D. Isotoxal star-shaped polygonal voids and rigid inclusions in nonuniform antiplane shear fields. Part II: Singularities, annihilation and invisibility. *Internat. J. Solids Structures*, 2018, Vol. 85-86, pp. 76–88.

33. Rudoi E. M. Numerical solution of the equilibrium problem for a membrane with embedded rigid inclusions. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2016, Vol. 56, No. 3, pp. 450–459 (in Russian).

34. Simonenko I.B. Zadachi elektrostatiki v neodnorodnoi srede. Sluchai tonkogo dielektrika s bol'shoi dielektricheskoi postoyannoi. Part I. *Differents. Uravneniya*, 1974, Vol. 10, No. 2, pp. 301–309 (in Russian).

35. Simonenko I.B. Problems of electrostatics in a nonhomogeneous medium. The case of a thin dielectric with a high dielectric constant. Part II. *Differents. Uravneniya*, 1975, Vol. 11, No. 10, pp. 1870–1878 (in Russian).

36. Simonenko I.B. Limit problem in thermal conductivity in a nonhomogeneous medium. *Siber. Math. J.*, 1975, Vol. 16, No. 6, pp. 991–998.

37. Lazarev N., Itou H. Optimal location of a rigid inclusion in equilibrium problems for inhomogeneous Kirchhoff—Love plates with a crack. *Math. Mech. Solids*, 2019, Vol. 24, No. 12, pp. 3743–3752.

38. Rudoy E.M., Shcherbakov V.V. Domain decomposition method for a membrane with a delaminated thin rigid inclusion. *Siberian Elect. Math. Reports*, 2016, Vol. 13, pp. 395–410.

39. Gurtin M. E., Murdoch A. I. A continuum theory of elastic material surfaces. *Arch. Rat. Mech. Analysis*, 1975, Vol. 57, No. 4, pp. 291–323.

40. Eremeyev V.A. On effective properties of materials at the nano- and microscales considering surface effects. *Acta Mechanica*, 2016, Vol. 227, No. 1, pp. 29–42.

41. Khludnev A.M., Shcherbakov V.V. Singular path-independent energy integrals for elastic bodies with Euler—Bernoulli inclusions. *Math. Mech. Solids*, 2017, Vol. 22, No. 11, pp. 2180–2195.

42. Khludnev A.M. On thin inclusions in elastic bodies with defects. *Z. Angew. Math. Mech.*, 2019, Vol. 70, No. 2, paper 45.

43. Furtsev A.I. A contact problem for a plate and a beam in presence of adhesion. *J. Appl. Indust. Math.*, 2019, Vol. 13, No. 2, pp. 208–218.

44. Luo J., Wang X. On the anti-plane shear of an elliptic nano inhomogeneity. *Eur. J. Mech. A. Solids*, 2009, Vol. 28, pp. 926–934.

45. Dai M., Schiavone P., Gao C. Prediction of the stress field and effective shear modulus of composites containing periodic inclusions incorporating interface effects in anti-plane shear. *J. Elasticity*, 2016, Vol. 125, No. 2, pp. 217–230.

46. Serpilli M. On modeling interfaces in linear micropolar composites. *Math. Mech. Solids*, 2018, Vol. 23, No. 4, pp. 667–685.