УДК 539.30

ОБ УПРУГОМ КРУЧЕНИИ ВОКРУГ ТРЁХ ОСЕЙ

© 2021 **С. И. Сенашов**[a], **И. Л. Савостьянова**[b]

Сибирский государственный университет науки и технологий им. М. Ф. Решетнёва, просп. Красноярский рабочий, 31, г. Красноярск 660037, Россия

E-mails: [a]sen@sibsau.ru, [b]ruppa@inbox.ru

Поступила в редакцию 10.07.2020 г.; после доработки 10.07.2020 г.;
принята к публикации 15.10.2020 г.

Рассмотрены уравнения нелинейной теории упругости в предположении, что компоненты вектора деформаций зависят только от двух пространственных координат, каждая от двух своих координат. В результате получена система трёх дифференциальных уравнений на три касательных компоненты тензора напряжений. Построенная система может быть использована для описания упругого кручения параллелепипеда вокруг трёх ортогональных осей. Показано, что решение этой задачи в напряжениях зависит от трёх произвольных функций, каждая из которых зависит только от двух пространственных переменных.

Ключевые слова: теория нелинейной упругости, кручение, точные решения.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.109

В линейной теории упругости в силу линейности дифференциальных уравнений, построено достаточно много точных решений. Их можно найти, например, в [1, 2] и цитируемой там литературе. Эти решения, как правило, обладают одним недостатком: их трудно использовать для описания упругого состояния тел конечных размеров. В предлагаемой работе построено решение, описывающее кручение параллелепипеда конечного размера вокруг трёх ортогональных осей, причём рассмотрен не только случай линейной теории упругости, но и случай нелинейной упругости.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Приведём систему уравнений нелинейной упругости, которая может быть решена только в компонентах тензора напряжений. Эта система может быть использована для описания упругого напряжённого состояния параллелепипеда, скручиваемого вокруг трёх ортогональных осей.

Пусть $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$ — ортогональная система координат, u, v, w — компоненты вектора деформаций, ε_{ij} — компоненты тензора деформации, σ_{ij} — компоненты тензора напряжений. В стационарном случае, а только он и будет рассмотрен, компоненты тензора напряжений удовлетворяют уравнениям равновесия

$$\partial_i \sigma_{ij} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3. \tag{1}$$

По повторяющимся индексам предполагается суммирование. Компоненты тензора напряжений и тензор деформации связаны обобщённым законом Гука

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{ii} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \tag{2}$$

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки России в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (соглашение № 075-02-2020-1631).

где δ_{ij} — символ Кронекера, $\lambda(I_1, I_2)$, $\mu(I_1, I_2)$ — некоторые заданные неотрицательные функции, которые зависят от первого и второго инвариантов тензора деформации $I_1 = \varepsilon_{ii}$, $I_2 = (\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij})^{1/2}$. Предполагается, что функции $\lambda(I_1, I_2)$, $\mu(I_1, I_2)$ удовлетворяют всем условиям, которые обычно налагаются на эти величины.

Будем искать решения системы (1), описывающие кручение параллелепипеда.

2. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ (1)

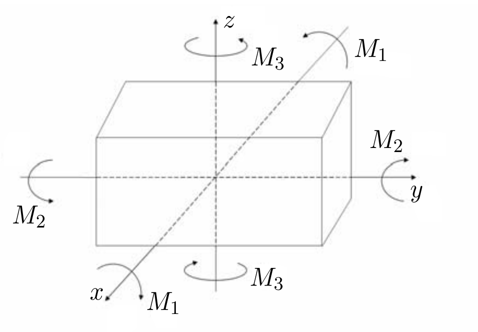
Потребуем, чтобы компоненты вектора деформации имели следующий вид:

$$u = u(y, z), \quad v = v(x, z), \quad w = w(x, y). \tag{3}$$

Подставляя (3) в (1) и (2), получим систему уравнений, соответствующую полю деформаций (3). В результате система, которая и будет исследоваться в этой работе, имеет вид

$$F_1 = \partial_y \tau^1 + \partial_z \tau^2 = 0, \quad F_2 = \partial_x \tau^1 + \partial_z \tau^3 = 0, \quad F_3 = \partial_x \tau^2 + \partial_y \tau^3 = 0. \tag{4}$$

Здесь для удобства введены обозначения $\sigma_{12} = \tau^1$, $\sigma_{13} = \tau^2, \sigma_{23} = \tau^3$. Система уравнений (4) может быть использована, в частности, для описания кручения прямоугольного параллелограмма находящегося в упругом состоянии, вокруг трёх осей (см. рисунок).



Кручение параллелепипеда вокруг трёх осей

Предположим, что параллелепипед закручивается вокруг осей Ox, Oy, Oz равными и противоположными парами сил с моментами M_1, M_2, M_3. При этом предполагается, что параллелепипед закручивается, находясь в упругом состоянии. Из системы (4) видно, что такая задача является статически определимой и может служить для определения значения моментов, которые задаются формулами

$$M_1 = \iint (y\tau^2 - z\tau^1)\, dydz, \quad M_2 = \iint (z\tau^1 - x\tau^3)\, dxdz, \quad M_3 = \iint (x\tau^3 - y\tau^2)\, dydx. \tag{5}$$

Изучим некоторые свойства системы (4). Из (4) получаем

$$\partial^2_{xy}\tau^1 + \partial^2_{xz}\tau^2 = 0, \partial^2_{xy}\tau^1 + \partial^2_{zy}\tau^3 = 0, \partial^2_{zx}\tau^2 + \partial^2_{zy}\tau^3 = 0. \tag{6}$$

Система (6) есть система трёх линейных однородных уравнений с тремя неизвестными. Поскольку её определитель отличен от нуля, получаем

$$\partial^2_{xy}\tau^1 = 0, \quad \partial^2_{xz}\tau^2 = 0, \quad \partial^2_{yz}\tau^3 = 0. \tag{7}$$

Из (7) имеем

$$\tau^1 = g_1(x, z) + f_1(y, z), \tau^2 = h_1(x, y) + f_2(y, z), \tau^3 = h_2(x, y) + g_2(x, z), \tag{8}$$

где $g_i(x,z)$, $f_i(y,z)$, $h_i(x,y)$, $i=1,2$, — произвольные гладкие функции, связанные уравнениями (4). Подставляя соотношения (8) в уравнения (4), получим

$$\partial_y f_1(y,z)+\partial_z f_2(y,z)=0,\quad \partial_x g_1(x,z)+\partial_y g_2(x,z)=0,\quad \partial_x h_1(x,y)+\partial_y h_2(x,y)=0.$$

Введём функции F, G, H по следующим формулам:

$$f_1(y,z)=\partial_z F,\quad f_2(y,z)=-\partial_y F,$$
$$g_1(x,z)=\partial_z G,\quad g_2(x,z)=-\partial_x G,\quad h_1(x,y)=\partial_y H,\quad h_2(x,y)=-\partial_x H.$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned}\tau^1&=g_1(x,z)+f_1(y,z)=\partial_z G+\partial_z F,\\ \tau^2&=h_1(x,y)+f_2(y,z)=\partial_y H-\partial_y F,\\ \tau^3&=h_2(x,y)+g_2(x,z)=-\partial_x H+\partial_x G.\end{aligned}\tag{9}$$

В результате получаем, что касательные компоненты тензора напряжений зависят от трёх произвольных функций $F(y,z)$, $G(x,z)$, $H(x,y)$. Задавая эти функции, мы можем определить моменты по формулам (5), которые скручивают параллелепипед вокруг трёх осей.

3. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ СИСТЕМЫ (4)

Уравнение характеристической поверхности системы уравнений (4) представим в виде

$$\psi=\psi(x,y,z)=0.\tag{10}$$

Характеристические поверхности системы (6) находятся из определителя

$$\begin{vmatrix}\partial_y\psi & \partial_z\psi & 0\\ \partial_x\psi & 0 & \partial_z\psi\\ 0 & \partial_x\psi & \partial_y\psi\end{vmatrix}=-2\partial_x\psi\partial_y\psi\partial_z\psi=0.\tag{11}$$

Отсюда следует, что характеристические поверхности могут быть одним из следующих трёх видов:

$$\psi=\psi_1(x,y),\quad \psi=\psi_2(x,z),\quad \psi=\psi_3(y,z).$$

Следовательно, грани параллелепипеда на рисунке являются характеристическими поверхностями системы (4).

4. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ СИСТЕМЫ (4)

Законом сохранения системы уравнений (4) назовём выражение вида

$$\partial_x A+\partial_y B+\partial_z C=\omega_1F_1+\omega_2F_3+\omega_3F_3,\tag{12}$$

где A, B, C — искомые функции от x, y, z, τ^1, τ^2, τ^3. Здесь ω_i — некоторые функции, которые одновременно не обращаются тождественно в нуль. Величины A, B, C называются компонентами сохраняющегося тока.

Раскрывая соотношение (12), получаем

$$A=\alpha^1\tau^1+\beta^1\tau^2+\gamma^1\tau^3,\quad B=\alpha^2\tau^1+\beta^2\tau^2+\gamma^2\tau^3,\quad C=\alpha^3\tau^1+\beta^3\tau^2+\gamma^3\tau^3.$$

Здесь α^i, β^i, γ^i — функции только от x, y, z.

Из уравнений (12) получаем

$$\begin{gathered}\alpha^1 = \gamma^3, \beta^1 = \gamma^2, \quad \alpha^2 = \beta^3, \quad \alpha^3 = \beta^2 = \gamma^1 = 0, \\ \partial_x \alpha^1 + \partial_y \beta^3 = 0, \quad \partial_x \beta^1 + \partial_z \alpha^2 = 0, \quad \partial_y \gamma^2 + \partial_z \alpha^1 = 0.\end{gathered} \tag{13}$$

Из формулы (13) получаем

$$\alpha^1 = a^1(x,y) + a^2(y,z), \quad \beta^1 = b^1(x,z) + b^2(y,z), \quad \alpha^2 = c^1(x,y) + c^2(x,z).$$

Здесь функции $a^1(x,y)$, $a^2(y,z)$, $b^1(x,z)$, $b^2(y,z)$, $c^1(x,y)$, $c^2(x,z)$ — произвольные гладкие функции двух переменных.

В силу уравнений (13) получаем следующие соотношения между этими функциями:

$$\begin{gathered}\alpha^1 = \partial_y h(x,y), \quad \gamma^1 = -\partial_x h(x,y), \quad \beta^1 = \partial_z g(x,z), \\ \gamma^2 = -\partial_x g(x,z), \quad \alpha^2 = -\partial_y f(y,z), \quad \beta^2 = \partial_z f(y,z).\end{gathered}$$

Окончательно получаем вид сохраняющегося тока:

$$\begin{aligned}A &= (\partial_y h(x,y) - \partial_y f(y,z))\tau^1 + (\partial_z g(x,z) + \partial_z f(y,z))\tau^2, \\ B &= (-\partial_x h(x,y) - \partial_x g(x,z))\tau^1 + (\partial_z g(x,z) + \partial_z f(y,z)\tau^3, \\ C &= (-\partial_x h(x,y) - \partial_x g(x,z))\tau^2 + (\partial_y h(x,y) - \partial_y f(y,z))\tau^3.\end{aligned} \tag{14}$$

Здесь f, g, h — произвольные гладкие функции. В частности, если положить $f = F$, $g = G$, $h = H$, то получаем следующий закон сохранения: $\partial_x(\tau^1\tau^2) + \partial_y(\tau^1\tau^3) + \partial_z(\tau^2\tau^3) = 0$.

Показано, что система уравнений (4) допускает бесконечную серию законов сохранения вида (14). Более подробно с построением и использованием законов сохранения в механике можно ознакомиться в [3].

5. ДЕФОРМАЦИИ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ НАПРЯЖЁННОМУ СОСТОЯНИЮ (9)

Ранее мы нашли решение системы (4) в терминах компонент тензора напряжений. Теперь решим эту же систему в терминах трёх компонент вектора деформации. Имеем три уравнения

$$\tau^1 = \mu\varepsilon_{12}, \quad \tau^2 = \mu\varepsilon_{13}, \quad \tau^3 = \mu\varepsilon_{23}, \tag{15}$$

где

$$2\varepsilon_{12} = \partial_y u + \partial_x v, \quad 2\varepsilon_{13} = \partial_z u + \partial_x w, \quad 2\varepsilon_{23} = \partial_z v + \partial_y w. \tag{16}$$

Предположим, что $\lambda(I_1, I_2)$ по-прежнему есть функция двух инвариантов, а $\mu(I_1, I_2) = \mathrm{const}$. Тогда система уравнений (4) в предположении, что выполнены условия (3), в компонентах вектора деформации сводится к трём уравнениям Лапласа:

$$\partial_{yy} v + \partial_{zz} v = 0, \quad \partial_{xx} u + \partial_{zz} u = 0, \quad \partial_{xx} w + \partial_{yy} w = 0. \tag{17}$$

Показано, что компоненты вектора деформации являются гармоническими функциями. Решения системы уравнений (17) можно использовать для описания деформированного состояния параллелепипеда, скручиваемого вокруг трёх ортогональных осей. Для этого следует восстановить компоненты тензора напряжений по формулам (15). Поскольку $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 0$, то дилатация (изменение объёма) равна нулю. Решение уравнений (17) описывает вихревое перемещение, которое характеризуется вектором $\bar{\omega}$:

$$\bar{\omega} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ u & v & w \end{pmatrix}.$$

При этом траектории движения будут вихревыми линиями, которые определяются из уравнения $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$. Для уравнений (17) можно поставить задачи, характерные для уравнений Лапласа: граничные задачи первого и второго рода. Решение этих задач общеизвестно, поэтому здесь не приводится.

Рассмотрена и решена система, которая может быть использована для анализа напряжённого состояния, возникающего при кручении упругого параллелепипеда вокруг трёх ортогональных осей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аннин Б. Д., Бытев В. О., Сенашов С. И.* Групповые свойства уравнений упругости и пластичности. Новосибирск: Наука, 1985.
2. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975.
3. *Сенашов С. И., Гомонова О. В., Яхно А. Н.* Математические вопросы двумерных уравнений пластичности. Красноярск: изд. Сиб. гос. аэрокосм. ун-та, 2012.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 539.30

ABOUT ELASTIC TORSION AROUND THREE AXES

© 2021 **S. I. Senashov**[a], **I. L. Savostyanova**[b]

Reshetnev Siberian State University of Science and Technology,
ul. Krasnoyarskii rabochii 31, Krasnoyarsk 660037, Russia

E-mails: [a]sen@sibsau.ru, [b]ruppa@inbox.ru

Received 10.07.2020, revised 10.07.2020, accepted 15.10.2020

Abstract. We consider the equations of nonlinear elasticity assuming that the components of the deformation vector depend only on the two space coordinates each of which has the two corresponding coordinates. Some system of the three differential equations for three tangent components of the stress tensor is obtained in result of this study. This system can be used to describe the elastic torsion of a parallelepiped around the three orthogonal axes. We show that the solution of this problem, in stresses, depends on the three arbitrary functions each of which depends only on the two space variables.

Keywords: theory of nonlinear elasticity, torsion, exact solution.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.109

REFERENCES

1. Annin B.D., Bytev V.O., Senashov S.I. Gruppovye svoistva uravnenii uprugosti i plastichnosti [Group properties of the equations of elasticity and plasticity]. Novosibirsk: Nauka, 1985 (in Russian).
2. Novatskii V. Teoriya uprugosti [Theory of elasticity]. Moscow: Mir, 1975 (in Russian).
3. Senashov S.I., Gomonova O.V., Yakhno A.N. Matematicheskie voprosy dvumernykh uravnenii plastichnosti [Mathematical issues of two-dimensional equations of elasticity]. Krasnoyarsk: Izd. Sibir. Gos. Aerokosm. Univ., 2012 (in Russian).

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2021, Vol. 15, No. 1, pp. 141–145; DOI: 10.1134/S1990478921010129