УДК 517.958

ТРАЕКТОРНЫЕ И ГЛОБАЛЬНЫЕ АТТРАКТОРЫ ДЛЯ МОДИФИЦИРОВАННОЙ МОДЕЛИ КЕЛЬВИНА — ФОЙГТА

© 2021 **А. С. Устюжанинова**[a], **М. В. Турбин**[b]

Воронежский государственный университет,
Университетская пл., 1, г. Воронеж 394018, Россия

E-mails: [a]nastyzhka@gmail.com, [b]mrmike@mail.ru

Поступила в редакцию 31.07.2020 г.; после доработки 31.07.2020 г.;
принята к публикации 15.10.2020 г.

Изучается качественное поведение слабых решений автономной модифицированной модели Кельвина — Фойгта на основе теории аттракторов неинвариантных пространств траекторий. Для рассматриваемой модели определяется пространство траекторий, вводится понятие траекторного и глобального аттракторов и доказывается существование этих аттракторов.

Ключевые слова: траекторный аттрактор, глобальный аттрактор, пространство траекторий, модифицированная модель Кельвина — Фойгта, слабое решение.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.110

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, с границей $\partial\Omega$ класса C^3 рассматривается следующая система уравнений:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu\Delta v + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \varkappa\frac{\partial \Delta v}{\partial t} - \varkappa\sum_{k=1}^{n} v_k \frac{\partial \Delta v}{\partial x_k} + \nabla p = f, \quad \operatorname{div} v = 0. \tag{1}$$

Здесь $v(x,t)$, $p(x,t)$ — скорость и давление в жидкости в точке x в момент времени t; $f(x,t)$ — плотность внешних сил; $\nu > 0$ — вязкость жидкости, $\varkappa > 0$ — время ретардации. Неизвестными функциями являются v и p. Система (1) впервые была введена в рассмотрение В. А. Павловским [1] и получила подтверждение экспериментальными исследованиями растворов полиэтиленоксида, полиакриламида и гуаровой смолы.

Для системы (1) рассмотрим начально-краевую задачу с начальным и граничным условиями

$$v|_{t=0} = a, \quad v|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2}$$

В задаче (1), (2) известные параметры ν, $\varkappa$, а также плотность внешних сил f считаем зафиксированными.

Существование слабого решения рассматриваемой модели на произвольном конечном промежутке времени $[0, T]$ было доказано в [2]. Задача оптимального управления с обратной связью для рассматриваемой модели изучена в [3]. В этой работе для автономного случая (плотность внешних сил f не зависит от времени) доказывается существование минимального траекторного и глобального аттракторов. В связи с тем, что теорем единственности слабых

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-01-00051) и при поддержке Минобрнауки России (проект FZGU-2020-0035).

решений для задачи (1), (2) не установлено, классический подход к аттракторам, основанный на теории полугрупп, не применим. Поэтому для доказательства используется теория траекторных аттракторов неинвариантных пространств траекторий, созданная В. Г. Звягиным и его учениками (см. [4, 5] и имеющуюся там библиографию).

2. НЕОБХОДИМЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И УТВЕРЖДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ АТТРАКТОРОВ

Пусть E, E_0 — два банаховых пространства, таких, что E рефлексивно и непрерывно вложено в E_0. Через $\mathbb{R}_+$ будем обозначать неотрицательную полуось числовой прямой $\mathbb{R}$.

Обозначим через $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ пространство непрерывных функций, определённых на $\mathbb{R}_+$ и принимающих значения в пространстве E_0. Метрическое пространство $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ полно.

Пусть Π_M, $M \geqslant 0$, — оператор сужения функций, заданных на $\mathbb{R}_+$, на отрезок $[0, M]$. Оператор Π_M непрерывно отображает $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ в $C([0, M]; E_0)$.

Лемма 1. *Для того чтобы множество $P \subset C(\mathbb{R}_+; E_0)$ было относительно компактно в $C(\mathbb{R}_+; E_0)$, необходимо и достаточно, чтобы при любом $M > 0$ множество $\Pi_M P$ было относительно компактно в $C([0, M], E_0)$.*

Обозначим через $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ пространство существенно ограниченных функций, определённых почти всюду на $\mathbb{R}_+$ и принимающих значения в E. Норма в $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ определяется формулой $\|u\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;E)} = \operatorname{vrai}\max\limits_{t\in\mathbb{R}_+} \|u(t)\|_E$. Пространство $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ является банаховым.

Через $C_w([0, T], E)$ будем обозначать множество слабо непрерывных на отрезке $[0, T]$ функций со значениями в E.

Теорема 1 [8]. *Пусть E, E_0 — два банаховых пространства таких, что $E \subset E_0$ и это вложение непрерывно. Если функция v принадлежит $L_\infty(0, T; E)$ и непрерывна как функция со значениями в E_0, то v слабо непрерывна как функция со значениями в E.*

Функции, принадлежащие классу $C(\mathbb{R}; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}; E)$, слабо непрерывны со значениями в E (их значения принадлежат E при всех $t \in \mathbb{R}$) и ограничены со значениями в E (см. [8]).

Обозначим через $T(h)$, $h \in \mathbb{R}$, оператор сдвига, который функции f ставит в соответствие функцию $T(h)f$ такую, что $T(h)f(t) = f(t + h)$.

Рассмотрим непустое семейство функций $\mathcal{H}^+ \subset C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$. Множество $\mathcal{H}^+$ будем называть пространством траекторий, а его элементы — траекториями. Будем предполагать, что множество $\mathcal{H}^+$ непусто.

Определение 1. Множество $P \subset C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ называется притягивающим (для пространства траекторий $\mathcal{H}^+$), если для всякого множества $B \subset \mathcal{H}^+$, ограниченного в $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$, выполняется условие $\sup\limits_{u\in B} \inf\limits_{v\in P} \|T(h)u - v\|_{C(\mathbb{R}_+;E_0)} \to 0$ при $h \to \infty$.

Определение 2. Множество $P \subset C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ называется поглощающим (для пространства траекторий $\mathcal{H}^+$), если для всякого множества $B \subset \mathcal{H}^+$, ограниченного в $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$, существует $h \geqslant 0$ такое, что при всех $t \geqslant h$ имеет место включение $T(t)B \subset P$.

Отметим, что любое поглощающее множество является притягивающим.

Определение 3. Множество $P \subset C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ называется траекторным полуаттрактором (пространства траекторий $\mathcal{H}^+$), если оно удовлетворяет следующим условиям:

1) множество P компактно в $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ и ограничено в $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$;

2) имеет место включение $T(t)P \subset P$ для всех $t \geqslant 0$;

3) множество P является притягивающим в смысле определения 1.

Определение 4. Множество $P \subset C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ называется траекторным аттрактором (пространства траекторий $\mathcal{H}^+$), если оно удовлетворяет условиям 1, 3 определения 3, а также условию

2$'$) имеет место равенство $T(t)P = P$ для всех $t \geqslant 0$.

Определение 5. Минимальным траекторным аттрактором пространства траекторий $\mathcal{H}^+$ называется наименьший по включению траекторный аттрактор.

Определение 6. Множество $\mathcal{A} \subset E$ называется глобальным аттрактором (в E_0) пространства траекторий $\mathcal{H}^+$, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1) множество $\mathcal{A}$ компактно в E_0 и ограничено в E;

2) для всякого ограниченного в $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ множества $B \subset \mathcal{H}^+$ выполняется условие притягивания $\sup\limits_{u \in B} \inf\limits_{y \in \mathcal{A}} \|u(t) - y\|_{E_0} \to 0$ при $t \to \infty$;

3) множество $\mathcal{A}$ является является наименьшим по включению, удовлетворяющим условиям 1 и 2.

Очевидно, что если существует минимальный траекторный аттрактор или глобальный аттрактор, то он единственный. Имеют место следующие теоремы о существовании минимального траекторного и глобального аттракторов (см. [4, 5]).

Теорема 2. *Пусть существует траекторный полуаттрактор P пространства траекторий $\mathcal{H}^+$. Тогда существует минимальный траекторный аттрактор $\mathcal{U}$ пространства траекторий $\mathcal{H}^+$.*

Теорема 3. *Пусть существует минимальный траекторный аттрактор $\mathcal{U}$ пространства траекторий $\mathcal{H}^+$. Тогда существует глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ пространства $\mathcal{H}^+$ и справедливо соотношение $\mathcal{A} = \mathcal{U}(t)$ при $t \geqslant 0$.*

3. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Обозначим через $C_0^\infty(\Omega)^n$ пространство функций на Ω со значениями в $\mathbb{R}^n$ класса C^∞ с компактным носителем, содержащимся в Ω. Пусть $\mathcal{V} = \{v \in C_0^\infty(\Omega)^n \mid \operatorname{div} v = 0\}$. Обозначим через V^0 и V^1 пополнение $\mathcal{V}$ по нормам $L_2(\Omega)^n$ и $H^1(\Omega)^n$ соответственно, $V^2 = H^2(\Omega)^n \cap V^1$.

Пусть $\pi\colon L_2(\Omega)^n \to V^0$ — проектор Лере. Рассмотрим в $\mathcal{V}$ оператор $A = -\pi\Delta$. Известно, что A продолжается в V^0 до замкнутого оператора, который является самосопряжённым положительным оператором с вполне непрерывным обратным. Собственные функции $\{e_j\}$ оператора A образуют ортонормированный базис в V^0. Пусть $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k \leqslant \ldots$ — собственные значения оператора A, а E_∞ — множество конечных линейных комбинаций, составленных из e_j. Определим пространство $V^\beta, \beta \in \mathbb{R}$, как пополнение E_∞ по норме $\|v\|_{V^\beta} = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\beta |v_k|^2\right)^{1/2}$. В [6] показано, что нормы в пространствах V^1, V^2, V^3 эквивалентны нормам

$$\|v\|_{V^1} = \|A^{1/2} v\|_{V^0}, \quad \|v\|_{V^2} = \|Av\|_{V^0}, \quad \|v\|_{V^3} = \|A^{3/2} v\|_{V^0}.$$

Для определения понятия слабого решения на конечном отрезке введём пространство

$$W_1[0,T] = \{v \mid v \in L_\infty(0,T;V^2),\ v' \in L_\infty(0,T;V^1)\}$$

с нормой $\|v\|_{W_1[0,T]} = \|v\|_{L_\infty(0,T;V^2)} + \|v'\|_{L_\infty(0,T;V^1)}$ и пространство

$$W_2[0,T] = \{v \mid v \in C([0,T],V^3),\ v' \in L_\infty(0,T;V^3)\}$$

с нормой $\|v\|_{W_2[0,T]} = \|v\|_{C([0,T],V^3)} + \|v'\|_{L_\infty(0,T;V^3)}$.

Для определения слабого решения на $\mathbb{R}_+$ введём пространство $W_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, состоящее из функций v, определённых п. в. на $\mathbb{R}_+$ и принимающих значения в V^2 таких, что ограничение v на любой отрезок $[0,T]$ принадлежит $W_1[0,T]$, и пространство $W_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, состоящее из функций v класса $C(\mathbb{R}_+, V^3)$ таких, что ограничение v на любой отрезок $[0,T]$ принадлежит $W_2[0,T]$.

4. СЛАБАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ (1), (2) И АППРОКСИМАЦИЯ

Пусть $a \in V^2$, $f \in V^0$.

Определение 8. Слабым решением задачи (1), (2) на отрезке $[0,T]$ будем называть функцию $v \in W_1[0,T]$ такую, что для любой функции $\varphi \in V^1$ тождество

$$\int_\Omega v'\varphi\,dx + \nu\int_\Omega \nabla v : \nabla\varphi\,dx - \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\,dx \\ + \varkappa\int_\Omega \nabla(v') : \nabla\varphi\,dx + \varkappa\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega v_i \Delta v_j \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx = \int_\Omega f\varphi\,dx \tag{3}$$

выполнено при п. в. $t \in [0,T]$ и функция v удовлетворяет начальному условию

$$v(0) = a. \tag{4}$$

Слабым решением задачи (1), (2) на полуоси $\mathbb{R}_+$ назовём функцию $v \in W_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ такую, что при каждом $T > 0$ ограничение v на отрезок $[0,T]$ является слабым решением задачи (1), (2) на отрезке $[0,T]$.

Непрерывные вложения пространств $V^1 \subset V^0$ и $V^2 \subset V^1$ соответствуют неравенствам $\|u\|_{V^0} \leqslant K_0\|u\|_{V^1}$ для $u \in V^1$ и $\|u\|_{V^1} \leqslant K_1\|u\|_{V^2}$ для $u \in V^2$. Введём постоянную

$$\alpha = \frac{\nu\varkappa}{K_0^2K_1^2 + 2\varkappa K_1^2 + \varkappa^2} = \frac{\nu\varkappa}{K_2}, \quad \text{где} \quad K_2 = K_0^2K_1^2 + 2\varkappa K_1^2 + \varkappa^2, \tag{5}$$

которую будем использовать до конца работы. Введём следующие операторы:

$$J\colon V^1 \to V^{-1}, \quad \langle Ju, \varphi\rangle = \int_\Omega u\varphi\,dx \quad \text{для всех } u,\ \varphi \in V^1,$$

$$A\colon V^1 \to V^{-1}, \quad \langle Au, \varphi\rangle = \int_\Omega \nabla u : \nabla\varphi\,dx \quad \text{для всех } u,\ \varphi \in V^1,$$

$$B_1\colon L_4(\Omega)^n \to V^{-1}, \quad \langle B_1(u), \varphi\rangle = \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega u_i u_j \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx \quad \text{для всех } u \in L_4(\Omega)^n,\ \varphi \in V^1,$$

$$B_2\colon V^2 \to V^{-1}, \quad \langle B_2(u), \varphi\rangle = \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega u_i \Delta u_j \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx \quad \text{для всех } u \in V^2,\ \varphi \in V^1.$$

Тогда вопрос поиска слабых решений задачи (1), (2) эквивалентен задаче о поиске решения $v \in W_1[0,T]$ операторного уравнения

$$(J + \varkappa A)v' - B_1(v) + \varkappa B_2(v) + \nu Av = f, \tag{6}$$

удовлетворяющего начальному условию (4). Для доказательства разрешимости операторного уравнения (6) рассмотрим аппроксимационное уравнение

$$(J + \varkappa A + \varepsilon e^{-\alpha t}A^2)v' + \nu Av - B_1(v) + \varkappa B_2(v) = f, \tag{7}$$

где $\varepsilon \in (0,1]$, а оператор A^2 определяется следующим образом:

$$A^2\colon V^3 \to V^{-1}, \quad \langle A^2 u, \varphi\rangle = -\int_\Omega \nabla(\Delta u) : \nabla\varphi\, dx \quad \text{для всех } u \in V^3,\ \varphi \in V^1.$$

Исходя из определения пространства $W_2[0,T]$, в котором мы будем исследовать разрешимость (7), для уравнения (7) имеет смысл начальное условие (4) с $a \in V^3$.

Определение 9. Решением уравнения (7) на отрезке $[0,T]$ будем называть функцию $v \in W_2[0,T]$ такую, что (7) выполнено в $L_\infty(0,T;V^{-1})$. Решением уравнения (7) на полуоси $\mathbb{R}_+$ будем называть функцию $v \in W_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ такую, что при каждом $T > 0$ ограничение v на отрезок $[0,T]$ является решением (7) на этом отрезке.

5. СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ И ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ

Приведём теорему Обена — Дубинского — Симона [7], которой мы будем пользоваться.

Теорема 4. *Пусть $X \subset E \subset Y$ — банаховы пространства, вложение $X \subset E$ компактно, а вложение $E \subset Y$ непрерывно. Пусть $F \subset L_p(0,T;X)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Будем предполагать, что для любого $f \in F$ его обобщённая производная в пространстве $D'(0,T;Y)$ принадлежит $L_r(0,T;Y)$, $1 \leqslant r \leqslant \infty$. Далее, пусть F ограничено в $L_p(0,T;X)$, а $\{f' \mid f \in F\}$ ограничено в $L_r(0,T;Y)$. Тогда при $p < \infty$ множество F относительно компактно в $L_p(0,T;E)$, а при $p = \infty$ и $r > 1$ множество F относительно компактно в $C([0,T],E)$.*

Приведём необходимые нам свойства операторов.

Лемма 2. *Пусть p такое, что $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Справедливы следующие утверждения:*
1) *Оператор $A\colon L_p(0,T;V^1) \to L_p(0,T;V^{-1})$ непрерывен и имеет место оценка*

$$\varkappa\|u(t)\|_{V^1} \leqslant \|(\varkappa A + J)u(t)\|_{V^{-1}} \quad \text{при п. в. } t \in [0,T]. \tag{8}$$

2) *Оператор $B_1\colon L_\infty(0,T;L_4(\Omega)^n) \to L_\infty(0,T;V^{-1})$ непрерывен и имеет место оценка*

$$\|B_1(u)(t)\|_{V^{-1}} \leqslant C_1\|u(t)\|^2_{L_4(\Omega)^n} \quad \text{при п. в. } t \in [0,T]. \tag{9}$$

3) *Для оператора $B_2\colon W_2[0,T] \to L_\infty(0,T;V^{-1})$ имеет место оценка*

$$\|B_2(u)(t)\|_{V^{-1}} \leqslant C_2\|u(t)\|^2_{V^2} \quad \text{при п. в. } t \in [0,T]. \tag{10}$$

4) *Оператор $(J + \varkappa A + \varepsilon e^{-\alpha t}A^2)\colon L_p(0,T;V^3) \to L_p(0,T;V^{-1})$ непрерывен и для него при п. в. $t \in [0,T]$ имеет место оценка*

$$\varepsilon e^{-\alpha t}\|u(t)\|_{V^3} \leqslant \|(J + \varkappa A + \varepsilon e^{-\alpha t}A^2)u(t)\|_{V^{-1}}. \tag{11}$$

Доказательства этих свойств операторов аналогичны доказательствам в работах [2, 6, 9].

Теорема 5. *Пусть $v \in W_2[0,T]$ — решение уравнения (7) на отрезке $[0,T] (T > 0)$ при некотором $\varepsilon > 0$. Тогда при п. в. $t \in [0,T]$ имеет место неравенство*

$$\varkappa\|v(t)\|_{V^2} + e^{-\alpha t/2}\sqrt{\varepsilon\varkappa}\|v(t)\|_{V^3} + \varepsilon e^{-\alpha t}\|v'(t)\|_{V^3} + \varkappa\|v'(t)\|_{V^1} \\ \leqslant C_3\left(1 + e^{-\alpha t}\left(K_2\|v(0)\|^2_{V^2} + \varepsilon\|v(0)\|^2_{V^2} + \varepsilon\varkappa\|v(0)\|^2_{V^3}\right)\right). \tag{12}$$

Здесь α — постоянная, определяемая (5), константа C_3 не зависит от ε, t, v.

Доказательство. Сначала оценим первые два слагаемых из левой части (12), которые содержат $v(t)$. Для этого применим (7) к функции $(J+\varkappa A)v$. Преобразуя слагаемые при помощи формулы Грина, оценивая правую часть и приводя подобные, получим

$$\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^0}+2\varkappa\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^1}+(\varepsilon e^{-\alpha t}+\varkappa^2)\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^2}\\ +\varepsilon e^{-\alpha t}\varkappa\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^3}+2\nu\|v(t)\|^2_{V^1}+\nu\varkappa\|v(t)\|^2_{V^2}\leqslant 2\frac{C_4^2+\varkappa^2}{\nu\varkappa}\|f\|^2_{V^0}.$$

Рассмотрим на V^2 эквивалентную норму $\|u\|$ такую, что $\|u\|^2=\|u\|^2_{V^0}+2\varkappa\|u\|^2_{V^1}+\varkappa^2\|u\|^2_{V^2}$. Тогда имеем $\nu\varkappa\|u(t)\|^2_{V^2}\geqslant\alpha\|u(t)\|^2$. Отсюда

$$\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2+\varepsilon e^{-\alpha t}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^2}+\varepsilon e^{-\alpha t}\varkappa\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^3}+\alpha\|v(t)\|^2\leqslant 2\frac{C_4^2+\varkappa^2}{\nu\varkappa}\|f\|^2_{V^0}.$$

В первом и последнем слагаемых в левой части сделаем подстановку $v(t)=\bar v(t)e^{-\alpha t/2}$. После приведения подобных имеем

$$e^{-\alpha t}\frac{d}{dt}\|\bar v(t)\|^2+\varepsilon e^{-\alpha t}\left(\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^2}+\varkappa\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^3}\right)\leqslant 2\frac{C_4^2+\varkappa^2}{\nu\varkappa}\|f\|^2_{V^0}.$$

Умножим полученное неравенство на $e^{\alpha t}$ и проинтегрируем по t от 0 до $\tau\in[0,T]$:

$$\|\bar v(\tau)\|^2+\varepsilon\|v(\tau)\|^2_{V^2}+\varepsilon\varkappa\|v(\tau)\|^2_{V^3}\\ \leqslant\|v(0)\|^2+\varepsilon\|v(0)\|^2_{V^2}+\varepsilon\varkappa\|v(0)\|^2_{V^3}+2(e^{\alpha\tau}-1)\frac{C_4^2+\varkappa^2}{\alpha\nu\varkappa}\|f\|^2_{V^0}.$$

Умножая теперь полученное неравенство на $e^{-\alpha\tau}$, вспоминая определение вспомогательной нормы и оценивая левую часть неравенства снизу, а правую часть сверху, получим

$$\varkappa^2\|v(t)\|^2_{V^2}+e^{-\alpha t}\varepsilon\varkappa\|v(t)\|^2_{V^3}\leqslant C_5\big(1+e^{-\alpha t}\big(K_2\|v(0)\|^2_{V^2}+\varepsilon\|v(0)\|^2_{V^2}+\varepsilon\varkappa\|v(0)\|^2_{V^3}\big)\big).\qquad(13)$$

Оценим два оставшихся слагаемых из (12), содержащих $v'(t)$. Поскольку v — решение уравнения (7), то при подстановке v в (7) мы получаем тождество. Следовательно,

$$\|(J+\varkappa A+\varepsilon e^{-\alpha t}A^2)v'(t)\|_{V^{-1}}=\|-\nu Av(t)+B_1(v)(t)-\varkappa B_2(v)(t)+f\|_{V^{-1}}\\ \leqslant\nu\|v(t)\|_{V^1}+C_1\|v(t)\|^2_{L_4(\Omega)^n}+\varkappa C_2\|v(t)\|^2_{V^2}+C_6\|f\|_{V^0}\\ \leqslant C_7\nu\big(1+\|v(t)\|^2_{V^2}\big)+C_8\|v(t)\|^2_{V^2}+\varkappa C_2\|v(t)\|^2_{V^2}+C_6\|f\|_{V^0}\leqslant C_9\big(1+\|v(t)\|^2_{V^2}\big).$$

Мы воспользовались неравенствами (9), (10), непрерывностью вложений $V^2\subset V^1$, $V^0\subset V^{-1}$ и неравенством $b\leqslant 1+b^2$. Отсюда, используя (11), имеем

$$\varepsilon e^{-\alpha t}\|v'(t)\|_{V^3}\leqslant C_9\big(1+\|v(t)\|^2_{V^2}\big).\qquad(14)$$

Аналогично, в силу (8) и (14) получаем $\varkappa\|v'(t)\|_{V^1}\leqslant 2C_9\big(1+\|v(t)\|^2_{V^2}\big)$. Складывая это неравенство с (14) и используя (13), получаем

$$\varepsilon e^{-\alpha t}\|v'(t)\|_{V^3}+\varkappa\|v'(t)\|_{V^1}\leqslant C_{10}\big(1+e^{-\alpha\tau}\big(K_2\|v(0)\|^2_{V^2}+\varepsilon\|v(0)\|^2_{V^2}+\varepsilon\varkappa\|v(0)\|^2_{V^3}\big)\big).\qquad(15)$$

Из (13) и (15) в силу неравенства $b\leqslant 1+b^2$ следует оценка (12). $\square$

6. ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ

Лемма 3. *На любом отрезке $[0,T]$ существует решение уравнения (7), удовлетворяющее начальному условию (4) с произвольным $a \in V^3$.*

Доказательство. Доказательство повторяет доказательство теоремы о разрешимости аппроксимационной задачи в [2]. □

Далее нам потребуется следующая техническая

Лемма 4. *Пусть $\{v_m\}$ — ограниченная в $L_\infty(0,T;V^2)$ последовательность, а последовательность $\{v'_m\}$ ограничена в $L_\infty(0,T;V^1)$. Тогда имеют место следующие утверждения:*

1) *Существует подпоследовательность $\{v_{m_k}\}$, сходящаяся к предельной функции v_* в пространстве $C([0,T];V^1)$, причём имеют место предельные соотношения*

$$Jv'_{m_k} \rightharpoonup Jv'_* \ \text{ слабо в } \ L_2(0,T;V^{-1}), \tag{16}$$

$$\varkappa Av'_{m_k} \rightharpoonup \varkappa Av'_* \ \text{ слабо в } \ L_2(0,T;V^{-1}), \tag{17}$$

$$\nu Av_{m_k} \rightharpoonup \nu Av_* \ \text{ слабо в } \ L_2(0,T;V^{-1}), \tag{18}$$

$$\varkappa B_1(v_{m_k}) \to \varkappa B_1(v_*) \ \text{ сильно в } \ L_\infty(0,T;V^{-1}), \tag{19}$$

$$\varkappa B_2(v_{m_k}) \rightharpoonup \varkappa B_2(v_*) \ \text{ слабо в } \ L_2(0,T;V^{-1}). \tag{20}$$

2) *Если $\varepsilon_m \to 0$ — числовая последовательность и последовательность $\{\varepsilon_m v'_m\}$ ограничена в $L_\infty(0,T,V^3)$, то без ограничения общности $\varepsilon_{m_k} e^{-\alpha t} A^2 v'_{m_k} \rightharpoonup 0$ слабо в $L_2(0,T;V^{-1})$.*

3) *Если последовательность $\{v'_m\}$ ограничена в $L_\infty(0,T;V^3)$, то без ограничения общности $(J+\varkappa A+\varepsilon e^{-\alpha t}A^2)v'_{m_k} \rightharpoonup (J+\varkappa A+\varepsilon e^{-\alpha t}A^2)v'_*$ слабо в $L_2(0,T;V^{-1})$.*

Доказательство. 1) Вложение $V^2 \subset V^1$ компактно, поэтому выполнены условия теоремы 4 и вложение $W_1[0,T] \subset C([0,T],V^1)$ компактно. Поскольку $\{v_m\}$ ограничена в $W_1[0,T]$, то она относительно компактна в $C([0,T],V^1)$ и существует подпоследовательность $\{v_{m_k}\}$, сходящаяся в $C([0,T],V^1)$ к некоторой функции v_*.

Перейдём от нерефлексивных пространств L_∞ к рефлексивным пространствам L_p, чтобы воспользоваться слабой компактностью ограниченных множеств. Поскольку пространство L_∞ непрерывно вкладывается в L_p с $p \geqslant 1$, то последовательности $\{v_m\}$ и $\left\{v'_m\right\}$ ограничены в $L_2(0,T;V^2)$ и $L_2(0,T;V^1)$ соответственно. Следовательно, без ограничения общности можно считать, что

$$v_{m_k} \rightharpoonup v_* \quad \text{слабо в } L_2(0,T;V^2), \tag{21}$$

$$v'_{m_k} \rightharpoonup v'_* \quad \text{слабо в } L_2(0,T;V^1). \tag{22}$$

Таким образом, из сходимости (22) непосредственно следует (16). В силу леммы 2 линейный оператор A непрерывен. Поэтому из (21) и (22) соответственно следуют требуемые сходимости (18) и (17).

Так как $V^1 \subset L_4(\Omega)^n$, то $v_{m_k} \to v_*$ в $L_\infty(0,T;L_4(\Omega)^n)$ и (19) следует из непрерывности оператора B_1.

По теореме 4 в силу компактности вложения $V^2 \subset C(\overline{\Omega})^n$ имеет место компактное вложение $W_1[0,T] \subset C([0,T],C(\overline{\Omega})^n)$. Откуда, без ограничения общности получаем сходимость $v_{m_k} \to v_*$ в $C([0,T],C(\overline{\Omega})^n)$. Отсюда и из (21) следует, что $v_{m_k}\Delta v_{m_k} \rightharpoonup v_*\Delta v_*$ слабо в $L_2(0,T;L_2(\Omega)^n)$. Поэтому сходимость (20) следует из определения оператора B_2.

2) Как и ранее, без ограничения общности последовательность $\left\{\varepsilon_{m_k} e^{-\alpha t} v'_{m_k}\right\}$ сходится слабо к некоторой функции w в $L_2(0,T;V^3)$. Но в смысле распределений на отрезке $[0,T]$ со значениями в V^{-3} эта последовательность сходится к нулю. (Это несложно показать, используя формулу Грина и то, что v_{m_k} сходится в $C([0,T],V^1)$ к v_*.) В силу единственности слабого предела получаем требуемую сходимость.

3) Без ограничения общности $\{v'_{m_k}\}$ сходится к v'_* слабо в $L_2(0,T,V^3)$. Поэтому требуемая сходимость следует из непрерывности линейного оператора $J+\varkappa A+\varepsilon e^{-\alpha t}A^2$. $\square$

Теорема 6. *При любом* $a\in V^3$ *задача* (7), (4) *имеет решение на полуоси* $\mathbb{R}_+$.

Доказательство. Пусть v_m — решение задачи (7), (4) на отрезке $[0,m]$, $m\in\mathbb{N}$, которое существует согласно лемме 3. Продолжим функции v_m на полуось $\mathbb{R}_+$:

$$\hat v_m(t)=\begin{cases}v(t), & 0\leqslant t\leqslant m,\\ v(m), & t\geqslant m.\end{cases}$$

По построению функции $\hat v_m$ принадлежат $W_2^{\rm loc}(\mathbb{R}_+)$. Покажем, что последовательность $\{\hat v_m\}$ относительно компактна в $C(\mathbb{R}_+,V^2)$. Возьмём произвольное $T>0$. Отбросив несколько первых членов последовательности, можем считать, что функции $\{\Pi_T\hat v_m\}$ являются решениями задачи (7), (4) на отрезке $[0,T]$. Так как функции $\Pi_T\hat v_m$ имеют одно и то же значение при $t=0$, то по теореме 5 они удовлетворяют при п. в. $t\in[0,T]$ оценке

$$e^{-\alpha t/2}\sqrt{\varepsilon\varkappa}\|\Pi_T\hat v_m(t)\|_{V^3}+\varepsilon e^{-\alpha t}\|\Pi_T\hat v'_m(t))\|_{V^3}\leqslant C_3\big(1+K_2\|a\|^2_{V^2}+\varepsilon\|a\|^2_{V^2}+\varepsilon\varkappa\|a\|^2_{V^3}\big).$$

Отсюда следует, что

$$\|\Pi_T\hat v_m\|_{L_\infty(0,T;V^3)}+\|\Pi_T\hat v'_m\|_{L_\infty(0,T;V^3)}\leqslant C_{11} \tag{23}$$

с постоянной C_{11}, не зависящей от m. Таким образом, последовательности $\{\Pi_T\hat v_m\}$ и $\{\Pi_T\hat v'_m\}$ ограничены в $L_\infty(0,T;V^3)$. В силу компактности вложения $V^3\subset V^2$ и теоремы 4 имеем, что последовательность $\{\Pi_T\hat v_m\}$ относительно компактна в $C([0,T],V^2)$. В силу произвольности выбора $T>0$ по лемме 1 последовательность $\{\hat v_m\}$ относительно компактна в $C(\mathbb{R}_+,V^2)$. Поэтому из $\{\hat v_m\}$ можно извлечь подпоследовательность $\{\hat v_{m_k}\}$, сходящуюся в $C(\mathbb{R}_+,V^2)$ к некоторой функции v_*. Покажем, что v_* является решением задачи (7), (4) на $\mathbb{R}_+$.

Докажем, что $v_*\in W_2^{\rm loc}(\mathbb{R}_+)$. Так как при произвольном $T>0$ последовательности $\{\Pi_T\hat v_{m_k}\}$ и $\{\Pi_T\hat v'_{m_k}\}$ ограничены в $L_\infty(0,T;V^3)$, то, без ограничения общности, они сходятся $*$-слабо в $L_\infty(0,T;V^3)$ соответственно к v_* и некоторой функции $u\in L_\infty(0,T;V^3)$. Но в смысле распределений на $(0,T)$ со значениями в V^3 последовательность $\{\Pi_T\hat v'_{m_k}\}$ сходится к v'_*, поэтому $u=\Pi_Tv'_*$. Таким образом, Π_Tv_* принадлежит $L_\infty(0,T;V^3)$ вместе со своей производной. Следовательно, Π_Tv_* представима в виде интеграла с переменным верхним пределом и непрерывна как функция со значениями в V^3. Таким образом, $\Pi_Tv_*\in W_2[0,T]$. Так как это верно для любого T, то $v_*\in W_2^{\rm loc}(\mathbb{R}_+)$.

Так как все $\hat v_{m_k}$ удовлетворяют одному и тому же начальному условию (4) и $\{\hat v_{m_k}\}$ сходится поточечно, то v_* удовлетворяет (4). Остаётся проверить, что v_* является решением уравнения (7). Для этого нужно установить, что для любого $T>0$ ограничение Π_Tv_* является решением (7) на $[0,T]$.

Из сходимости $\{\hat v_{m_k}\}$ к v_* в $C(\mathbb{R}_+,V^2)$ следует сходимость ограничений $\{\Pi_T\hat v_{m_k}\}$ к Π_Tv_* в $C([0,T],V^2)$. Начиная с некоторого номера, функции $\Pi_T\hat v_{m_k}$ являются решениями уравнения (7), т. е. удовлетворяют равенству

$$(J+\varkappa A+\varepsilon e^{-\alpha t}A^2)\Pi_T\hat v'_{m_k}+\nu A\Pi_T\hat v_{m_k}-B_1(\Pi_T\hat v_{m_k})+\varkappa B_2(\Pi_T\hat v_{m_k})=f. \tag{24}$$

Поскольку последовательности $\{\Pi_T\hat v_{m_k}\}$ и $\{\Pi_T\hat v'_{m_k}\}$ ограничены в $L_\infty(0,T;V^3)$, то выполнены условия леммы 4. По этой лемме (24) сходится слабо в $L_2(0,T;V^{-1})$ к

$$(J+\varkappa A+\varepsilon e^{-\alpha t}A^2)\Pi_Tv'_*+\nu A\Pi_Tv_*-B_1(\Pi_Tv_*)+\varkappa B_2(\Pi_Tv_*)=f.$$

Это и означает, что Π_Tv_* является решением уравнения (7) на $[0,T]$. $\square$

Теорема 7. *При любом $a \in V^2$ задача* (6), (4) *имеет решение на $\mathbb{R}_+$, удовлетворяющее при п. в. $t > 0$ оценке*

$$\|v(t)\|_{V^2} + \|v'(t)\|_{V^1} \leqslant C_{12}\big(1 + e^{-\alpha t} K_2 \|v(0)\|_{V^2}^2\big). \tag{25}$$

Здесь C_{12} — постоянная, зависящая от ν, $\varkappa$, f и не зависящая от v, ε.

Доказательство. Так как V^3 плотно в V^2, то для любого $a \in V^2$ найдётся последовательность $\{a_m\} \subset V^3$ такая, что $\|a_m - a\|_{V^2} \to 0$. Положим $\varepsilon_m = \dfrac{1}{m \max\big\{\|a_m\|_{V^3}^2, 1\big\}}$. Тогда $\varepsilon_m \to 0$ и $\varepsilon_m \|a_m\|_{V^3}^2 \leqslant 1$.

По теореме 6 для каждого $a_m \in V^3$ на $\mathbb{R}_+$ существует решение v_m уравнения (7) при $\varepsilon = \varepsilon_m$, удовлетворяющее начальному условию $v_m(0) = a_m$. В силу теоремы 5 и непрерывности вложения $V^3 \subset V^2$ имеет место оценка

$$\varkappa \|v_m(t)\|_{V^2} + \varepsilon e^{-\alpha t} \|v_m'(t)\|_{V^3} + \varkappa \|v_m'(t)\|_{V^1} \leqslant C_3\big(1 + e^{-\alpha t}\big(1 + K_2 \|a_m\|_{V^2}^2 + C_{13}\big)\big). \tag{26}$$

При каждом m это неравенство выполняется при всех $t \in \mathbb{R}_+ \setminus Q_m$, где Q_m — некоторое множество меры нуль. Поэтому при всех $t \in \mathbb{R}_+ \setminus Q$, где $Q = \cup_m Q_m$ — множество меры нуль, данное неравенство выполняется для всех m.

Покажем, что последовательность $\{v_m\}$ относительно компактна в $C(\mathbb{R}_+, V^1)$. Согласно лемме 1 покажем для этого, что для любого $T > 0$ последовательность $\{\Pi_T v_m\}$ относительно компактна в $C([0,T], V^1)$. Это следует из леммы 4, так как из (26) последовательность $\{\Pi_T v_m\}$ ограничена в $L_\infty(0,T;V^2)$, а $\{\Pi_T v_m'\}$ ограничена в $L_\infty(0,T;V^1)$. Следовательно, существует подпоследовательность $\{v_{m_k}\}$, сходящаяся в $C(\mathbb{R}_+, V^1)$ к некоторой функции v_*. Покажем, что v_* является искомым решением.

Докажем, что $v_* \in W_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$. Так как при произвольном $T > 0$ последовательности $\{\Pi_T v_{m_k}\}$ и $\big\{\Pi_T v_{m_k}'\big\}$ ограничены в $L_\infty(0,T;V^2)$ и $L_\infty(0,T;V^1)$ соответственно, то без ограничения общности в силу единственности предела $\{\Pi_T v_{m_k}\}$ сходится $*$-слабо в $L_\infty(0,T;V^2)$ к v_*. Аналогично $\{\Pi_T v_{m_k}'\}$ сходится $*$-слабо в $L_\infty(0,T;V^1)$ к некоторой функции u. Однако в смысле распределений на $(0,T)$ со значениями в V^1 последовательность $\big\{\Pi_T v_{m_k}'\big\}$ сходится к v_*', поэтому $u = \Pi_T v_*'$. Таким образом, функция $\Pi_T v_*$ принадлежит $L_\infty(0,T;V^2)$, а её производная $L_\infty(0,T;V^1)$, т. е. $\Pi_T v_* \in W_1[0,T]$. Так как это верно для любого T, то $v_* \in W_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$.

Покажем, что для v_* выполняется начальное условие (4). Из сходимости в $C(\mathbb{R}_+, V^1)$ следует поточечная сходимость, поэтому $a_{m_k} = v_{m_k}(0) \to v_*(0)$ в V^1. В силу выбора $\{a_m\}$ мы имеем, что $a_{m_k} \to a$ в V^2, поэтому $v_*(0) = a$.

Проверим, что функция v_* является решением уравнения (6) на $\mathbb{R}_+$. Для этого нужно установить, что ограничение $\Pi_T v_*$ на всякий отрезок $[0,T]$, $T > 0$, является решением (6) на этом отрезке. Из сходимости $\{v_{m_k}\}$ к v_* в $C(\mathbb{R}_+, V^1)$ следует сходимость ограничений $\{\Pi_T v_{m_k}\}$ к $\Pi_T v_*$ в $C([0,T], V^1)$. Функции $\Pi_T v_{m_k}$ являются решениями уравнения (7), т. е.

$$(J + \varkappa A + \varepsilon e^{-\alpha t} A^2) \Pi_T v_{m_k}' + \nu A \Pi_T v_{m_k} - B_1(\Pi_T v_{m_k}) + \varkappa B_2(\Pi_T v_{m_k}) = f. \tag{27}$$

Так как последовательность $\{\Pi_T v_{m_k}\}$ ограничена в $L_\infty(0,T;V^2)$, последовательность $\big\{\Pi_T v_{m_k}'\big\}$ ограничена в $L_\infty(0,T;V^1)$, а $\big\{\varepsilon_{m_k} v_{m_k}'\big\}$ ограничена в $L_\infty(0,T;V^3)$ и $\varepsilon_{m_k} \to 0$, то по лемме 4 без ограничения общности (27) сходится к

$$(J + \varkappa A) \Pi_T v_*' + \nu A \Pi_T v_* - B_1(\Pi_T v_*) + \varkappa B_2(\Pi_T v_*) = f$$

слабо в $L_2(0,T;V^{-1})$, т. е. функция $\Pi_T v_*$ является решением (6) на $[0,T]$.

Докажем (25). Из (26) следует неравенство

$$\varkappa \|v_{m_k}(t)\|_{V^2} + \varkappa \big\|v_{m_k}'(t)\big\|_{V^1} \leqslant C_3\big(1 + e^{-\alpha t}\big(1 + K_2 \|a_m\|_{V^2}^2 + C_{13}\big)\big). \tag{28}$$

Оно выполняется для каждого k при всех t, принадлежащих некоторому (не зависящему от k) подмножеству $\mathbb{R}_+$ полной меры. Возьмём такое t. Из (28) следует, что последовательности $\{v_{m_k}(t)\}$ и $\{v'_{m_k}(t)\}$ ограничены в V^2 и V^1 соответственно. Следовательно, существуют подпоследовательность $\{\tilde{v}_l(t)\}$, сходящаяся слабо в V^2 к $v_*(t)$, и подпоследовательность $\{\tilde{v}'_l(t)\}$, сходящаяся слабо в V^1 к $v'_*(t)$. В силу свойств слабого предела $\varkappa\|v_*(t)\|_{V^2} \leqslant \varliminf_{l\to\infty} \varkappa\|\tilde{v}_l(t)\|_{V^2}$ и $\varkappa\|v'_*(t)\|_{V^1} \leqslant \varliminf_{l\to\infty} \varkappa\|\tilde{v}'_l(t)\|_{V^1}$. Отсюда и из (28) получаем оценку (25). □

7. ПРОСТРАНСТВО ТРАЕКТОРИЙ И АТТРАКТОРЫ

В качестве двух банаховых пространств, необходимых для определения пространства траекторий, выберем $E = V^2$ и $E_0 = V^1$. В качестве пространства траекторий $\mathcal{H}^+$ уравнения (6) будем рассматривать множество решений этого уравнения, определённых на $\mathbb{R}_+$, существенно ограниченных как функции со значениями в V^2 и удовлетворяющих оценке

$$\|v(t)\|_{V^2} + \|v'(t)\|_{V^1} \leqslant C_{12}\big(1 + e^{-\alpha t}K_2\|v\|^2_{L_\infty(\mathbb{R}_+,V^2)}\big) \tag{29}$$

при п. в. $t > 0$. Чтобы определение пространства траекторий было корректным, нужно убедиться, что пространство непусто, и проверить включение $\mathcal{H}^+ \subset C(\mathbb{R}_+;V^1) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+;V^2)$.

Включение $\mathcal{H}^+ \subset L_\infty(\mathbb{R}_+;V^2)$ следует из определения пространства траекторий. Чтобы доказать непрерывность траекторий, воспользуемся теоремой 4 для тройки пространств $V^2 \subset V^1 \subset V^1$. Из неравенства (29) следует, что если v — некоторая траектория, то на произвольном отрезке $[0,T]$ имеем $\Pi_T v \in L_\infty(0,T;V^2)$, $\Pi_T v' \in L_\infty(0,T;V^1)$. Поэтому по теореме 4 функция $\Pi_T v$ принадлежит $C([0,T],V^1)$. Это верно при любом T, поэтому $v \in C(\mathbb{R}_+;V^1)$.

Следующее утверждение показывает непустоту $\mathcal{H}^+$.

Теорема 8. *Для каждого $a \in V^2$ существует траектория $v \in \mathcal{H}^+$ такая, что $v(0) = a$.*

Доказательство. Теорема 7 утверждает, что на $\mathbb{R}_+$ существует решение $v \in W_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ задачи (6), (4). Покажем, что v является искомой траекторией. Для этого достаточно проверить выполнение оценки (29). Так как v удовлетворяет (25), то достаточно установить оценку

$$\|v(0)\|_{V^2} \leqslant \|v\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;V^2)}. \tag{30}$$

Из (25) следует, что v принадлежит $L_\infty(\mathbb{R}_+;V^2)$, а её производная $L_\infty(\mathbb{R}_+;V^1)$. Отсюда получаем, что $v \in C(\mathbb{R}_+;V^1)$ (повторяя рассуждения, проведённые в теореме 7). Таким образом, $v \in C(\mathbb{R}_+;V^1) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+;V^2)$, и по теореме 1 функция v принадлежит $C_w(\mathbb{R}_+;V^2)$. Поэтому для любого $t \in \mathbb{R}_+$ определено значение $v(t) \in V^2$. Откуда и из определения нормы в $L_\infty(\mathbb{R}_+,V^2)$ следует требуемое неравенство (30). □

Теперь перейдём к теоремам о существовании минимального траекторного и глобального аттракторов.

Теорема 9. *Существует минимальный траекторный аттрактор $\mathcal{U}$ пространства траекторий $\mathcal{H}^+$. Аттрактор ограничен в $L_\infty(\mathbb{R}_+;V^2)$, компактен в $C(\mathbb{R}_+;V^1)$; он притягивает в топологии пространства $C(\mathbb{R}_+;V^1)$ семейства траекторий, ограниченные в $L_\infty(\mathbb{R}_+;V^2)$.*

Доказательство. По теореме 2 нам достаточно доказать существование траекторного полуаттрактора. Рассмотрим множество

$$P = \{v \in C(\mathbb{R}_+;V^1) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+;V^2) \mid v' \in L_\infty(\mathbb{R}_+,V^1),$$
$$\|v(t)\|_{V^2} + \|v'(t)\|_{V^1} \leqslant (1 + K_2)C_{12} \text{ при п. в. } t \in \mathbb{R}_+\}.$$

Из определения P следует, что это множество ограничено в $L_\infty(\mathbb{R}_+;V^2)$ и трансляционно инвариантно, т. е. $T(h)P \subset P$ при всех $h \geqslant 0$.

Покажем, что P относительно компактно в $C(\mathbb{R}_+;V^1)$. В силу леммы 1 достаточно показать, что для любого $T>0$ множество $\Pi_T P$ относительно компактно в $C([0,T],V^1)$. Из определения P имеем, что при любом $T>0$ множество $\Pi_T P$ ограничено в $L_\infty(0,T;V^2)$, а множество $\{v' \mid v\in\Pi_T P\}$ ограничено в $L_\infty(0,T;V^1)$. По теореме 4 отсюда следует, что $\Pi_T P$ относительно компактно в $C([0,T],V^1)$. В силу произвольности T по лемме 1 получаем относительную компактность P в $C(\mathbb{R}_+;V^1)$.

Покажем, что множество P является поглощающим для $\mathcal{H}^+$. Рассмотрим произвольное множество $B\subset\mathcal{H}^+$, ограниченное в $L_\infty(\mathbb{R}_+;V^2)$. Пусть для определённости $\|v\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;V^2)}\leqslant R$ для всех $v\in B$. Выберем такое $h_0\geqslant 0$, что $R^2e^{-\alpha h_0}\leqslant 1$. Пусть v — произвольная функция из B. Так как v удовлетворяет неравенству (29), то при $h\geqslant h_0$ имеем

$$\begin{aligned}\|T(h)v(t)\|_{V^2}+\|T(h)v'(t)\|_{V^1}&=\|v(t+h)\|_{V^2}+\|v'(t+h)\|_{V^1}\\&\leqslant C_{12}(1+e^{-\alpha(t+h)}K_2R^2)\leqslant C_{12}(1+e^{-\alpha h_0}K_2R^2)\leqslant(1+K_2)C_{12}.\end{aligned}$$

Таким образом, $T(h)v\in P$. В силу произвольности v получаем, что $T(h)B\subset P$ при всех $h\geqslant h_0$. Следовательно, P — поглощающее множество.

Рассмотрим множество $\overline{P}$ (замыкание P в $C(\mathbb{R}_+;V^1)$) и покажем, что $\overline{P}$ — полуаттрактор. В силу сказанного имеем, что $\overline{P}$ компактно в $C(\mathbb{R}_+;V^1)$. Покажем, что $\overline{P}$ содержится в $L_\infty(\mathbb{R}_+;V^2)$ и ограничено в этом пространстве. Рассмотрим функцию $v\in\overline{P}$. Пусть последовательность $\{v_m\}\subset P$ сходится к v в $C(\mathbb{R}_+;V^1)$. Так как P ограничено в $L_\infty(\mathbb{R}_+;V^2)$, то найдётся такая постоянная C_{14}, что $\|v_m\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;V^2)}\leqslant C_{14}$, $m=1,2,\dots$. Функции $v_m\in P$ слабо непрерывны со значениями в V^2, поэтому при всех $t\geqslant 0$ имеем

$$\|v_m(t)\|_{V^2}\leqslant C_{14}. \tag{31}$$

Возьмём число $t\geqslant 0$. В силу (31) последовательность $\{v_m(t)\}$ ограничена в V^2, поэтому она содержит подпоследовательность $\{v_{m_k}(t)\}$, слабо сходящуюся в V^2 к некоторой функции $u\in V^2$. С другой стороны, из сходимости в $C(\mathbb{R}_+;V^1)$ следует поточечная сходимость, поэтому $v_m(t)\to v(t)$ в V^1. В силу единственности предела $u=v(t)$ и $v_{m_k}(t)\rightharpoonup v(t)$ слабо в V^2. Тогда $\|v(t)\|_{V^2}\leqslant\varliminf\limits_{k\to\infty}\|v_{m_k}(t)\|_{V^2}\leqslant C_{14}$. Следовательно, при всех t имеем $\|v(t)\|_{V^2}\leqslant C_{14}$ и $v\in L_\infty(\mathbb{R}_+;V^2)$. Кроме того, постоянная C_{14} ограничивает $L_\infty(\mathbb{R}_+;V^2)$-нормы функций из $\overline{P}$, так что это множество ограничено в $L_\infty(\mathbb{R}_+;V^2)$.

Проверим трансляционную инвариантность множества $\overline{P}$. При каждом $h\geqslant 0$ оператор $T(h)\colon C(\mathbb{R}_+;V^1)\to C(\mathbb{R}_+;V^1)$ непрерывен, поэтому $T(h)\overline{P}\subset\overline{T(h)P}\subset\overline{P}$, что и требовалось доказать.

Множество P является поглощающим, поэтому множество $\overline{P}$ тем более является поглощающим, а значит, притягивающим. Таким образом, $\overline{P}$ — траекторный полуаттрактор. □

Теорема 10. *Существует глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ пространства траекторий $\mathcal{H}^+$. Аттрактор ограничен в V^2 и компактен в V^1; он притягивает в топологии пространства V^1 семейства траекторий, ограниченные в $L_\infty(\mathbb{R}_+;V^2)$. Кроме того, имеет место соотношение $\mathcal{A}=\mathcal{U}(t)$ при $t\geqslant 0$.*

Доказательство. Доказательство непосредственно следует из теорем 9 и 3. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Павловский В. А.* К вопросу о теоретическом описании слабых водных растворов полимеров // Докл. АН СССР. 1971. Т. 200, № 4. С. 809–812.
2. *Турбин М. В., Устюжанинова А. С.* Теорема существования слабого решения начально-краевой задачи для системы уравнений, описывающей движение слабых водных растворов полимеров // Изв. вузов. Математика. 2019. № 8. С. 62–78; DOI: 10.26907/0021-3446-2019-8-62-78

3. *Плотников П. И., Турбин М. В., Устюжанинова А. С.* Теорема существования слабого решения задачи оптимального управления с обратной связью для модифицированной модели Кельвина — Фойгта слабо концентрированных водных растворов полимеров // Докл. АН. 2019. Т. 488, № 2. С. 133–136; DOI: 10.31857/S0869-56524882133-136
4. *Zvyagin V., Vorotnikov D.* Topological Approximation Methods for Evolutionary Problems of Nonlinear Hydrodinamics. Berlin: Walter de Gruyter, 2008; DOI: 10.1515/9783110208283
5. *Звягин В. Г., Кондратьев С. К.* Аттракторы для уравнений моделей движения вязкоупругих сред. Воронеж: Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 2010.
6. *Звягин В. Г., Турбин М. В.* Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред. М.: КРАСАНД, 2012.
7. *Simon J.* Compact sets in the space $L^p(0, T; B)$ // Ann. Mat. Pur. Appl. 1986. N 146. P. 65–96; DOI: 10.1007/BF01762360
8. *Темам Р.* Уравнения Навье — Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981.
9. *Звягин В. Г., Турбин М. В.* Исследование начально-краевых задач для математических моделей движения жидкостей Кельвина — Фойгта // Современная математика. Фундаментальные направления. 2009. Т. 31. С. 3–144.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 517.958

TRAJECTORY AND GLOBAL ATTRACTORS FOR A MODIFIED KELVIN—VOIGT MODEL

© 2021 A. S. Ustiuzhaninova[a], M. V. Turbin[b]

Voronezh State University, Universitetskaya pl. 1, Voronezh 394018, Russia

E-mails: [a]nastyzhka@gmail.com, [b]mrmike@mail.ru

Received 31.07.2020, revised 31.07.2020, accepted 15.10.2020

Abstract. We study the qualitative behavior of weak solutions to an autonomous modified Kelvin—Voigt model on the base of the theory of attractors for noninvariant trajectory spaces. For the model under consideration, we determine the trajectory space, introduce the notions of a trajectory attractor and a global attractor, and prove the existence of these attractors.

Keywords: trajectory attractor, global attractor, trajectory space, modified Kelvin—Voigt model, weak solution.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.110

REFERENCES

1. Pavlovskii V.A. K voprosu o teoreticheskom opisanii slabykh vodnykh rastvorov polimerov [To the question of theoretical description of weak aqueous solutions of polymers]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1971, Vol. 200, No. 4, pp. 809–812 (in Russian).
2. Turbin M.V., Ustiuzhaninova A.S. The existence theorem for a weak solution to initial-boundary value problem for system of equations describing the motion of weak aqueous polymer solutions. *Russian Math.* , 2019, Vol. 63, No. 8, pp. 54–69; DOI: 10.3103/S1066369X19080061
3. Plotnikov P.I., Turbin M.V., Ustiuzhaninova A.S. Existence theorem for a weak solution of the optimal feedback control problem for the modified kelvin–voigt model of weakly concentrated aqueous polymer solutions. *Dokl. Math.*, 2019, Vol. 100, No. 2, pp. 433–435; DOI: 10.1134/S1064562419050089
4. Zvyagin V., Vorotnikov D. Topological approximation methods for evolutionary problems of nonlinear hydrodinamics. Berlin: Walter de Gruyter, 2008; DOI: 10.1515/9783110208283
5. Zvyagin V.G., Kondrat'ev S.K. Attraktory dlya uravnenii modelei dvizheniya vyazkouprugikh sred [Attractors of the equations of models of motion of viscoelastic media]. Voronezh: Izd-vo Voronezh. Gos. Univ., 2010 (in Russian).
6. Zvyagin V.G., Turbin M.V. Matematicheskie voprosy gidrodinamiki vyazkouprugikh sred [Mathematical problems of hydrodynamics of viscoelastic media]. Moscow: KRASAND, 2012 (in Russian).
7. Simon J. Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$. *Ann. Mat. Pur. Appl.*, 1986, No. 146, pp. 65–96; DOI: 10.1007/BF01762360
8. Temam R. Navier—Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis. Amsterdam; N. Y.; Oxford: North Holland, 1979.
9. Zvyagin V.G., Turbin M.V. The study of initial-boundary value problems for mathematical models of the motion of Kelvin—Voigt fluids. *J. Math. Sci.*, 2010, Vol. 168, pp. 157–308; DOI: 10.1007/s10958-010-9981-2

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2021, Vol. 15, No. 1, pp. 158–168; DOI: 10.1134/S1990478921010142