

УДК 519.63

ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЁННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

© 2021 И. В. Бойков^а, В. А. Рязанцев^б

*Пензенский государственный университет,
ул. Красная, 40, г. Пенза 440026, Россия*

E-mails: ^аi.v.boykov@gmail.com, ^бryazantsevv@mail.ru

Поступила в редакцию 17.10.2019 г.; после доработки 05.08.2020 г.;
принята к публикации 15.04.2021 г.

Построен численный метод восстановления переменного коэффициента в задаче Коши, а также начально-краевой задаче для одномерного уравнения теплопроводности. Искомый коэффициент предполагается зависящим от времени и не зависящим от пространственной переменной. Метод основан на построении вспомогательного обыкновенного дифференциального уравнения относительно неизвестного коэффициента и его последующем решении одним из численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений. При построении метода применяется аппарат теории устойчивости по Ляпунову решений дифференциальных уравнений. Основными достоинствами предлагаемого метода являются его простота и устойчивость относительно возмущений исходных данных. Метод требует для своей реализации дополнительной информации о решении исходного уравнения теплопроводности не более чем в конечном множестве точек. Эффективность предлагаемого метода иллюстрируется решением ряда модельных примеров.

Ключевые слова: коэффициентные обратные задачи, параболические уравнения, логарифмическая норма, устойчивость по Ляпунову.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.201

ВВЕДЕНИЕ

Решение коэффициентных обратных задач является одним из важнейших и быстро развивающихся направлений современной теории решения некорректных задач математической физики, имеющем большое количество приложений. В последнее время интерес к обратным задачам постоянно возрастает. Это обусловлено запросами различных областей физики и техники. При создании новых материалов определение их характеристик требует проведения сложных и дорогостоящих экспериментов. Поэтому для определения этих характеристик прибегают к решению обратных задач.

Согласно [1] обратные задачи для дифференциальных уравнений можно определить как задачи восстановления коэффициентов либо правых частей этих уравнений по тем или иным функционалам от решений этих уравнений. Эти коэффициенты (правые части) уравнений могут представлять различные функции одной или многих переменных и быть элементами того или иного функционального пространства. Систематическое изложение основных методов решения обратных задач математической физики содержится в [1–5].

Ключевой отличительной чертой коэффициентных обратных задач является их некорректность, заключающаяся в том, что решения таких задач являются неустойчивыми к воз-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 16-01-00594).

мушениям исходных данных [6]. Это обстоятельство обуславливает значительные трудности, возникающие при конструировании численных алгоритмов решения коэффициентных задач.

Для решения коэффициентных обратных задач в различных постановках предложены разнообразные методы и используется различный математический аппарат. Очень часто такие задачи решают методами минимизации. При этом для минимизации функционала невязки используют, как правило, методы градиентного типа:

- аппроксимация коэффициента сплайном, коэффициенты которого ищутся при помощи метода сопряжённых градиентов [7];
- использование для построения вычислительного алгоритма решения коэффициентных обратных задач теплообмена метода скорейшего спуска [8];
- применение методов параметрической идентификации, градиентного спуска и переменных направлений с экстраполяцией для решения обратной коэффициентной задачи нелинейного теплопереноса [9];
- решение ряда классов обратных коэффициентных задач для уравнения теплопроводности при помощи градиентного метода [10];
- использование метода градиентного спуска для решения задачи восстановления старшего коэффициента в уравнении теплопроводности [11];
- конструирование алгоритма пошаговой идентификации неизвестного коэффициента температуропроводности градиентными методами [12];
- итерационные методы градиентного типа [11, 13, 14].

Наряду с экстремальными для решения коэффициентных задач использовались самые различные методы:

- генетические алгоритмы [15];
- определение младшего коэффициента в параболическом уравнении методом квазиобращения [16];
- определение младшего коэффициента в параболическом уравнении методом регуляризации [17];
- алгоритм решения обратных коэффициентных задач для уравнения фильтрации, основанный на регуляризованной сплайн-аппроксимации [18];
- вычислительный алгоритм, моделирующий итерационный фильтр и используемый для решения обратной задачи теплопроводности [19];
- использование интегральных преобразований в сочетании с численными методами, в частности преобразования Лапласа [20] и Фурье [21, 22];
- методы вариационного исчисления в сочетании с методологией быстрого автоматического дифференцирования [23];
- методы декомпозиции приближённого решения [24].

Для приближённого решения обратных коэффициентных задач для гиперболических и параболических уравнений в [5] предложены новые численные методы и приведены их обоснования. Эффективность предложенных методов иллюстрируется многочисленными примерами.

Наряду с теплопроводностью необходимость в решении коэффициентных обратных задач для параболических уравнений возникает во многих разделах физики и технологий: механике [25], геофизике [26].

В работе предлагается устойчивый численный метод решения задачи восстановления переменного коэффициента $\gamma(t)$ параболического уравнения. Данная статья является развитием более ранней работы авторов [27], в которой рассматривались проблемы приближённого восстановления постоянного коэффициента уравнения температуропроводности. В числе основных преимуществ предлагаемого ниже метода следует назвать, во-первых, его универсальность (подход, лежащий в основе метода, может быть сравнительно легко перенесён на другие

типы коэффициентных задач), во-вторых, простоту его реализации (в основе метода — приближённое решение обыкновенного дифференциального уравнения, для чего можно использовать богатый арсенал вычислительной математики) и, в-третьих, малый объём дополнительной информации о решении, требуемый методом, (в рамках метода полагаются известными значения решения исходного уравнения не более чем в конечном множестве точек).

В работе описываются численные методы приближённого восстановления переменного коэффициента $\gamma(t)$ в начальной задаче для одномерного уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \gamma(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (0.1)$$

$$u(0, x) = \varphi(x). \quad (0.2)$$

Задача определения функции $u(t, x)$ по (0.1), (0.2) и известной функции $\gamma(t)$ называется прямой задачей.

Обратная задача формулируется следующим образом. Требуется найти функцию $\gamma(t)$ такую, что $u(t, x)$ удовлетворяет начальной задаче (0.1), (0.2) и дополнительному условию: известны точные решения $u^*(t_k^*, x^*)$ в некоторых точках (t_k^*, x^*) , $k = 0, 1, \dots, N$, принадлежащих множеству $[0, T] \times \mathbb{R}$.

Кроме того, также рассмотрена возможность применения непрерывного операторного метода к решению задачи восстановления переменного коэффициента $\gamma(t)$ в начально-краевой задаче для одномерного уравнения теплопроводности. Показано, что для последовательного решения прямых задач в ходе реализации метода решения обратной задачи может быть с успехом использован аппарат разностных схем.

1. ОСНОВАНИЯ МЕТОДА

1.1. Теоретическая основа метода

Теоретической основой метода служат результаты работы [28], в которой описывается и обосновывается непрерывный метод решения нелинейных операторных уравнений. Приведём здесь его краткое описание.

Пусть рассматривается нелинейное операторное уравнение

$$A(x) - f = 0, \quad (1.1)$$

где $A: X \rightarrow X$ — нелинейный оператор, отображающий банахово пространство X само в себя. Поставим уравнению (1.1) в соответствие следующую задачу Коши:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(x(t)) - f, \quad (1.2)$$

$$x(0) = x_0. \quad (1.3)$$

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть задача (1.2), (1.3) имеет решение x^* и на любой дифференцируемой кривой $g(t)$, расположенной в шаре $R(x^*, r)$, выполняются следующие условия:

1) при любом $t > 0$ выполняется неравенство $\int_0^t \Lambda(A'(g(\tau))) d\tau \leq 0$;

2) справедливо неравенство $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \Lambda(A'(g(\tau))) d\tau \leq -\alpha_g$, $\alpha_g > 0$.

Тогда решение задачи Коши (1.2), (1.3) при t , стремящемся к бесконечности, сходится к решению x^* уравнения (1.1).

Здесь через $\Lambda(A')$ обозначена логарифмическая норма оператора A' , представляющего собой производную Фреше (производную Гато) оператора A . Напомним, что логарифмическая норма $\Lambda(K)$ оператора $K: X \rightarrow X$ определяется [29] формулой $\Lambda(K) = \lim_{h \downarrow 0} \left(\frac{\|I + hK\| - 1}{h} \right)$, где символ \downarrow означает монотонное стремление к нулю.

1.2. Восстановление постоянного коэффициента теплопроводности

Предлагаемые методы являются обобщением и развитием методов, ранее описанных авторами в [27] для случая постоянного коэффициента температуропроводности в одно- и двумерном уравнениях теплопроводности. Ниже приводится краткое изложение полученных в [27] результатов.

Ограничимся в рамках настоящей статьи рассмотрением двухмерного случая, представляющего наибольший интерес для практики.

Пусть требуется восстановить значение постоянного коэффициента γ в начальной задаче для двухмерного уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \gamma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (1.4)$$

$$u(0, x) = \varphi(x). \quad (1.5)$$

При этом дополнительно предполагается, что известным является значение $u(t^*, x_1^*, x_2^*)$ где $t = t^*$ и $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*)$ — фиксированные значения, принадлежащие множествам $[0, T]$ и \mathbb{R}^2 соответственно.

Известно [30], что общее решение задачи (1.4), (1.5) даётся следующей интегральной формулой:

$$u(t, x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi\gamma t} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi, \eta) \exp \left[-\frac{(x_1 - \xi)^2 + (x_2 - \eta)^2}{4\gamma t} \right] d\xi d\eta. \quad (1.6)$$

Введём в рассмотрение вспомогательную функцию $\bar{\gamma}(\sigma)$, $\sigma \geq 0$, связанную с неизвестным коэффициентом γ формулой

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \bar{\gamma}(\sigma) = \gamma. \quad (1.7)$$

Функция $\bar{\gamma}(\sigma)$ удовлетворяет задаче Коши

$$\frac{d\bar{\gamma}(\sigma)}{d\sigma} = \frac{1}{4\pi\bar{\gamma}(\sigma)t^*} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi, \eta) \exp \left[-\frac{(x_1^* - \xi)^2 + (x_2^* - \eta)^2}{4\bar{\gamma}(\sigma)t^*} \right] d\xi d\eta - u(t^*, x_1^*, x_2^*), \quad (1.8)$$

$$\bar{\gamma}_0 = \chi \quad (1.9)$$

с произвольным начальным значением χ .

Для численного решения задачи (1.8), (1.9) применяется метод Эйлера. Пусть θ — шаг метода Эйлера, тогда метод реализуется следующей вычислительной схемой:

$$\bar{\gamma}_{m+1} = \bar{\gamma}_m + \theta \left[\frac{1}{4\pi\bar{\gamma}_m t^*} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi, \eta) \exp \left[-\frac{(x_1^* - \xi)^2 + (x_2^* - \eta)^2}{4\bar{\gamma}_m t^*} \right] d\xi d\eta - u(t^*, x_1^*, x_2^*) \right],$$

где $\bar{\gamma}_m = \bar{\gamma}(\sigma_m)$, $\sigma_m = m\theta$, $m = \overline{0, L-1}$, а L — достаточно большое целое положительное число, являющееся параметром алгоритма.

Замечание 1. Интеграл в правой части этой формулы вычисляется по кубатурным формулам.

Результат работы алгоритма фиксируется формулой $\gamma \approx \bar{\gamma}_L$.

Далее рассматривается начально-краевая задача для двухмерного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \gamma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (x_1, x_2) \in [0, \ell]^2. \quad (1.10)$$

$$u(0, x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2), \quad (1.11)$$

$$u(t, x_1, 0) = \psi^{(1)}(t, x_1), \quad u(t, x_1, \ell) = \psi^{(2)}(t, x_1), \quad (1.12)$$

$$u(t, 0, x_2) = \psi^{(3)}(t, x_2), \quad u(t, \ell, x_2) = \psi^{(4)}(t, x_2)$$

и ставится задача о приближённом определении постоянного коэффициента γ в прежнем предположении о том, что известным является значение $u(t^*, x_1^*, x_2^*)$. Для этого составляется и решается следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\bar{\gamma}}{d\sigma} = S(t^*, x_1^*, x_2^*) - u(t^*, x_1^*, x_2^*), \quad (1.13)$$

где $S(t^*, x_1^*, x_2^*)$ — функционал, возвращающий значение решения задачи (1.10)–(1.12) при $\gamma = \bar{\gamma}(\sigma)$ в точке (t^*, x_1^*, x_2^*) .

Уравнение (1.13) численно решается методом Эйлера:

$$\bar{\gamma}_{m+1} = \bar{\gamma}_m + \theta \{ \tilde{S}(t^*, x_1^*, x_2^*) - u(t^*, x_1^*, x_2^*) \}, \quad m = \overline{0, L-1},$$

где $\bar{\gamma}_m = \bar{\gamma}(\sigma_m)$, $\sigma_m = m\theta$, θ — шаг метода Эйлера, L — достаточно большое целое положительное число, \tilde{S} — функционал, аппроксимирующий решение задачи (1.10)–(1.12) в точке (t^*, x_1^*, x_2^*) .

Для построения функционала \tilde{S} в [27] предлагается использовать явную разностную схему решения задачи (1.10)–(1.12), являющуюся устойчивой при $\tau/h^2 < 1/2$ (см., например, [31])

Вычисления по этой схеме проводятся согласно формуле

$$u_{j+1,k,l} = u_{j,k,l} + \frac{\bar{\gamma}_m \tau}{h^2} (u_{j,k-1,l} + u_{j,k+1,l} + u_{j,k,l-1} + u_{j,k,l+1} - 4u_{j,k,l}),$$

$$i = \overline{0, M}, \quad j = \overline{1, N-1}, \quad k = \overline{1, N-1},$$

где $u_{j,k,l} = u(j\tau, kh, lh)$, $\tau = T/M$ и $h = \ell/N$ — шаги разностной сетки узлов по переменным t и x соответственно, N и M — достаточно большие фиксированные целые положительные числа; значения $u_{0,k,l}$ определяются из начального условия (1.11), а значения $u_{j,0,l}$, $u_{j,N,l}$, $u_{j,k,0}$, $u_{j,k,N}$ определяются из граничных условий (1.12).

Искомое значение коэффициента γ определяется по формуле $\gamma \approx \bar{\gamma}_L$.

2. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННОГО КОЭФФИЦИЕНТА В НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

2.1. Описание первого метода

Поставим задачу о приближённом восстановлении коэффициента температуропроводности $\gamma(t)$ в задаче Коши (0.1), (0.2) при дополнительном предположении о том, что известными являются значения решения $\psi(t) = u(t, x^*)$ задачи (0.1), (0.2) в фиксированном множестве

точек $(t_j, x^*) \in (0, T] \times \mathbb{R}$, где $j = \overline{1, M}$ и x^* — фиксированное число. Здесь $t_j = j\tau$ и $\tau = T/M$, где M — достаточно большое целое положительное число.

Решение этой задачи строится следующим образом. Будем аппроксимировать неизвестный коэффициент $\gamma(t)$ на множестве значений $(0, T]$ при помощи кусочно-постоянной функции

$$\nu(t) = \gamma_j \quad \text{при } t \in (t_j, t_{j+1}], \quad (2.1)$$

где $j = \overline{0, M-1}$ и $\gamma_j = \gamma(t_j)$.

Тогда исходную задачу (0.1), (0.2) можно приближённо представить в виде последовательности задач

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \gamma_j \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t \in (t_j, t_{j+1}], \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.2)$$

$$u(t_j, x) = \varphi_j(x), \quad (2.3)$$

где функция $\varphi_0(x)$ совпадает с известной функцией $\varphi(x)$, а функции $\varphi_j(x)$ при $j \geq 1$ в начальный момент времени неизвестны и подлежат определению в процессе последовательного решения задач (2.2), (2.3). Общее решение задачи (2.2), (2.3) определяется следующей интегральной формулой [30]:

$$u(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\gamma_j(t-t_j)}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4\gamma_j(t-t_j)}\right] \varphi_j(\xi) d\xi, \quad t \in (t_j, t_{j+1}]. \quad (2.4)$$

Введём в рассмотрение вспомогательные функции $\bar{\gamma}_j(\sigma)$, $j = \overline{0, M-1}$, связанные с искомыми значениями γ_j , при помощи формулы

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \bar{\gamma}_j(\sigma) = \gamma_j. \quad (2.5)$$

В соответствии с результатами [27] каждая функция $\bar{\gamma}_j(\sigma)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{d\bar{\gamma}_j(\sigma)}{d\sigma} = \frac{1}{2\sqrt{\pi\bar{\gamma}_j(\sigma)\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x^*-\xi)^2}{4\bar{\gamma}_j(\sigma)\tau}\right] \varphi_j(\xi) d\xi - u(t_{j+1}, x^*). \quad (2.6)$$

Замечание 2. Правая часть уравнения (2.6) получена в результате принятия в уравнении (2.4) значений x и t равными x^* и t_{j+1} соответственно. Напомним также, что значение $u(t_{j+1}, x^*)$ предполагается известным.

Для решения уравнения (2.6) может быть применён широкий спектр численных методов. Воспользуемся методом Эйлера как одним из наиболее простых методов приближённого решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Замечание 3. Проведённые численные эксперименты показывают, что использование вместо метода Эйлера более сложных методов приближённого решения обыкновенных дифференциальных уравнений не позволяют добиться существенного повышения точности решения исходной задачи восстановления коэффициента $\gamma(t)$, а разве лишь увеличивают объём выполняемой вычислительной работы.

Пусть θ — шаг, а L — число итераций метода Эйлера. Тогда приближённое решение уравнения (2.6) реализуется следующей вычислительной схемой:

$$\bar{\gamma}_{j,m+1} = \bar{\gamma}_{j,m} + \theta \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\pi\bar{\gamma}_{j,m}\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x^*-\xi)^2}{4\bar{\gamma}_{j,m}\tau}\right] \varphi_j(\xi) d\xi - u(t_{j+1}, x^*) \right\}, \quad (2.7)$$

где $m = \overline{0, L-1}$, $\bar{\gamma}_{j,m} = \bar{\gamma}_j(\sigma_m)$ и $\sigma_m = m\theta$.

Замечание 4. Интеграл в правой части формулы (2.7) вычисляется по квадратурным формулам.

В качестве результата применения вычислительной схемы (2.7) фиксируется значение $\bar{\gamma}_{j,L}$, такое что

$$\gamma_j = \bar{\gamma}_{j,L}. \quad (2.8)$$

Таким образом, метод решения задачи восстановления значений коэффициента $\gamma(t)$ в задаче (0.1), (0.2) определяется как последовательное ($j = \overline{0, M-1}$) выполнение следующих шагов:

- уравнение (2.6) решается приближённо при помощи вычислительной схемы (2.7);
- значение γ_j фиксируется в соответствии с формулой (2.8);
- при помощи вычисления интеграла (2.4) при $t = t_{j+1}$ строится функция $\varphi_{j+1}(x)$, необходимая для дальнейшего решения уравнения (2.6) при следующем значении j .

При $j = M - 1$ последний шаг очевидным образом пропускается.

Замечание 5. Для обеспечения однозначности решения дифференциального уравнения (2.6) необходимо присоединить к нему начальное условие, зафиксировав значение $\bar{\gamma}_j(0)$. Согласно [27], это значение можно зафиксировать произвольным образом. Тем не менее, на практике при $j \geq 1$ для некоторого ускорения сходимости целесообразным представляется зафиксировать $\bar{\gamma}_j(0)$ в соответствии с формулой

$$\bar{\gamma}_j(0) = \gamma_{j-1}. \quad (2.9)$$

С точки зрения вычислительной схемы (2.6) это означает, что при $j \geq 1$ нужно положить

$$\bar{\gamma}_{j,0} = \bar{\gamma}_{j-1,L}. \quad (2.10)$$

Основными достоинствами данного метода являются его простота, а также относительно небольшая вычислительная сложность.

Заметим, что описанный метод, несмотря на свою простоту, имеет ряд недостатков, среди которых следует назвать в первую очередь сравнительно невысокую точность аппроксимации исходной задачи, а также прямую зависимость текущего определяемого значения γ_j от определённых ранее (следствием чего является накопление ошибок в процессе последовательного вычисления значений γ_j), сложность при решении проблемы оптимального выбора параметров алгоритма и, наконец, невозможность параллельной реализации вычислительного процесса. Следствием этих недостатков являются, в частности, проблемы, возникающие при необходимости решения задачи восстановления коэффициента $\gamma(t)$ для исходных данных, возмущённых существенными погрешностями; эти проблемы делают применение описанного метода оправданным лишь при точно известных исходных данных либо в случае, если практически приемлемым результатом оказывается сравнительно грубое приближение к искомому коэффициенту $\gamma(t)$.

Ниже предлагается альтернативный метод, лишённый этих недостатков, а также допускающий частичное распараллеливание.

2.2. Описание второго метода

Для построения метода нам потребуется интегральная формула обобщённого решения задачи (0.1), (0.2), позволяющая учесть зависимость коэффициента температуропроводности от t . Эта формула выглядит следующим образом [32]:

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(x-\xi)} \exp \left[- \left(\int_0^t \gamma(\eta) d\eta \right) \omega^2 \right] \varphi(\xi) d\omega d\xi. \quad (2.11)$$

Введём в рассмотрение вспомогательную функцию двух переменных $\bar{\gamma}(t, \sigma)$, при всяком фиксированном значении $t \in [0, T]$ связанную с искомым коэффициентом $\gamma(t)$ формулой

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \bar{\gamma}(t, \sigma) = \int_0^t \gamma(\eta) d\eta. \quad (2.12)$$

Вспомогательная функция $\bar{\gamma}(t, \sigma)$ при всяком фиксированном значении $t \in [0, T]$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d\bar{\gamma}(t, \sigma)}{d\sigma} = v(t) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(x^* - \xi)} e^{-\bar{\gamma}(t, \sigma)\omega^2} \varphi(\xi) d\omega d\xi - u(t, x^*) \right\}, \quad (2.13)$$

где $v(t) = \pm 1$. Выбор значений $v(t)$ осуществляется таким образом, чтобы логарифмическая норма производной Фреше (Гато) интегрального оператора в начальном значении $\bar{\gamma}(t, \sigma_0)$ была отрицательной.

Зафиксируем в уравнении (2.13) значение $t = t_j$, в результате чего получим уравнение

$$\frac{d\bar{\gamma}_j(\sigma)}{d\sigma} = v(t_j) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(x^* - \xi)} e^{-\bar{\gamma}_j(\sigma)\omega^2} \varphi(\xi) d\omega d\xi - u(t_j, x^*) \right\}, \quad (2.14)$$

где $\bar{\gamma}_j(\sigma) = \bar{\gamma}(t_j, \sigma)$.

Присоединим к этому уравнению произвольным образом зафиксированное начальное условие $\bar{\gamma}_j(\sigma_0) = \chi_j$. Полученную тем самым задачу Коши будем решать методом Эйлера. Пусть θ — шаг, а L — число итераций упомянутого метода. Тогда уравнение (2.14) приближённо решается при помощи следующей вычислительной схемы:

$$\bar{\gamma}_{j,m+1} = \bar{\gamma}_{j,m} + v(t_j)\theta \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(x^* - \xi)} \cdot e^{-\bar{\gamma}_{j,m}\omega^2} \varphi(\xi) d\omega d\xi - u(t_j, x^*) \right\}, \quad j = \overline{0, L-1}. \quad (2.15)$$

Результатом применения вычислительной схемы (2.15) является значение $\bar{\gamma}_{j,L}$, такое что

$$\int_0^{t_j} \gamma(\eta) d\eta = \bar{\gamma}_{j,L}. \quad (2.16)$$

Замечание 6. Нетрудно видеть, что уравнения (2.14) при различных значениях j не зависят друг от друга и, стало быть, могут решаться параллельно.

Замечание 7. При реализации метода двойной интеграл в правой части формулы (2.14) вычисляется приближённо по одной из кубатурных формул.

После решения уравнения (2.14) построим систему

$$\begin{aligned} \int_0^{t_1} \gamma(\eta) d\eta &= \bar{\gamma}_{1,L}, \\ &\vdots \\ \int_0^{t_M} \gamma(\eta) d\eta &= \bar{\gamma}_{M,L}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

составленную из уравнений (2.16) при $j = \overline{1, M}$.

Согласно теореме о среднем для каждого интеграла $\int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma(\eta) d\eta$, $j = \overline{1, M}$, найдётся такое значение $\eta_j \in [t_{j-1}, t_j]$, что $\int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma(\eta) d\eta = \tau \gamma(\eta_j)$.

Обозначим $z_j = \gamma(\eta_j)$ и $f_j = \bar{\gamma}_{j,L}$. Тогда систему (2.16) можно приближённо заменить системой линейных алгебраических уравнений

$$AZ = F, \quad (2.18)$$

где

$$A = (a_{jk})_{\substack{j=\overline{1, M} \\ k=\overline{1, M}}}, \quad a_{jk} = \begin{cases} \tau, & \text{если } j \geq k, \\ 0, & \text{если } j < k, \end{cases} \quad Z = (z_1 \ \dots \ z_m)^T, \quad F = (f_1 \ \dots \ f_M)^T.$$

Систему (2.18) можно решать различными способами. Определяющим фактором здесь является наличие погрешностей, возмущающих исходные данные задачи.

Пусть сначала упомянутые исходные данные известны точно. Тогда наиболее простым и эффективным методом решения системы (2.18) является её непосредственное решение по следующим явным формулам:

$$z_1 = \frac{f_1}{\tau}, \quad z_j = \frac{f_j - f_{j-1}}{\tau} \quad \text{при } j = \overline{2, M}. \quad (2.19)$$

В этом случае искомым коэффициент $\gamma(t)$ определяется приближённо по следующей формуле:

$$\gamma(t) \approx \begin{cases} z_1, & \text{если } t \in [0, t_1], \\ \dots\dots\dots \\ z_{M-1}, & \text{если } t \in [t_{M-2}, t_{M-1}], \\ z_M, & \text{если } t \in [t_{M-1}, t_M]. \end{cases} \quad (2.20)$$

Пусть теперь функция $\varphi(x)$, а также значения $\psi(t_j) = u(t_j, x^*)$, $j = \overline{1, M}$, известны приближённо с некоторой погрешностью, по своей абсолютной величине не превышающей значения δ . В этом случае решение системы (2.18) следует регуляризовать: заменим систему (2.18) системой

$$\varepsilon I + BZ = G, \quad B = A^T A, \quad G = A^T F, \quad (2.21)$$

где I — единичная матрица, ε — достаточно малый параметр регуляризации.

Далее, пусть $(z_1 \ \dots \ z_M)^T$ — решение регуляризованной системы (2.21). Для того чтобы повысить точность метода и уменьшить влияние возмущений исходных данных на результат, вместо того чтобы подставлять найденные значения z_1, \dots, z_M в формулу (2.20), поступим следующим образом. Будем искать функцию $\gamma(t)$ в виде полинома степени m :

$$\gamma(t) \approx P_m(t), \quad P_m(t) = c_0 t^m + c_1 t^{m-1} + \dots + c_m, \quad t \in [0, T].$$

Коэффициенты полинома $P_m(t)$ будем искать, решая методом наименьших квадратов систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} c_0 \eta_1^m + c_1 \eta_1^{m-1} + \dots + c_m &= \gamma(\eta_1), \\ &\vdots \\ c_0 \eta_M^m + c_1 \eta_M^{m-1} + \dots + c_m &= \gamma(\eta_M). \end{aligned}$$

При этом значения $\eta_j \in [t_{j-1}, t_j]$ могут быть зафиксированы произвольным образом. В частности, при решении модельных примеров оказалось эффективным положить $\eta_j = t_{j-1/2} = t_{j-1} + \tau/2$.

Замечание 8. Для подавления эффекта Гиббса целесообразно вместо полинома $P_m(t)$ взять сплайн с достаточно малым шагом по переменной $t \in [0, T]$.

Замечание 9. Важным достоинством второго метода является то, что его можно использовать и в случае, если значения $\psi(t_j)$ функции $\psi(t)$ известны не при $t \in [0, T]$, а на меньшем интервале $t \in [t^*, T]$. Тогда описанный метод может быть без существенных изменений применён для восстановления функции $\gamma(t)$ на том же интервале $t \in [t^*, T]$.

2.3. Решение модельного примера

Пусть требуется восстановить значения коэффициента температуропроводности $\gamma(t)$ при $t \in [0, 1]$, если заданной является функция $\varphi(x) = e \cos(x)$ и, кроме того, известными являются значения функции $\psi(t) = u(t, x^*) = e^{\cos^3(t)-t/2}$, $x^* = 0$, в точках $t = 0,05 \cdot j$, где $j = \overline{1, 20}$.

Замечание 10. Для указанных исходных данных точное решение задачи (0.1), (0.2) определяется функцией $u = e^{\cos^3(t)-t/2} \cos(x)$ при коэффициенте теплопроводности $\gamma(t) = 3 \cos^2(t) \sin(t) + 1/2$. Нетрудно видеть, что при этом $\int_0^t \gamma(\eta) d\eta = 1 - \cos^3(t) + t/2$.

Предположим сначала, что функция $\varphi(x)$ и значения функции $\psi(t)$ известны точно. Зафиксируем следующие значения параметров алгоритма: $M = 20$ (число определяемых значений функции $\gamma(t)$), $\tau = 0,05$ (шаг сетки по переменной t), $A = 10$, $N = 200$ (интеграл в правой части расчётной формулы (2.7) аппроксимируется составной квадратурной формулой трапеций на интервале $[-A, A]$ с шагом $h = 2A/N = 10^{-1}$), $\theta = 0,1$, $L = 10^3$ (метод Эйлера реализуется с шагом θ , причём проводится $L = 10^3$ итераций). В качестве начального значения $\bar{\gamma}_{0,0}$ фиксировалось значение $\bar{\gamma}_{0,0} = 1$, в то время как начальные значения $\bar{\gamma}_{j,0}$ для всех $j = \overline{1, M-1}$ задавались в соответствии с формулой $\bar{\gamma}_{j,0} = \bar{\gamma}_{j-1,L}$. Для перечисленных значений параметров результат восстановления $\gamma(t)$ первым методом показан на рис. 1.

Замечание 11. На всех приводимых здесь рисунках сплошной линией изображаются графики точных функций, а пунктирной линией — графики их численно построенных аппроксимаций.

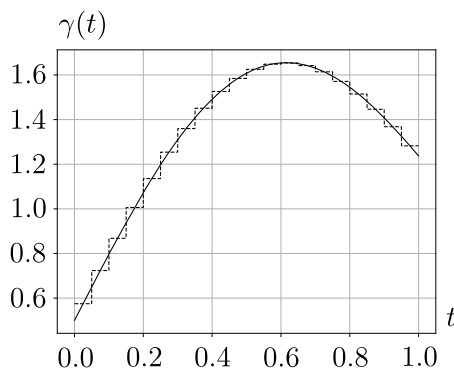


Рис. 1. Результат восстановления функции $\gamma(t)$ первым методом в условиях отсутствия погрешностей

Теперь предположим, что при прежних значениях параметров алгоритма значения функций $\varphi(x)$ и $\psi(t)$ возмущаются случайной погрешностью, по модулю не превышающей значения $\delta = 10^{-2}$. Результат восстановления функции $\gamma(t)$ первым методом представлен на рис. 2.

На рис. 2 можно видеть, что при наличии случайных погрешностей первый метод даёт достаточно грубое приближение; кроме того, увеличение максимальной абсолютной величины случайной погрешности, скажем, до $\delta = 5 \cdot 10^{-2}$ приводит к резкому снижению точности аппроксимации функции $\gamma(t)$.

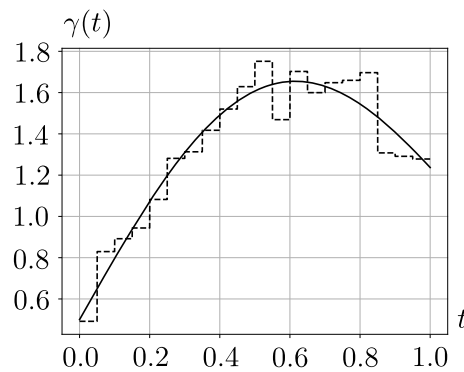


Рис. 2. Результат восстановления функции $\gamma(t)$ первым методом в условиях наличия погрешностей

Упомянутого недостатка лишён второй предложенный метод: за счёт введения регуляризационных процедур удаётся существенно снизить влияние погрешностей на точность аппроксимации функции $\gamma(t)$. Найдём решение модельного примера вторым методом при прежних значениях параметров M , τ , θ и L . Двойной интеграл в правой части расчётной формулы (2.15) аппроксимируется при помощи кубатурного аналога квадратурной формулы трапеций в квадрате $[-A, A]^2$ (в численных экспериментах фиксировалось $A = 10$) шагом $h = 2A/N = 10^{-1}$. Начальные значения $\bar{\gamma}_{j,0}$ выбирались в соответствии со следующим правилом: значение $\bar{\gamma}_{1,0}$ полагалось равным единице, а значения $\bar{\gamma}_{j,0}$ при $j \geq 2$ фиксировались формулой $\bar{\gamma}_{j,0} = \bar{\gamma}_{j-1,L}$. Кроме того, увеличим максимальное значение случайной погрешности исходных данных задачи до $\delta = 5 \cdot 10^{-2}$. Результат восстановления интегральной функции $\int_0^t \gamma(\eta) d\eta$ при реализации вычислительного процесса (2.15) представлен на рис. 3.

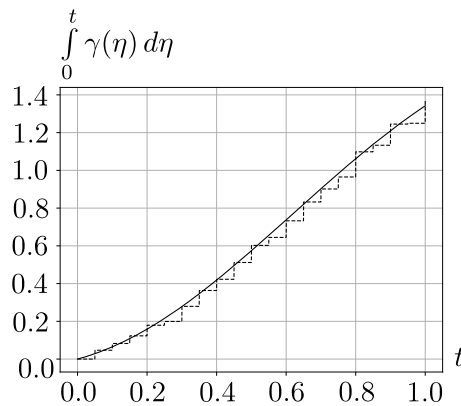


Рис. 3. Результат восстановления функции $\int_0^t \gamma(\eta) d\eta$

Из рис. 3 можно видеть, что функция $\int_0^t \gamma(\eta) d\eta$ для исходных данных, возмущённых достаточно большими случайными погрешностями, восстанавливается со сравнительно малыми ошибками. Однако при тех же значениях погрешностей непосредственное применение к решению системы (2.17) формул (2.20) не приводит к восстановлению функции $\gamma(t)$ с приемлемой точностью. По этой причине возникает потребность в решении регуляризованной системы (2.21). Зафиксируем $\varepsilon = 10^{-3}$ в уравнении (2.21), выполним построение полинома $P_m(t)$ описанным образом и положим $\gamma(t) \approx P_m(t)$.

При $m = 2$ результат восстановления $\gamma(t)$ показан на рис. 4.

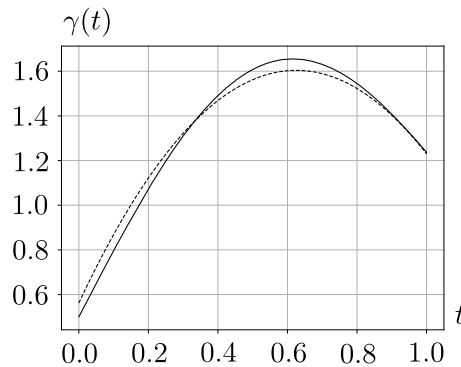


Рис. 4. Результат восстановления функции $\gamma(t)$ вторым методом при помощи полинома порядка $m = 2$

Из рис. 4 можно видеть, что при $\delta = 5 \cdot 10^{-2}$ точность восстановления функции $\gamma(t)$ вторым методом имеет порядок $O(\delta)$, что является достаточно хорошим результатом.

Для сравнения на рис. 5 приведён сравнительный график восстановления функции $\gamma(t)$ для $m = 5$.

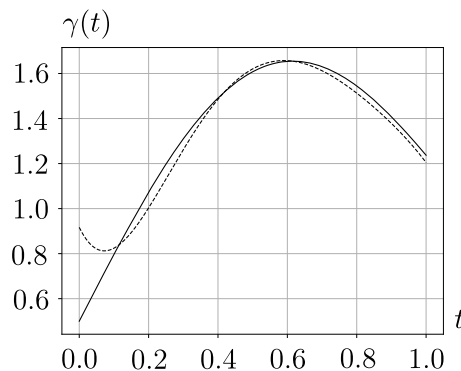


Рис. 5. Результат восстановления функции $\gamma(t)$ вторым методом при помощи полинома порядка $m = 5$

Увеличение порядка полинома увеличивает точность аппроксимации вдали от концов интервала $t \in [0, T]$, но ухудшает вблизи границы. Это связано с эффектом Гиббса. Для его подавления достаточно проводить аппроксимацию искомой функции сплайнами.

3. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННОГО КОЭФФИЦИЕНТА В НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Изложенный выше метод восстановления переменного коэффициента $\gamma(t)$ в задаче Коши для уравнения теплопроводности может быть распространён на случай начально-краевых задач. Несмотря на то, что использование аналогичных формуле (2.4) формул обобщённого решения начально-краевой задачи (см., например, [30]) в данном случае оказалось недостаточно эффективным, покажем, что численный метод решения задачи восстановления переменного коэффициента $\gamma(t)$ всё же может быть построен в результате обобщения предложенного в более ранней работе авторов [27] подхода, основанного на использовании аппарата разностных схем.

3.1. Общее описание метода

Рассматривается уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \gamma(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (3.1)$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad (3.2)$$

$$u(t, 0) = \psi_1(t), \quad u(t, \ell) = \psi_2(t). \quad (3.3)$$

Предположим дополнительно, что по крайней мере при $0 \leq t \leq T$ (где T — достаточно большое вещественное положительное число) известной является функция $u(t, x^*)$, где $x^* \in (0, \ell)$ — фиксированное значение. В этом предположении поставим задачу о приближённом восстановлении коэффициента $\gamma(t)$ при $0 \leq t \leq T$.

Пусть $h = \ell/N$, $\tau = T/M$ — шаги соответственно по переменным t , x равномерной сетки узлов (t_i, x_j) , где $t_i = i\tau$, $x_j = jh$. Функцию $\gamma(t)$ будем восстанавливать в виде последовательности приближённых значений $\gamma_i = \gamma(t_i)$, где $i = \overline{0, M}$. Значения $\gamma_0, \dots, \gamma_M$ предлагается восстанавливать последовательно в $M + 1$ этапов.

Замечание 12. С целью упрощения предположим, что найдётся такое $j^* \in \{1, \dots, N-1\}$, что $x_{j^*} = x^*$.

Рассмотрим i -й этап. На этом этапе предполагается, что ранее были восстановлены значения $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_{i-1})$.

Пусть $\bar{\gamma}_i(\sigma)$ ($\sigma \geq 0$) — вспомогательная функция, связанная с неизвестным значением γ_i при помощи формулы $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \bar{\gamma}_i(\sigma) = \gamma_i$. Введём в рассмотрение оператор $S(\bar{\gamma}_i(\sigma), t_{i+1}, x^*)$, возвращающий значение $u(t_{i+1}, x^*)$, вычисленное при реализации явной разностной схемы:

$$u_{k,l} = u_{k-1,l} + \gamma_{k-1} \frac{\tau}{h^2} (u_{k-1,l-1} - 2u_{k-1,l} + u_{k-1,l+1}), \quad l = \overline{1, N-1}, \quad k = \overline{1, i}, \quad (3.4)$$

$$u_{i+1,j^*} = u_{i,j^*} + \bar{\gamma}(\sigma) \frac{\tau}{h^2} (u_{i,j^*-1} - 2u_{i,j^*} + u_{i,j^*+1}). \quad (3.5)$$

Замечание 13. Поскольку разностная схема (3.4), (3.5) является условно устойчивой [31], то при выборе шагов τ , h необходимо обеспечить выполнение условия устойчивости $\tau\gamma(t)/h^2 < 1/2$ при $0 \leq t \leq T$. При этом поскольку значения $\gamma(t)$ заранее неизвестны, то для обеспечения сходимости предлагаемого метода указанное условие в предположении об ограниченности $\gamma(t)$ при $0 \leq t \leq T$ целесообразно заменить на более жёсткое условие $\tau/h^2 \ll 1$.

В соответствии с описанием непрерывного операторного метода проведение i -го этапа сводится к численному решению дифференциального уравнения

$$\frac{d\bar{\gamma}_i}{d\sigma} = \nu_i [S(\bar{\gamma}_i(\sigma), t_{i+1}, x^*) - u(t_i, x^*)], \quad (3.6)$$

где константа ν принимает значение $+1$ либо -1 таким образом, чтобы обеспечивалась сходимость итерационного процесса.

Замечание 14. С теоретической точки зрения, значения констант ν_i должны быть зафиксированы таким образом, чтобы удовлетворялись условия теоремы 1. Однако на практике значения констант ν_i рекомендуется определять экспериментальным путём.

К уравнению (3.6) для обеспечения единственности его решения необходимо присоединить начальное условие

$$\bar{\gamma}_i(0) = \chi_i, \quad (3.7)$$

где в целях ускорения сходимости итерационного процесса рекомендуется зафиксировать $\chi_i = \gamma_{i-1}$.

Замечание 15. Формула $\chi_i = \gamma_{i-1}$ очевидным образом применима при $i = \overline{1, M}$. Значение χ_0 может быть зафиксировано произвольным образом, в частности, можно принять $\chi_0 = 0$.

Задача (3.6), (3.7) может быть решена любым численным методом решения дифференциальных уравнений. Воспользуемся методом Эйлера. Пусть θ — шаг метода Эйлера, а L — число итераций метода Эйлера. Обозначим $\bar{\gamma}_{i,r} = \bar{\gamma}_i(\sigma_r)$, где $\sigma_r = r\theta$. Тогда вычислительная схема приближённого решения начальной задачи (3.6), (3.7) принимает следующий вид:

$$\bar{\gamma}_{i,r+1} = \bar{\gamma}_{i,r} + \theta \nu_i \{S(\bar{\gamma}_{i,r}, t_{i+1}, x^*) - u(t_i, x^*)\}, \quad r = \overline{0, L-1}. \quad (3.8)$$

Результат фиксируется следующей приближённой формулой:

$$\gamma_i = \bar{\gamma}_{i,L}. \quad (3.9)$$

Замечание 16. Легко видеть, что в соответствии с предложенным алгоритмом для восстановления значения γ_i необходимо знание значения $u(t_{i+1}, x^*)$, так что для восстановления значения γ_M необходимо знание $u(T + \tau, x^*)$. В случае, если значения функции $u(t, x^*)$ являются известными только при $0 \leq t \leq T$, значения функции $\gamma(t)$ восстанавливаются только на интервале $t \in [0, T - \tau]$.

Отметим, что поскольку зачастую исходные данные задачи являются известными не точно, а с теми или иными погрешностями, то на практике часто возникает необходимость проводить предварительную обработку указанных данных, а также постобработку результатов вычислений. Проведение упомянутых процедур иллюстрируется следующим модельным примером.

3.2. Решение модельного примера

Опишем численное решение задачи восстановления переменного коэффициента теплопроводности $\gamma(t)$, $0 \leq t \leq 1$, если известными являются функции

$$\varphi(x) = e \cos(x), \quad \psi_1(t) = e^{\cos^3(t)-t/2}, \quad \psi_2(t) = e^{\cos^3(t)-t/2} \cos(1)$$

и, кроме того, дополнительно известной является функция $u(t, 1/2) = e^{\cos^3(t)-t/2} \cos(1/2)$.

Функции $\gamma(t)$, $u(t, x)$, определяющие решение задачи, указаны в замечании 10.

Решение задачи проводилось описанным методом. Функция $\varphi(x)$ предполагалась известной в узлах $x_j = jh$, $j = \overline{0, N}$, сетки, где $h = 0,1$. Функции $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, $u(t, x^*)$ предполагались заданными в узлах $t_i = i\tau$, $i = \overline{0, M}$, где $\tau = 0,001$. Кроме того, дополнительно известной считалась величина $u(T + \tau, x^*)$. Все перечисленные значения полагались известными не точно, а с некоторой погрешностью, по модулю не превосходящей величины 0,05. Каждое из значений γ_i фиксировалось приближённо в соответствии с формулой (3.9), где значения $\bar{\gamma}_i$, определялись вычислительной схемой (3.8), реализующей метод Эйлера. Шаг метода Эйлера для каждого $i = \overline{0, M}$ был зафиксирован равным $\theta = 0,1$, а число его итераций было зафиксировано равным $L = 5000$ при $i = 0$ и $L = 50$ при $i > 0$.

Начальное приближение $\bar{\gamma}_{i,0}$ на этапе $i = 0$ было зафиксировано формулой $\bar{\gamma}_{i,0} = 0$; на всех остальных этапах ($i > 1$) начальные приближения фиксировались формулой $\bar{\gamma}_{i,0} = \bar{\gamma}_{i-1,L}$.

В связи с наличием случайных погрешностей в исходных данных задачи была частично проведена предварительная обработка этих данных, направленная на уменьшение эффекта влияния указанных погрешностей на результат решения задачи. Именно, значения $u(t_i, x^*)$, $i = \overline{1, M+1}$, в расчётных формулах предложенного метода были заменены значениями $\tilde{u}(t_i, x^*)$, вычисленными по формулам

$$\tilde{u}(t_i, x^*) = \begin{cases} \frac{1}{4}u(t_{i-1}, x^*) + \frac{1}{2}u(t_i, x^*) + \frac{1}{4}u(t_{i+1}, x^*), & 1 \leq i \leq M, \\ \frac{1}{4}u(t_{i-2}, x^*) + \frac{1}{4}u(t_{i-1}, x^*) + \frac{1}{2}u(t_i, x^*), & i = M + 1. \end{cases}$$

На заключительном этапе процесса решения поставленной задачи искомая функция была аппроксимирована полиномом пятой степени с коэффициентами, определёнными при помощи метода наименьших квадратов на основании найденного описанным методом набора приближённых значений $\gamma(t_i)$.

Окончательный результат решения задачи показан на рис. 6.

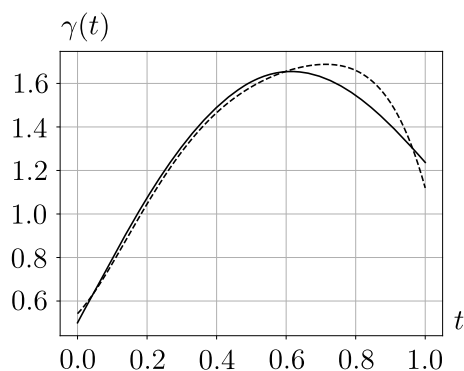


Рис. 6. Результат восстановления функции $\gamma(t)$ в начально-краевой задаче для уравнения теплопроводности

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложены два алгоритма определения неизвестного коэффициента $\gamma(t)$ в задаче Коши для уравнения теплопроводности, а также один алгоритм определения $\gamma(t)$ для начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности. Алгоритмы основаны на непрерывном методе решения операторных уравнений. Основное достоинство этого метода заключается в том, что он устойчив к возмущению параметров уравнения и начальных условий. Это обусловлено тем, что в основу метода положена ляпуновская теория устойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. М., Васильев В. Г., Романов В. Г. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1969.
2. Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское науч. изд-во, 2009.
3. Hasanov Hanasoglu A., Romanov V. G. Introduction to Inverse Problems for Differential Equations. Springer Internat. Publ., 2017.
4. Денисов А. М. Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во МГУ, 1994.
5. Beilina L., Klibanov M. V. Approximate Global Convergence and Adaptivity for Coefficient Inverse Problems. N. Y.: Springer-Verl., 2012.
6. Бек Дж., Блэкуэлл Б., Сент-Клер Ч. Некорректные обратные задачи теплопроводности. М.: Мир, 1989.
7. Артюхин Е. А. Восстановление температурной зависимости коэффициента теплопроводности из решения обратной задачи // Теплофизика высоких температур. 1981. Т. 19, № 5. С. 963–967.
8. Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В. Экстремальные методы решения некорректных задач и их приложения к обратным задачам теплообмена. М.: Наука, Физматлит, 1988.
9. Колёсник С. А. Метод численного решения обратных нелинейных задач по восстановлению компонентов тензора теплопроводности анизотропных материалов // Вычисл. технологии. 2013. Т. 18, № 1. С. 34–44.
10. Пененко А. В. Дискретно-аналитические схемы для решения обратной коэффициентной задачи теплопроводности слоистых сред градиентными методами // Сиб. журн. вычисл. математики. 2012. Т. 15, № 4. С. 393–408.

11. *Кабанихин С. И., Гасанов А., Пененко А. В.* Метод градиентного спуска для решения обратной коэффициентной задачи теплопроводности // Сиб. журн. вычисл. математики. 2008. Т. 11, № 1. С. 41–54.
12. *Вабищевич П. Н., Денисенко А. Ю.* Численное решение коэффициентной обратной задачи для нелинейного параболического уравнения // Мат. моделирование. 1989. Т. 1, № 8. С. 116–126.
13. *Chen W. L., Chou H. M., Yang Y. C.* An inverse problem in estimating the space-dependent thermal conductivity of a functionally graded hollow cylinder // Composites: Part B. 2013. V. 50. P. 112–119.
14. *Isakov V., Bindermann S.* Identification of the diffusion coefficient in a one dimensional parabolic equation // Inverse Problems. 2000. N 6. P. 665–680.
15. *Raudensky M., Woodbury K. A., Kral J.* Genetic algorithm in solution of inverse heat conduction problems // Numer. Heat Transfer. B. 1995. V. 28. P. 293–306.
16. *Данилаев П. Г.* Коэффициентные обратные задачи для уравнений параболического типа и их приложения. Казань: УНИПРЕСС, 1998.
17. *Данилаев П. Г.* Сравнение двух регуляризирующих алгоритмов решения одной коэффициентной обратной задачи // Изв. вузов. Математика. 2003. Т. 47, № 5. С. 3–8.
18. *Наумов А. Н.* Решение обратной коэффициентной задачи для уравнения фильтрации. Москва, 2006. (Препринт/ Ин-т прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН; № 006. С. 6–29).
19. *Мацевитый Ю. М., Мултановский А. В.* Одновременная идентификация теплофизических характеристик сверхтвёрдых материалов // Теплофизика высоких температур. 1990. Т. 28, № 5. С. 924–929.
20. *Ватульян А. О., Нестеров С. А.* Об одном подходе к решению коэффициентной обратной задачи теплопроводности // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2018. Т. 15, № 1. С. 50–60.
21. *Танана В. П., Сидикова А. И.* Приближённое решение обратной граничной задачи для системы дифференциальных уравнений параболического типа и оценка погрешности этого решения // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25, № 3. С. 247–264.
22. *Сидикова А. И.* Об исследовании одной обратной граничной задачи для уравнения теплопроводности // Сиб. журн. вычисл. математики. 2019. № 1. С. 81–98.
23. *Албу А. Ф., Зубов В. И.* О восстановлении коэффициента теплопроводности вещества по температурному полю // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2018. Т. 58, № 10. С. 1640–1655.
24. *Вабищевич П. Н., Клибанов М. В.* Вычислительная идентификация старшего коэффициента параболического уравнения // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52, № 7. С. 896–903.
25. *Ватульян А. О.* Обратные задачи в механике деформируемого твёрдого тела. М.: Физматлит, 2007.
26. *Ягола А. Г., Ван Янфей, Степанова И. Э., Титаренко В. Н.* Обратные задачи и методы их решения. Приложения к геофизике. М.: БИНОМ, 2014.
27. *Бойков И. В., Рязанцев В. А.* Об одном приближённом методе определения коэффициента теплопроводности // Журн. Средневолжского мат. общества. 2019. Т. 21, № 2. С. 149–163.
28. *Бойков И. В.* Об одном непрерывном методе решения нелинейных операторных уравнений // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 9. С. 1308–1314.
29. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Физматгиз, 1970.
30. *Полянин А. Д.* Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001.
31. *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы. М.: БИНОМ, 2008.
32. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. М.: Наука, 1964.

UDC 519.63

**AN APPROXIMATE METHOD FOR SOLVING THE INVERSE
COEFFICIENT PROBLEM FOR THE HEAT EQUATION**© 2021 I. V. Boykov^a, V. A. Ryazantsev^b*Penza State University, ul. Krasnaya 40, Penza 440026, Russia*E-mails: ^ai.v.boykov@gmail.com, ^bryazantsevv@mail.ru

Received 17.10.2019, revised 05.08.2020, accepted 15.04.2021

Abstract. A numerical method is constructed for recovering a variable coefficient in the Cauchy problem and also in the initial boundary value problem for the one-dimensional heat equation. The desired coefficient is assumed to be time-dependent, but not space-dependent. Our approach is based on the construction of an auxiliary ordinary differential equation for the unknown coefficient and the subsequent solving it by some numerical method of solving ordinary differential equations. The apparatus of Lyapunov stability theory is used as well. The main advantages of the proposed method are its simplicity and stability with respect to the initial data perturbations. For the implementation, the method requires some additional information on the solution of the original heat equation at no more than finitely many points. The efficiency of the proposed approach is illustrated by solving several model examples.

Keywords: inverse coefficient problem, parabolic equation, logarithmic norm, Lyapunov stability.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.201

REFERENCES

1. Lavrent'ev M.M., Vasil'ev V.G., Romanov V.G. Multidimensional Inverse Problems for Differential Equations. Novosibirsk: Nauka, 1969 (in Russian).
2. Kabanikhin S.I. Inverse and Ill-Posed Problems. Novosibirsk: Sibir. Nauchn. Izd., 2009 (in Russian).
3. Hasanov Hanasoglu A., Romanov V.G. Introduction to Inverse Problems for Differential Equations. Heidelberg: Springer Internat. Publ., 2017.
4. Denisov A M. Introduction to the theory of inverse problems. Moscow: Izd. Moskov. Gos. Univ., 1994 (in Russian).
5. Beilina L., Klibanov M.V. Approximate Global Convergence and Adaptivity for Coefficient Inverse Problems. N. Y.: Springer-Verl., 2012.
6. Bek Dzh., Blekuell B., Sent-Kler Ch. Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems. N. Y.: Wiley, 1985.
7. Artyukhin E.A. Reconstruction of the temperature dependence of the thermal conductivity coefficient from the solution of the inverse problem. *Teplofiz. Vysok. Temper.*, 1981, Vol. 19, No. 5, pp. 963–967 (in Russian).
8. Alifanov O M., Artyukhin E A., Rumyantsev S.V. Extreme methods for solving ill-posed problems and their application to inverse problems of heat transfer. Moscow: Nauka, 1988 (in Russian).
9. Kolesnik S.A. A method for numerical solution of the inverse nonlinear problems to recover the components of the thermal conductivity tensor of anisotropic materials. *Vychisl. Tekhnol.*, 2013, Vol. 18, No. 1, pp. 34–44 (in Russian).

10. Penenko A.V. Discrete-analytical schemes for solving the inverse coefficient problem of heat conduction of layered media by the gradient methods. *Sibir. Zh. Vychisl. Math.*, 2012, Vol. 15, No. 4, pp. 393-408 (in Russian).
11. Kabanikhin S.I., Gasanov A., Penenko A.V. A gradient descent method for solving the inverse coefficient problem of heat conduction. *Sibir. Zh. Vychisl. Math.*, 2008, Vol. 11, No. 1, pp. 41–54 (in Russian).
12. Vabishchevich P.N., Denisenko A.Yu. Numerical solution of the inverse coefficient problem for the nonlinear parabolic equation. *Mat. Model.*, 1989, Vol. 1, No. 8, pp. 116-126.
13. Chen W.L., Chou H.M., Yang Y.C. An inverse problem in estimating the space-dependent thermal conductivity of a functionally graded hollow cylinder. *Composites: Part B*, 2013, Vol. 50, pp. 112-119.
14. Isakov V., Bindermann S. Identification of the diffusion coefficient in a one dimensional parabolic equation. *Inverse Problems*, 2000, No. 6, pp. 665-680.
15. Raudensky M., Woodbary K.A., Kral J. Genetic algorithm in solution of inverse heat conduction problems. *Heat Transfer. B*, 1995, Vol. 28, pp. 293-306.
16. Danilaev P.G. Inverse coefficient problems for parabolic type equations and their applications. Kazan': UNIPRESS, 1998 (in Russian).
17. Danilaev P.G. Comparison of two regularizing solution algorithms for an inverse coefficient problem. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Math.*, 2003, Vol. 47, No 5, pp. 3–8 (in Russian).
18. Naumov A. N. Solution of an inverse coefficient problem for the filtration equation. Moscow, 2006. (Preprint/ Keldysh Inst. Appl. Math.; No. 006, pp. 6–29).
19. Matsevityi Yu.M., Multanovskii A.V. Simultaneous identification of thermophysical characteristics of superhard materials. *Teplofiz. Vysok. Temper.*, 1990, Vol. 28, No. 5, pp. 924–929.
20. Vatul'yan A.O., Nesterov S.A. An approach to solving the inverse coefficient problem of heat conduction. *Ekolog. Vestnik Nauchn. Tsentrov ChES*, 2018, Vol. 15, No. 1, pp. 50–60 (in Russian).
21. Tanana V.P., Sidikova A.I. Approximate solution of the inverse boundary value problem for a system of differential equations of parabolic type and an error estimate for this solution. *Trudy Inst. Mat. Mekh. Ural. Otdel. Ross. Akad. Nauk*, 2019, Vol. 25, No. 3, pp. 247–264 (in Russian).
22. Sidikova A.I. On the study of an inverse boundary value problem for the heat equation. *Sibir. Zh. Vychisl. Math.*, 2019, No 1, pp. 81–98 (in Russian).
23. Albu A.F., Zubov V.I. On the reconstruction of the coefficient of thermal conductivity of a substance by the temperature field. *Zh. Vychisl. Matemat. i Matemat. Fiziki*, 2018, Vol. 58, No. 10, pp. 1640–1655 (in Russian).
24. Vabishchevich P.N., Klivanov M.V. Computational identification of the leading coefficient of a parabolic equation. *Differentsial'nye Uravneniya*, 2016, Vol. 52, No 7, pp. 896–903 (in Russian).
25. Vatul'yan A.O. Inverse problems in mechanics of deformed solids. Moscow: Fizmatlit, 2007 (in Russian).
26. Yagola A.G., Van Yanfei, Stepanova I.E., Titarenko V.N. Inverse problems and methods for their solution. Moscow: BINOM, 2014 (in Russian).
27. Boikov I.V., Ryazantsev V.A. An approximate method for determining the thermal conductivity coefficient. *Zh. Srednevolzh. Mat. Obshch.*, 2019, Vol. 21, No 2, pp. 149–163 (in Russian).
28. Boikov I.V. A continuous method for solving nonlinear operator equations. *Differentsial'nye Uravneniya*, 2012, Vol. 48, No.9, pp. 1308–1314 (in Russian).
29. Daletskii Yu.L., Krein M.G. Stability of solutions to differential equations in Banach spaces. Moscow: Fizmatgiz, 1970 (in Russian).
30. Polyanin A.D. Handbook on linear equations of mathematical physics. Moscow: Fizmatlit, 2001 (in Russian).
31. Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobel'kov G.M. Numerical methods. Moscow: BINOM, 2008 (in Russian).
32. Eidel'man S.D. Parabolic systems. Moscow: Nauka, 1964 (in Russian).