

УДК 517.63

ИТЕРАЦИОННАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ДИФФУЗИИ В НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СУБДИФФУЗИИ

© 2021 В. И. Васильев^a, А. М. Кардашевский^b*Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,
ул. Беллинского, 58, г. Якутск 677000, Россия*E-mails: ^avasvasil@mail.ru, ^bkardam123@gmail.comПоступила в редакцию 18.02.2021 г.; после доработки 24.03.2021 г.;
принята к публикации 15.04.2021 г.

Предлагается итерационный метод решения неявного конечно-разностного аналога обратной задачи идентификации коэффициента диффузии начально-краевой задачи для уравнения субдиффузии с дробной производной Капуто по времени. Рассмотрены два разных способа задания условия переопределения в финальный момент времени: значение решения в заданной точке и взвешенный интеграл решения. Представлены результаты численной реализации итерационного метода на модельных задачах с точными решениями, подтвердившие достаточно высокую точность метода.

Ключевые слова: дробная производная Капуто по времени, уравнение субдиффузии, обратная задача, конечно-разностный метод, идентификация коэффициента диффузии, итерационный метод секущих.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.202

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы значительно повысился интерес к математическим моделям задач науки и техники, использующим понятие производной дробного порядка, которое является естественным обобщением понятия производной целого порядка. Модели имеют многочисленные приложения в физике, при обработке сигналов, в механике жидкости, вязкоупругости, математической биологии и электрохимии. Исследования по установлению корректности, условной корректности, построению точных и приближённых решений и приложениям прямых и обратных задач для уравнений с дробными частными производными дробного порядка в различных областях науки и техники обобщены в монографиях [1–5].

Существует несколько определений понятия дробной производной по времени, в данной работе мы будем рассматривать задачи с дробной производной Капуто по времени [6]. Точное решение одномерной начально-краевой задачи Дирихле для уравнения субдиффузии с произвольным начальным условием построено в [7] с помощью тригонометрического ряда с коэффициентами, использующими функцию Миттаг — Леффлёра.

В работах [8–15] зарубежными и отечественными авторами предложены и обоснованы неявные разностные схемы, соответствующие начально-краевым задачам для интегродифференциального уравнения с частными производными, в том числе уравнения субдиффузии с дробной производной по времени, основанные на дискретных аналогах разного порядка аппроксимации дробной производной Капуто по времени. Доказаны теоремы о сходимости решения разностной схемы к решению исходной задачи с соответствующими порядку аппроксимации скоростями сходимости.

Наряду с разработкой численных методов решения прямых задач для интегральных и дифференциальных уравнений в частных производных большой интерес представляют итерационные методы решения обратных задач, которые, как правило, могут оказаться некорректными или условно корректными. Методы численного решения обратных задач обобщены в монографиях [16–18].

В [19] доказаны существование, единственность и устойчивость решения обратной задачи определения порядка дробной производной и ядра младшего члена из измерений состояний во времени. В [20] дано точное решение нескольких классов дробно-линейных дифференциальных уравнений, для которых определение порядка дробной производной по времени построено с помощью асимптотического разложения функции Миттаг — Леффлёра. В [21] доказана единственность решения обратных задач идентификации порядков дробных производных по времени с разными коэффициентами в уравнении субдиффузии посредством точечного наблюдения в n точках. Представляет несомненный интерес работа [22], в которой предложен вычислительный алгоритм и представлены результаты численного решения обратных задач, реализованных методом Монте-Карло в сочетании с методом конечных разностей. В [23] решена задача одновременного определения стационарного коэффициента диффузии и порядка дробной производной в уравнении субдиффузии с гладким начальным условием с использованием граничных измерений. Работа [24] посвящена определению зависящего от времени коэффициента конвекции в уравнении дробной диффузии по времени для одномерного случая.

В предыдущих наших работах [25, 26] построен итерационный метод определения порядка дробной производной α с помощью итерационного метода секущих для разных условий переопределения. В данной работе мы рассматриваем обратную задачу идентификации постоянного коэффициента диффузии при задании двух типов условия переопределения в финальный момент времени: значение решения в заданной точке и с интегральным условием. Для численного решения используем неявную разностную схему с соответствующими дискретными аналогами условий переопределения. Далее строим итерационный метод «секущих», где на каждой итерации решается прямая задача с последующим уточнением искомого коэффициента диффузии.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

С помощью интегродифференциального уравнения субдиффузии описывается субдиффузия примеси, например соли в толще морской воды. Мы в данной работе рассмотрим одномерное уравнение субдиффузии, запишем его в безразмерных координатах и времени. Безразмерное время t является одним из критериев подобия, характеризует соотношение между скоростью изменения концентрации примеси в воде и зависит от размера толщи воды l и коэффициента диффузии D . Реальное финальное время определяется формулой $T = D\bar{t}/l^2$, где D — коэффициент диффузии, l — характерный линейный размер тела, $\bar{t} \in (0, T]$ — реальное время, T — финальный момент времени для рассматриваемого процесса. Приведём реальное время процесса диффузии соли в воде, соответствующее безразмерному значению $T = 1$ при характерном размере тела $l = 1$ м. Поскольку коэффициент диффузии соли в воде $D = 10^{-9}$ м²/с, то реальное время равно $\bar{T} = 10^9$ с (или 31,7 лет), при $T = 4$ реальное время $\bar{T} = 10^9$ с (или 128,8 лет). В нашем случае для $l = 4$ при безразмерном финальном времени $T = 1$ получаем соответствующее реальное время $\bar{T} = 501$ год или $\bar{T} = 1004$ года при $T = 4$.

Другой пример. Коэффициент диффузии кислорода в воде равен $D = 1,95 \cdot 10^{-6}$ м²/с. В этом случае при $l = 4$ при безразмерном финальном времени $T = 1$ и $T = 4$ соответственно получаем реальные времена $\bar{T} = 900$ и $\bar{T} = 3600$ суток. Таким образом, в силу достаточной малости коэффициента диффузии в рассмотренных случаях имеем достаточно большие финальные времена для толщи морской воды размером четыре метра.

Рассмотрим обратную задачу для простейшего одномерного дифференциального уравнения с дробной производной по времени с однородными граничными условиями Дирихле и неоднородным начальным условием. Требуется определить функцию $u(x, t)$, $[x, t] \in [0, l] \times [0, T]$, и постоянный коэффициент диффузии $0 < D < \infty$, являющийся решением обратной начально-краевой задачи для уравнения субдиффузии:

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad \alpha \in (0, 1), \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (3)$$

В качестве дополнительного условия, необходимого для идентификации коэффициента диффузии D , рассмотрим два варианта: значение искомой функции в заданной точке в финальный момент времени

$$u(x_*, T) = b, \quad x_* \in (0, l), \quad (4)$$

и интегральное условие переопределения в финальный момент времени [27]

$$\int_0^l w(x) u(x, T) dx = b, \quad (5)$$

где $w(x) > 0$, $x \in (0, l)$.

В качестве дробной производной по времени в уравнении (1) берём дробную производную Капуто порядка α , определяемую по формуле

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^t \frac{\partial u(x, s) ds}{\partial t} (t - s)^{-\alpha}, \quad t \in (0, T]. \quad (6)$$

Таким образом, уравнение субдиффузии представляет собой интегродифференциальное уравнение

$$\frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^t \frac{\partial u(x, s) ds}{\partial t} (t - s)^{-\alpha} = D \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 < t \leq T, \quad (7)$$

где $\alpha \in (0, 1)$, $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция. Дискретный аналог дробной производной Капуто порядка α по времени [8–10] есть

$$\frac{\partial^\alpha u(x_i, t)}{\partial t^\alpha} = \sigma_{\tau\alpha} \sum_{j=1}^n s_j (u_i^{n-j+1} - u_i^{n-j}), \quad (8)$$

где $\alpha \in (0, 1)$, $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция, а коэффициенты s_j , $\sigma_{\tau\alpha}$ вычисляются по формулам

$$s_j = j^{1-\alpha} - (j-1)^{1-\alpha}, \quad j = 1, 2, \dots, K, \quad \sigma_{\tau\alpha} = \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha)\tau^\alpha}. \quad (9)$$

Конечно-разностный аналог (8) с коэффициентами, определяемыми по формулам (9), аппроксимирует дробную производную по Капуто с порядком $O(\tau^{2-\alpha})$.

2. КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЙ АНАЛОГ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Подставим дискретный аналог дробной производной Капуто (8) с коэффициентами (9) в уравнение субдиффузии (7), а вторую производную по пространственной переменной на равномерной сетке с шагом $h = l/n$ аппроксимируем со вторым порядком по h и выпишем дискретные аналоги граничных и начального условий:

$$u_i^0 = \varphi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\sigma_{\tau\alpha} \sum_{j=1}^k s_j (u_i^{k-j+1} - u_i^{k-j}) = D \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (10)$$

$$u_0^k = 0, \quad u_n^k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, K.$$

Запишем разностную схему в виде операторного уравнения

$$\mathcal{A}(D, u) = f. \quad (11)$$

Таким образом, на каждом временном слое требуется решить систему линейных алгебраических уравнений (10) с трехдиагональной матрицей, где в правой части используется вся предыстория вычисленного решения до текущего временного слоя включительно. Разностная схема (10) для решения исходной начально-краевой задачи (1)–(3) имеет порядок аппроксимации $O(\tau^{2-\alpha} + h^2)$ и безусловно устойчива. Её решение сходится к решению исходной задачи (1)–(3) со скоростью порядка $O(\tau^{2-\alpha} + h^2)$.

3. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ МОДЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ ЗАДАЧ

Численную проверку точности разностной схемы (10) на точном решении исходной дифференциальной задачи (1)–(3) проведём на модельных задачах с разными начальными условиями, разными значениями порядка дробной производной по времени α и коэффициента диффузии D . Точное решение вычислено с помощью суммы тригонометрического ряда с коэффициентами, использующими функцию Миттаг — Леффлёра [7].

Пример 1. Рассмотрим прямую задачу с гладким начальным условием:

$$\varphi(x) = e^{-10(x-l/2)^2}, \quad x \in [0, l]. \quad (12)$$

Пример 2. Начальное условие задаём в виде разрывной функции

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } x \geq 0, 4l, \quad x \leq 0, 6l, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (13)$$

Расчёты проведены при

$$l = 4, \quad T = 4, \quad n = 100, \quad K = 100, \quad T = \begin{cases} 4 & \text{при } D = 0,5, \\ 1 & \text{при } D = 2. \end{cases}$$

Для примера 1 начальное условие и точные решения задачи (1)–(3) в финальный момент времени в виде тригонометрического ряда с использованием функции Миттаг — Леффлёра [7] при заданном коэффициенте диффузии $D = 0,5$, финальном времени $T = 4$ и для значений порядка дробной производной $\alpha = 0,1; 0,5; 0,9$ представлены на рис. 1, а. Из представленных графиков видно, что при достаточно большом значении финального момента времени $T = 4$ увеличение порядка дробной производной α приводит к более быстрому убыванию решения. На рис. 1, б приведены графики ошибки при $R_i^K = u_i^K - u(x_i, T)$ — компоненте вектора ошибки

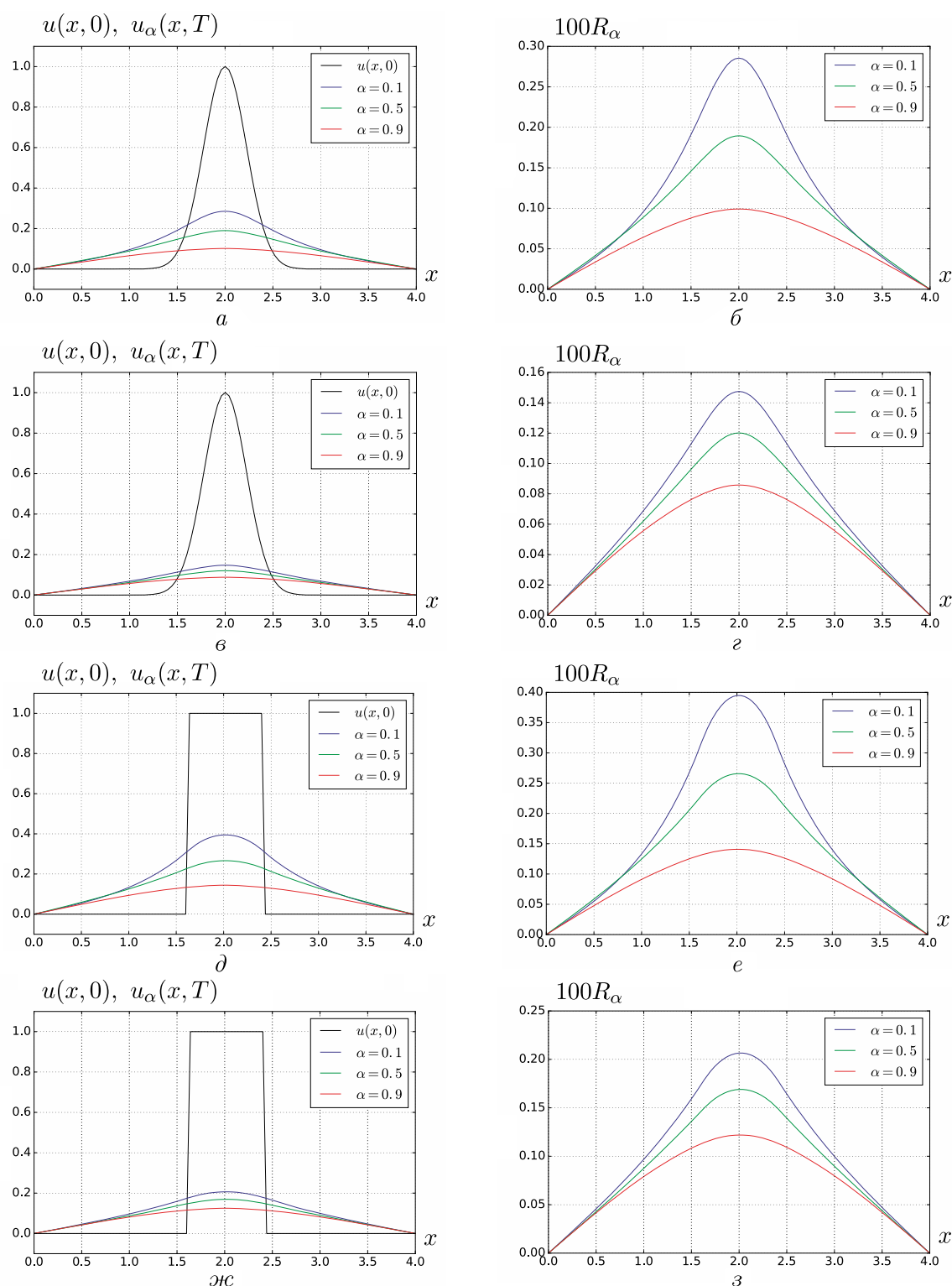


Рис. 1. Результаты аппроксимации разностной схемы (10) на задаче (1)–(3) с гладкими начальными условиями (12), (13) для разных α :
 (а), (б) $D = 0,5, T = 4$; (в), (г) $D = 2, T = 1$;
 и разрывными начальными условиями (12), (13) для разных α :
 (д), (е) $D = 0,5, T = 4$; (ж), (з) $D = 2, T = 1$

определения решения $u(x, T)$ разностной схемы в узлах пространственной сетки в финальный момент времени для разных значений α . Для большей наглядности приведены графики ошибки, увеличенные в 100 раз. Аналогичные результаты при $D = 2$, $T = 1$ представлены на рис. 1, в, г. Приведённые результаты численной апробации неявной разностной схемы для прямой задачи показали, что максимальная погрешность определения финального решения во всех вариантах расчётов не превышает 1%.

Для примера 2 задали те же значения показателя дробной производной α . Соответствующие графики в начальный и финальный моменты времени представлены на рис. 1, д, ж. Видно, что при увеличении коэффициента диффузии решение задачи $u(x, t)$ гораздо быстрее убывает. Справа — графики ошибки (разность между точным решением и вычисленной по разностной схеме) также практически оказались одного порядка. Точность численного метода представлена на рис. 1, е, з. Из представленных результатов видно, что точность разностной схемы (10) на задаче с разрывным начальным условием чуть хуже точности для задачи с гладким начальным условием.

4. ПРОВЕРКА ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТА ДИФФУЗИИ

Перед тем, как приступить к построению итерационного метода решения обратной задачи идентификации коэффициента диффузии начально-краевой задачи для уравнения субдиффузии (1)–(3) с условиями переопределения (4) или (5), выясним зависимость b от коэффициента диффузии D в финальный момент времени $t = T$ на модельных примерах 1 и 2 с точными решениями. Расчёты проводились на точном решении в виде суммы членов тригонометрического ряда для примеров 1 и 2 при заданных значениях [5]: $D_i = h_D q^i$, $i = 1, 2, \dots, N$, $h_D = 0,2$, $q = 1,5$, $N = 7$.

Результаты расчёта зависимости значения b от коэффициента диффузии D в финальные моменты времени $T = 1; 4$ при задании гладкого начального условия (12) представлены на рис. 2. На рис. 2, а приведены значения b для значений порядка дробной производной по времени $\alpha = 0,1; 0,5; 0,9$ в случае, когда задано гладкое начальное условие и условие переопределения (4). На рис. 2, б приведены результаты расчёта при тех же условиях, но когда задано интегральное условие переопределения. На рис. 2, в, г приведены аналогичные результаты при задании разрывного начального условия (13). На рис. 3 представлены аналогичные результаты счёта при $T = 1; 4$.

Из представленных на рис. 2 и рис. 3 графиков приходим к выводу, что величина b в условиях переопределения (4) и (5) является монотонно убывающей функцией, и каждому значению b соответствует только единственное значение коэффициента диффузии D . Это означает, что в наших примерах единственность решения рассматриваемых примеров гарантирована. Следует отметить, что в общем случае целесообразно для определения решения прямой задачи достаточно использовать неявную разностную схему (10), поскольку её решение с достаточной точностью аппроксимирует решение прямой задачи.

5. ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ИДЕНТИФИКАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТА ДИФФУЗИИ

Приступим к построению дискретного аналога обратной задачи, в которой помимо решения начально-краевой задачи для уравнения субдиффузии $u(x, t)$, $(x, t) \in [0, l] \times [0, T]$; определению подлежит также и коэффициент диффузии D . Для её решения мы построим итерационный метод, использующий на каждой итерации решение прямой задачи. Таким образом, на каждом временном слое приходим к необходимости решения системы линейных алгебраических уравнений (10) с заданным или вычисленным приближением коэффициента диффузии.

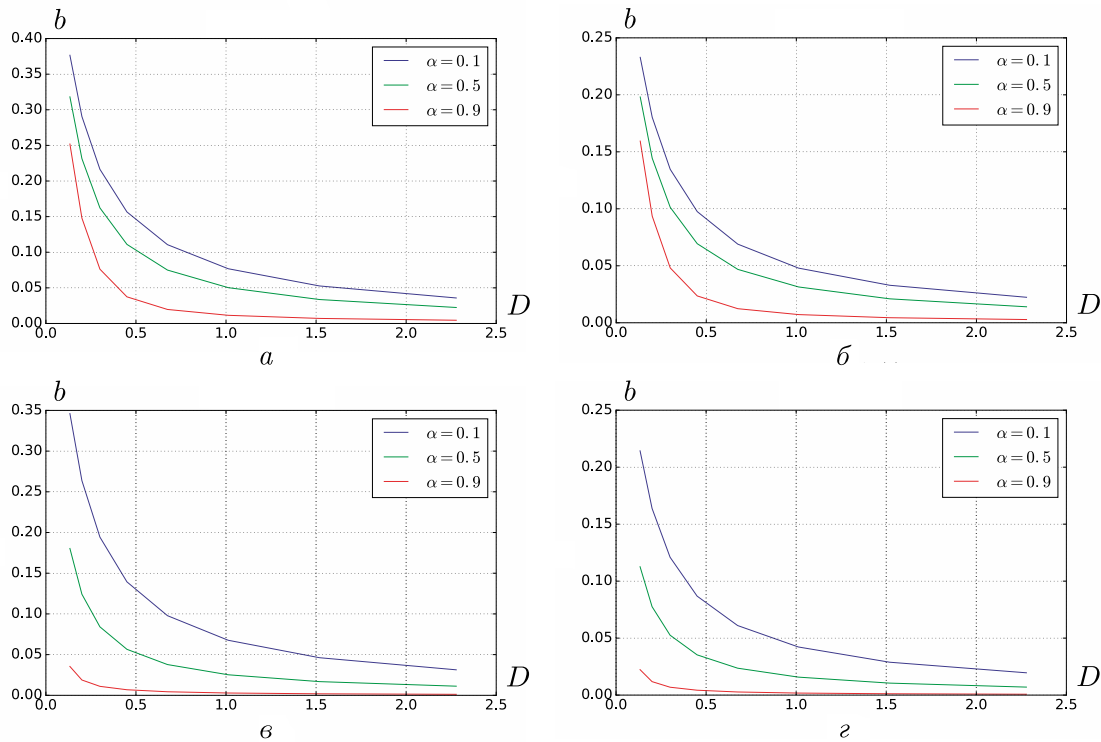


Рис. 2. Зависимость b от коэффициента диффузии D при задании гладкого начального условия (12) в финальные моменты времени $T = 1$ и $T = 4$:

(а) $T = 1, AC(4)$; (б) $T = 1, AC(5)$; (в) $T = 4, AC(4)$; (г) $T = 4, AC(5)$

В рассматриваемой обратной задаче требуется идентифицировать коэффициент диффузии D , который определяем из дискретного аналога условия переопределения (4) или (5)

$$u_{i_*} = b \quad (14)$$

или

$$\sum_{i=1}^{n-1} w_i u_i^K h = b, \quad (15)$$

где в (13) пространственная сетка построена таким образом, что $x_* = i_* h$ и $w_i = w(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Отметим, что для приближённого вычисления определённого интеграла использована квадратурная формула трапеций.

Следовательно, нам требуется найти решение нелинейной задачи, состоящей из системы уравнений (10) и одного из уравнений (14) или (15), в зависимости от того, какое условие переопределения задано. Система эта нелинейна по той причине, что в системе линейных уравнений (10) коэффициент диффузии D должен удовлетворять одному из дополнительных условий (13) или (14). Таким образом, подлежащий определению коэффициент диффузии D неявно входит в условия переопределения (13) или (14) и явно присутствует в системе уравнений (10).

Для численного решения обратной задачи определения коэффициента диффузии D построим итерационный метод, использующий на каждой итерации систему уравнений (10) — конечно-разностный аналог прямой задачи (1)–(3). Воспользуемся классическим итерационным методом секущих для решения нелинейных уравнений:

1. Задаём начальное приближение D_0 и обнуляем счётчик итераций $s = 0$.

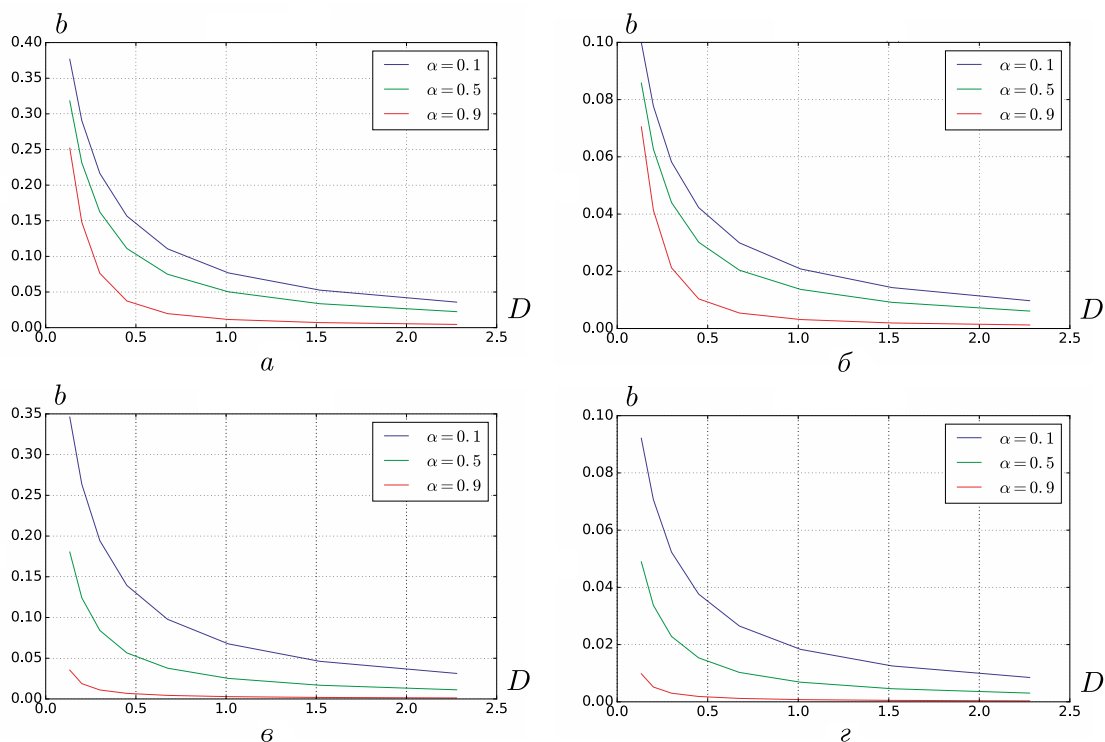


Рис. 3. Зависимость b от коэффициента диффузии D при задании разрывного начального условия (12) в финальные моменты времени $T = 1$ и $T = 4$:
 (а) $T = 1$, $AC(4)$; (б) $T = 1$, $AC(5)$; (в) $T = 4$, $AC(4)$; (г) $T = 4$, $AC(5)$

2. Решаем прямую задачу субдиффузии с известным предыдущим приближением коэффициента диффузии $\mathcal{A}(D_s, u) = f$, а затем находим невязку определения s -го приближения значения коэффициента диффузии из условия переопределения: $r_s = b - u_{i_*}^K$ при задании дополнительного условия (4) или

$$r_s = b - \sum_{i=1}^{n-1} w(x_i) y_i^K h$$

при задании дополнительного условия (5).

3. Вычисляем очередное приближение искомой величины:

$$D_{s+1} = \begin{cases} D_s + r_s & \text{при } s = 0, \\ D_s + r_s \frac{D_s - D_{s-1}}{r_s - r_{s-1}} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

4. Процесс повторяется до тех пор, пока не выполнится неравенство $|D_{s+1} - D_s| < \varepsilon$, в противном случае возвращаемся к п. 2, т. е. продолжаем итерационный процесс. Здесь ε — заданное достаточно маленькое положительное число.

6. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РЕШЕНИЯ МОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ ИДЕНТИФИКАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТА ДИФФУЗИИ

Численную реализацию предложенного итерационного метода идентификации коэффициента диффузии проведём на тех же двух модельных задачах с разными начальными условиями (12), (13), дополненных разными условиями переопределения (4), (5) и значениями порядка дробной производной по времени $\alpha = 0,1; 0,5; 0,9$. Отметим, что условия переопределения

получены из точных решений в виде конечной суммы тригонометрического ряда с коэффициентами, использующими функции Миттаг — Леффлёра. В условии выхода из итерационного цикла задано $\varepsilon = 10^{-7}$.

На рис. 4 представлены результаты расчёта по предложенному итерационному методу решения обратной задачи определения коэффициента диффузии начально-краевой задачи для уравнения субдиффузии с разными значениями порядка α дробной производной по времени с гладким и разрывным начальными условиями. Так, на рис. 4, *а*, *б* приведена зависимость найденного значения коэффициента диффузии D для разных значений α от номера итерации с гладким начальным условием (12), соответственно для дополнительных условий (4) и (5) в финальный момент времени $T = 4$, соответствующих искомому $D = 0,5$. Аналогичные численные результаты, полученные в случае задания разрывного начального условия (13), представлены на рис. 4, *в*, *г*. Видно, что итерационный процесс чрезвычайно быстро сходится, точность определения коэффициента диффузии с увеличением порядка дробной производной по времени α ухудшается, что хорошо согласуется с точностью используемой неявной разностной схемы (11), имеющей скорость сходимости порядка $O(\tau^{2-\alpha} + h^2)$.

Проведена идентификация коэффициента диффузии $D = 2$ при тех же условиях. Результаты счёта представлены на рис. 5. Итерации также быстро сходятся, Во всех вариантах счёта количество итераций не превышает семи. Приведённые результаты показывают, что предложенный итерационный метод идентификации коэффициента диффузии начально-краевой задачи для уравнения субдиффузии является достаточно эффективным.

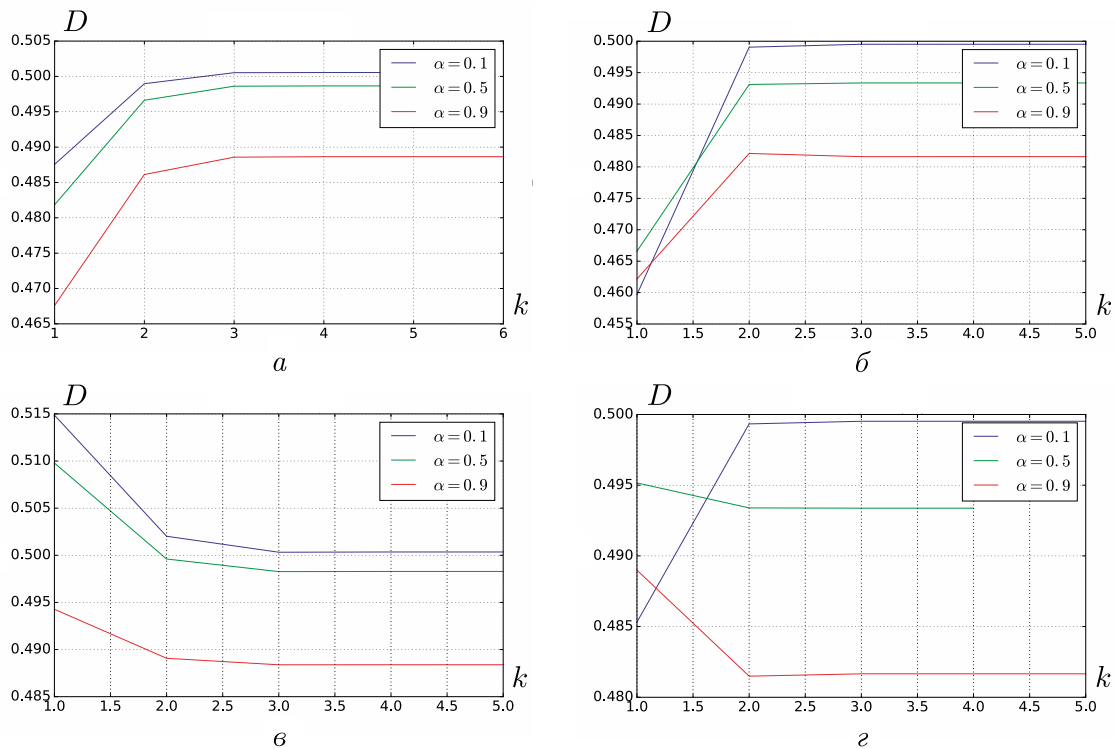


Рис. 4. Значения искомого коэффициента диффузии на каждой итерации для разных условий переопределения, начальных условий и порядка дробной производной при $D = 0,5$: (а) $AC(4), IC(12)$; (б) $AC(5), IC(12)$; (в) $AC(4), IC(13)$; (г) $AC(4), IC(13)$

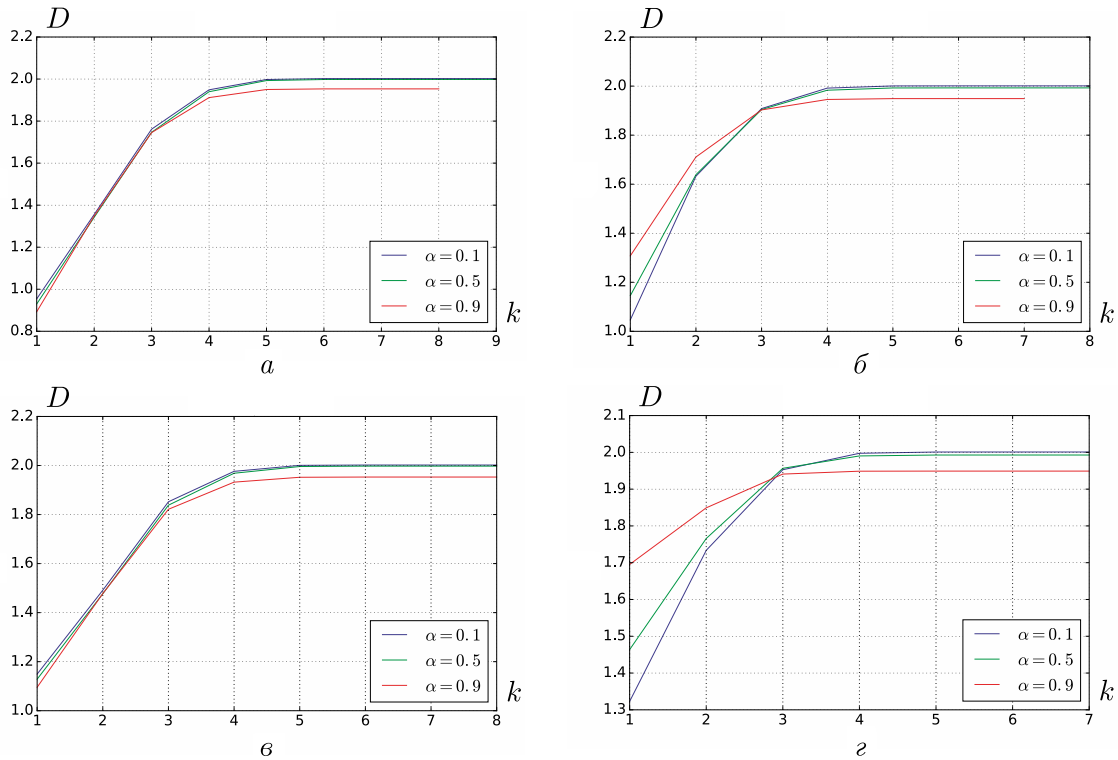


Рис. 5. Значения искомого коэффициента диффузии на каждой итерации для разных условий переопределения, начальных условий и порядка дробной производной при $D = 2$: (а) $AC(4)$, $IC(12)$; (б) $AC(5)$, $IC(12)$; (в) $AC(4)$, $IC(13)$; (г) $AC(4)$, $IC(13)$

7. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ ПРИ НЕТОЧНОМ ЗАДАНИИ УСЛОВИЙ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЯ

На практике решения прикладных обратных задач при задании условий переопределения, как правило, используются показания измерительных приборов (сенсоров). Современные промышленные сенсоры измерения концентрации газов и соли в воде обладают высокой точностью. Чтобы удостовериться в работоспособности предлагаемого итерационного метода идентификации коэффициента диффузии, решим обратную задачу с возмущёнными условиями переопределения. Ниже приведём некоторые результаты вычислительного эксперимента, проведённого на тех же модельных обратных задачах субдиффузии при задании различных входных данных и зашумлённых условий переопределения.

Проведённые численные расчёты по идентификации коэффициента диффузии при увеличении «шума» в условиях переопределения показали монотонное возрастание ошибки. На рис. 6 представлены наихудшие из всех вариантов счёта результаты, полученные при задании достаточно большого возмущения условий переопределения $b_\delta = (1 \pm \delta)$, $\delta = 0,01$ (один процент). Они получены при задании разрывного начального условия. Зависимости идентифицируемого коэффициента диффузии от номера итерации при $D = 0,5$ и разных значений порядка дробной производной приведены на рис. 6, а, б соответственно для $\delta = 0,01$ и $\delta = -0,01$. Аналогичные результаты при $D = 0,5$ представлены на рис. 6, в, г. Из приведённых графиков видно, что наибольшая из всех вариантов расчёта ошибка идентификации коэффициента диффузии порядка оказалась порядка 4% (рис.6, б). Они получены при задании разрывного начального условия (13) и интегрального условия переопределения (5). Отметим, что при задании гладкого начального условия точность определения коэффициента диффузии оказалась выше.

Поскольку в данном модельном примере дискретный аналог дробной производной Капуто по времени (8), (9) даёт приближение сверху, то при задании «шума» с $\delta = -0,01$ при

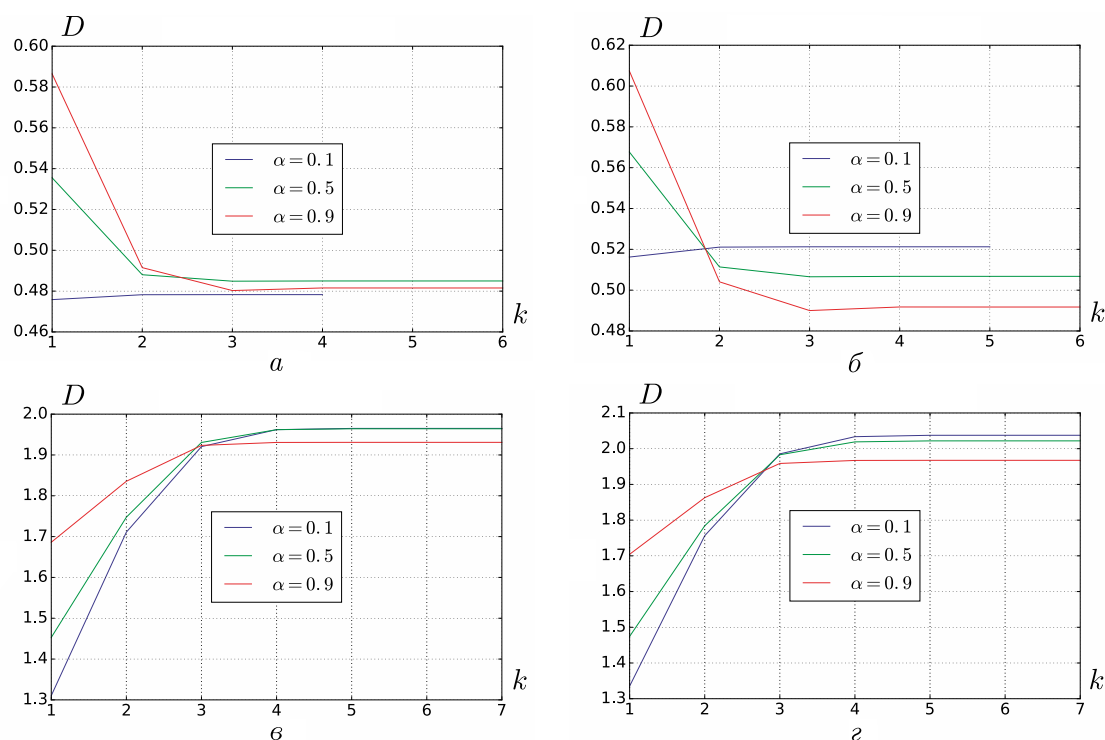


Рис. 6. Значения искомого коэффициента диффузии на каждой итерации для разных порядков дробной производной:

(а) $T = 4, D = 0,5, \delta = 1\%$; (б) $T = 4, D = 0,5, \delta = -1\%$;
 (в) $T = 4, D = 2, \delta = 1\%$; (г) $T = 4, D = 2, \delta = -1\%$;

малом значении порядка дробной производной $\alpha = 0,1$ получаем завышенный коэффициент диффузии, а при $\alpha = 0,9$ — заниженный. Таким образом, приходим к выводу, что для достаточного большого уровня возмущения дополнительных условий (4) или (5), значительно превышающих точность современных сенсоров определения концентрации соли и газов в воде, предложенный итерационный метод решения обратной задачи идентификации коэффициента диффузии D в начально-краевой задаче субдиффузии обеспечивает достаточно хорошую точность.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен итерационный метод секущих для решения обратной задачи идентификации коэффициента диффузии в начально-краевой задаче для уравнения субдиффузии с дробной производной Капуто по времени порядка α . На каждой итерации численно решается дискретный аналог прямой задачи, построенный методом конечных разностей. Представлены результаты численной реализации предложенного итерационного метода на модельных примерах с точными решениями для уравнения субдиффузии для разных начальных условий, условий переопределения и порядка α дробной производной по времени. Расчёты показали достаточно высокую эффективность предлагаемого итерационного метода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Podlubny I. Fractional Differential Equations. San Diego: Acad. Press, 1999. (Mathematics in Science and Engineering).
2. Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. Marcel: Dekker, 2000.

3. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматгиз, 2003.
4. *Kilbas A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam: Elsevier Sci., 2006. (North-Holland Mathematics Studies).
5. *Diethelm K.* The Analysis of Fractional Differential Equations. Berlin: Springer-Verl., 2010.
6. *Caputo M.* Lineal model of dissipation whose Q is almost frequency independent. Part II // *Geophys. J. Astronom. Soc.* 1967. V. 13. P. 529–539.
7. *Agrawal O. P.* Solution for a fractional diffusion-wave equation defined in a bounded domain // *Nonlinear Dynamics.* 2002. V. 29. P. 145–155; <https://doi.org/10.1023/A:1016539022492>
8. *Zhuang P., Liu F.* Implicit difference approximation for the time fractional diffusion equation // *J. Appl. Math. Comput.* 2006. V. 22, N 3. P. 87–99; DOI: 10.1007/bf02832039
9. *Lin Y., Xu C.* Finite difference/spectral approximations for the time-fractional diffusion equation // *J. Comput. Phys.* 2007. V. 225. P. 1533–1552; DOI:10.1016/j.jcp.2007.02.001
10. *Murio D. A.* Time fractional IHCP with Caputo fractional derivatives // *Comput. Math. Appl.* 2008. V. 56. P. 2371–2381; DOI.org/10.1016/j.camwa.2008.05.015
11. *Алиханов А. А.* A new difference scheme for the time fractional diffusion equation // *J. Comput. Phys.* 2015. V. 280. P. 424–438; DOI: 10.1016/j.jcp.2014.09.031
12. *Алиханов А. А.* Устойчивость и сходимость разностных схем для краевых задач уравнения диффузии дробного порядка // *Журн. вычисл. математики и мат. физики.* 2016. V. 56, N 4. С. 572–586; DOI: 10.7868/S0044466916040049
13. *Баззаев А. К., Цопанов И. Д.* Разностные схемы для дифференциальных уравнений с частными производными дробного порядка // *Уфим. мат. журн.* 2019. Т. 11, № 2. С. 19–35; DOI:10.13108/2019-11-2-19
14. *Головизнин В. М., Короткин И. А.* Методы численных решений некоторых одномерных уравнений с дробными производными // *Дифференц. уравнения.* 2006. V. 42, № 7. С. 907–913; DOI:10.1134/S0012266106070056
15. *Zecova M., Terpak J.* Heat conduction modeling by using fractional-order derivatives // *Appl. Math. Comput.* 2015. V. 257. P. 365–373; DOI: 10.1016/j.amc.2014.12.136
16. *Tikhonov A. N., Goncharsky A. V., Stepanov V. V., Yagola A. G.* Numerical Methods for the Solution of Ill-Posed Problems. Netherlands: Springer-Verl., 1995. (Mathematics and Its Applications).
17. *Samarskii A.A., Vabishchevich P. N.* Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics. Berlin: Walter de Gruyter, 2008. (Inverse and Ill-Posed Problems. Ser. 52).
18. *Kabanikhin S. I.* Inverse and Ill-posed Problems Theory and Applications. Berlin: Walter de Gruyter, 2011. (Inverse and Ill-Posed Problems. Ser. 55).
19. *Janno J.* Determination of the order of fractional derivative and a kernel in an inverse problem for a generalized time fractional diffusion equation // *Electron. J. Differ. Equ.* 2016. V. 199. P. 1–28; <http://ejde.math.txstate.edu> or <http://ejde.math.unt.edu>
20. *D’Ovidio M., Loreti P., Momenzadeh A., Ahrabi S.* Determination of order in linear fractional differential equations // *J. Fract. Calculus Appl. Anal.* 2018. V. 21, N 4. P. 937–948; DOI: 10.1515/fca-2018-0051
21. *Li Z., Yamamoto M.* Uniqueness for inverse problems of determining orders of multi-term time-fractional derivatives of diffusion equation // *Appl. Anal.* 2015. V. 94. P. 570–579; DOI:10.1080/00036811.2014.926335
22. *Бондаренко А. Н., Иващенко Д. С.* Методы численного решения краевых задач теории аномальной диффузии // *Сиб. электрон. мат. известия.* 2008. Т. 5. С. 581–594; <http://semr.math.nsc.ru>
23. *Li G., Zhang D., Jia X., Yamamoto M.* Simultaneous inversion for the space-dependent diffusion coefficient and the fractional order in the time-fractional diffusion equation // *Inverse Probl.* 2013. V. 29. P. 065014; DOI: 10.1088/0266-5611/29/6/065014
24. *Sun L., Yan X., Wei T.* Identification of time-dependent convection coefficient in a time-fractional diffusion equation // *J. Comput. Appl. Math.* 2019. V. 346. P. 505–517; DOI: 10.1016/j.cam.2018.07.029

25. *Kardashevsky A.* Fractional derivative order with respect to time for diffusion equation: an iterative method of determination // *J. Phys.: Conf. Series.* 2021. V. 1715. P. 012035; DOI:10.1088/1742-6596/1715/1/012035
26. *Васильев В. И., Кардашевский А. М.* Численная идентификация порядка дробной производной по времени модели субдиффузии // *Мат. заметки СВФУ.* 2020. Т. 27, № 4. С. 60–69; <https://doi.org/10.25587/SVFU.2020.98.14.005>
27. *Kozhanov A. I.* The heat transfer equation with an unknown heat capacity coefficient // *J. Appl. Indust. Math.* 2020. V. 23, N 1. P. 93–106; DOI: 10.33048/SIBJIM.2020.23.109

UDC 517.63

**ITERATIVE IDENTIFICATION OF THE DIFFUSION COEFFICIENT
IN AN INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEM
FOR THE SUBDIFFUSION EQUATION**

© 2021 V. I. Vasil'ev, A. M. Kardashevsky

Amosov North-Eastern Federal University, ul. Belinskogo 58, Yakutsk 677000, Russia

E-mails: ^avasvasil@mail.ru, ^bkardam123@gmail.com

Received 18.02.2021, revised 24.03.2021, accepted 15.04.2021

Abstract. We propose an iterative solution method for an implicit finite-difference analog of the inverse problem of identifying the diffusion coefficient in an initial boundary value problem for the subdiffusion equation with the fractional Caputo time derivative. We consider the two different ways of setting the overdetermination condition at the final time point: the value of the solution at some given point and a weighted integral of the solution. The results of numerical implementation of the iterative method are presented on model problems with exact solutions. These results confirm the sufficiently high accuracy of the method.

Keywords: Caputo fractional time derivative, subdiffusion equation, inverse problem, finite-difference method, identification of the diffusion coefficient, iterative secant method.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.202

REFERENCES

1. Podlubny I. Fractional Differential Equations. San Diego: Acad. Press, 1999. (Mathematics in Science and Engineering).
2. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. Marcel: Dekker, 2000.
3. Nakhushiev A.M. Elements of Fractional Calculus and Their Application. Moscow: Fizmatgiz, 2003 (in Russian).
4. Kilbas A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam: Elsevier, 2006.
5. Diethelm K. The Analysis of Fractional Differential Equations. Berlin: Springer-Verl., 2010.
6. Caputo M. Lineal model of dissipation whose Q is almost frequency independent. Part II. *Geophys. J. Astronom. Soc.*, 1967, Vol. 13, pp. 529–539.
7. Agrawal O.P. Solution for a fractional diffusion-wave equation defined in a bounded domain. *Nonlinear Dynamics*, 2002, Vol. 29, pp. 145–155; <https://doi.org/10.1023/A:1016539022492>
8. Zhuang P., Liu F. Implicit difference approximation for the time fractional diffusion equation. *J. Appl. Math. Comput.*, 2006, Vol. 22, No. 3, pp. 87–99; DOI: 10.1007/bf02832039
9. Lin Y., Xu C. Finite difference/spectral approximations for the time-fractional diffusion equation. *J. Comput. Phys.*, 2007, Vol. 225, pp. 1533–1552; DOI:10.1016/j.jcp.2007.02.001
10. Murio D.A. Time fractional IHCP with Caputo fractional derivatives. *Comput. Math. Appl.*, 2008, Vol. 56, pp. 2371–2381; DOI.org/10.1016/j.camwa.2008.05.015

11. Alikhanov A.A. A new difference scheme for the time fractional diffusion equation. *J. Comput. Phys.*, 2015, Vol. 280, pp. 424–438; DOI: 10.1016/j.jcp.2014.09.031
12. Alikhanov A.A. Stability and convergence of difference schemes for the boundary value problems of fractional diffusion equations. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2016, Vol. 56, No. 4, pp. 561–575.
13. Bazzaev A.K., Tsopanov I.D. Difference schemes for partial differential equations of fractional order. *Ufim. Mat. Zh.*, 2019, Vol. 11, No. 2, pp. 19–35 (in Russian); DOI:10.13108/2019-11-2-19
14. Goloviznin V.M., Korotkin I.A. Methods for numerical solution of some one-dimensional equations with fractional derivatives. *Differential Equations*, 2006, Vol. 42, No. 7, pp. 967–973.
15. Zecova M., Terpak J. Heat conduction modeling by using fractional-order derivatives. *Appl. Math. Comput.*, 2015, Vol. 257, pp. 365–373; DOI: 10.1016/j.amc.2014.12.136
16. Tikhonov A.N., Goncharky A.V., Stepanov V.V., Yagola A.G. Numerical Methods for the Solution of Ill-Posed Problems. Netherlands: Springer-Verl., 1995.
17. Samarskii A.A., Vabishchevich P.N. Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics. Berlin: Walter de Gruyter, 2008.
18. Kabanikhin S.I. Inverse and Ill-posed Problems Theory and Applications. Berlin: Walter de Gruyter, 2011.
19. Janno J. Determination of the order of fractional derivative and a kernel in an inverse problem for a generalized time fractional diffusion equation. *Electron. J. Differ. Equ.*, 2016, Vol. 199, pp. 1–28; <http://ejde.math.txstate.edu> or <http://ejde.math.unt.edu>
20. D’Ovidio M., Loreti P., Momenzadeh A., Ahrabi S. Determination of order in linear fractional differential equations. *J. Fract. Calculus Appl. Anal.*, 2018, Vol. 21, No. 4, pp. 937–948; DOI: 10.1515/fca-2018-0051
21. Li Z., Yamamoto M. Uniqueness for inverse problems of determining orders of multi-term time-fractional derivatives of diffusion equation. *Appl. Anal.*, 2015, Vol. 94, pp. 570–579; DOI:10.1080/00036811.2014.926335
22. Bondarenko A.N., Ivashchenko D.S. Methods for the numerical solution of boundary value problems in theory of anomalous diffusion. *Sib. Electron. Mat. Izv.*, 2008, Vol. 5, pp. 581–594 (in Russian); <http://semr.math.nsc.ru>
23. Li G., Zhang D., Jia X., Yamamoto M. Simultaneous inversion for the space-dependent diffusion coefficient and the fractional order in the time-fractional diffusion equation. *Inverse Probl.*, 2013, Vol. 29, pp. 065014; DOI: 10.1088/0266-5611/29/6/065014
24. Sun L., Yan X., Wei T. Identification of time-dependent convection coefficient in a time-fractional diffusion equation. *J. Comput. Appl. Math.*, 2019, Vol. 346, pp. 505–517; DOI: 10.1016/j.cam.2018.07.029
25. Kardashevsky A. Fractional derivative order with respect to time for diffusion equation: an iterative method of determination. *J. Phys.: Conf. Series*, 2021, Vol. 1715, pp. 012035; DOI:10.1088/1742-6596/1715/1/012035
26. Vasil’ev V.I., Kardashevskii A.M. Numerical identification of order of the fractional time derivative in a subdiffusion model. *Mat. Zametki Sev.-Vost. Fed. Univ.*, 2020, Vol. 27, No. 4, pp. 60–69 (in Russian); <https://doi.org/10.25587/SVFU.2020.98.14.005>
27. Kozhanov A.I. The heat transfer equation with an unknown heat capacity coefficient. *J. Appl. Indust. Math.*, 2020, Vol. 23, No. 1, pp. 104–114.