УДК 517.968.72

ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЯДЕР В СИСТЕМЕ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

© 2021 **Д. К. Дурдиев**[1a], **Х. Х. Турдиев**[2b]

[1] *Бухарский филиал Института математики АН Республики Узбекистан, ул. М. Икбола, 11, Бухара 200117, Узбекистан,*
[2] *Бухарский государственный университет, ул. М. Икбола, 11, Бухара 200117, Узбекистан*

E-mails: [a]durdiev65@mail.ru, [b]hturdiev@mail.ru

Поступила в редакцию 13.01.2021 г.; после доработки 11.02.2021 г.;
принята к публикации 15.04.2021 г.

Для приведённой канонической системы интегродифференциальных уравнений Максвелла ставятся прямая и обратная задачи определения поля электромагнитного напряжения и диагональной матрицы памяти. Задачи заменяются замкнутой системой интегральных уравнений второго рода вольтерровского типа относительно Фурье-образа по переменным x_1, x_2 решения прямой задачи и неизвестных обратной задачи. Далее к этой системе применяется метод сжимающих отображений в пространстве непрерывных функций с весовой нормой. Таким образом, доказываются глобальные теоремы существования и единственности решений поставленных задач.

Ключевые слова: гиперболическая система, система уравнений Максвелла, интегральное уравнение, принцип сжатых отображений.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.203

Распространение различных волн описывается гиперболическими системами уравнений первого порядка. Такое явление в средах с последействием, вообще говоря, зависит от предшествующего состояния процесса. Примером может служить явление распространения электромагнитных волн в средах с дисперсией. Оказывается, что в таких средах нарушается однозначная зависимость D и B (индукции электрического и магнитного полей соответственно) от значений E и H (напряжённости соответствующих полей) в тот же момент времени. Наиболее общий вид линейной зависимости между $D(x,t)$, $B(x,t)$ и соответствующими значениями функций $E(x,t)$, $H(x,t)$ во все предыдущие моменты времени может быть записан в виде интегральных соотношений [1, с. 357–376]:

$$D(x,t) = \hat{\varepsilon}E + \int\limits_0^t \varphi(t-\tau)E(x,\tau)\,d\tau, \quad B(x,t) = \hat{\mu}H + \int\limits_0^t \psi(t-\tau)H(x,\tau)\,d\tau, \tag{1}$$

здесь $E = (E_1, E_2, E_3)$, $H = (H_1, H_2, H_3)$, $D = (D_1, D_2, D_3)$, $B = (B_1, B_2, B_3)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $\varphi(t) = \operatorname{diag}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, $\psi(t) = \operatorname{diag}(\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ — диагональные матрицы, представляющие память.

В произвольной анизотропной среде с дисперсией система уравнений Максвелла имеет вид

$$\nabla \times H = \frac{\partial}{\partial t}D(x,t) + \hat{\sigma}E + J, \quad \nabla \times E = -\frac{\partial}{\partial t}B(x,t), \quad \operatorname{div} B = 0, \quad \operatorname{div} D = \rho. \tag{2}$$

Матрицы $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{\mu}$ будем предполагать положительно определёнными, симметрическими, зависящими только от координаты x_3; $\hat{\sigma}$ — постоянная матрица. В первом уравнении (2) $J = J(x,t)$ —

вектор-функция, характеризующая плотность стороннего тока. Третье уравнение в (2) является следствием второго уравнение и условия

$$\operatorname{div}(\hat{\mu}H)|_{t=0} = 0. \tag{3}$$

В самом деле, применяя операцию div ко вторым уравнениям (2), с учётом равенства $\operatorname{div}(\nabla \times E) = 0$ имеем $\dfrac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div} B) = 0$. Отсюда, интегрируя последнее равенство при условии (3), приходим к третьему равенству в (2). Четвёртое уравнение в (2) определяет плотность электрических зарядов после того, как найдено распределения индукции электрического поля.

Полагая, что условие (3) выполнено, будем рассматривать систему (1), (2) как самостоятельный объект исследование. Запишем её в виде симметрической гиперболической системы:

$$A_0 \frac{\partial}{\partial t} U + \sum_{j=1}^{3} A_j \frac{\partial}{\partial x_j} U + A_4 U = \int_0^t K(t-\tau) U(x,\tau)\, d\tau + \hat{J}(x,t), \tag{4}$$

в которой $U = (U_1, \ldots, U_6)^*$ — вектор-столбец с компонентами $U_k = E_k$, $U_{k+3} = H_k$, $k = \overline{1,3}$, A_j, $j = \overline{0,4}$, — симметрические матрицы, причём A_0 — положительно определена; $K(t) = \operatorname{diag}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1, \psi_2, \psi_3)$, $J = (\chi_1, \ldots, \chi_6)^*$ — вектор-столбец с компонентами $\chi_k = \chi_k(x,t)$, $\chi_{k+3} = 0$, $k = \overline{1,3}$, χ_k — заданные достаточно гладкие функции. Матрицы A_j имеют клеточную структуру:

$$\begin{gathered}
A_0 = \begin{pmatrix} \hat{\varepsilon} & 0 \\ 0 & \hat{\mu} \end{pmatrix}_{6\times 6}, \quad A_j = \begin{pmatrix} 0 & p_j \\ p_j^* & 0 \end{pmatrix}_{6\times 6}, \quad j = 1,2,3, \\
p_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
p_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} \varphi(0) + \hat{\sigma} & 0 \\ 0 & \psi(0) \end{pmatrix}_{6\times 6}, \quad K(t) = \begin{pmatrix} -\varphi'(t) & 0 \\ 0 & -\psi'(t) \end{pmatrix}_{6\times 6}, \\
U = (E,H)^*, \quad \hat{J} = (-J, 0_{1\times 3})^*,
\end{gathered} \tag{5}$$

$*$ — символ транспонирования; $0_{1\times 3}$ обозначает вектор-строку $(0;0;0)$.

Умножая уравнение (4) слева на обратную матрицу A_0^{-1}, получим

$$I_6 \frac{\partial}{\partial t} U + \sum_{j=1}^{3} B_j \frac{\partial}{\partial x_j} U + B_4 U = \int_0^t K_0(x_3, t-\tau) U(x,\tau) d\tau + J_0. \tag{6}$$

Здесь и в дальнейшем I_6 означает единичную матрицу порядка 6, $B_j = A_0^{-1} A_j$, $j = \overline{1,4}$.

Введём обозначения:

$$\varepsilon = \hat{\varepsilon}^{-1} = (\varepsilon_{ij}), \quad \mu = \hat{\mu}^{-1} = (\mu_{ij}), \quad \sigma = \varepsilon\hat{\sigma} = (\sigma_{ij}). \tag{7}$$

В соответствии с (4) имеем

$$\begin{gathered}
B_j = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon p_j \\ \mu p_j^* & 0 \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1,3}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} \varepsilon\varphi(0) + \sigma & 0 \\ 0 & \mu\psi(0) \end{pmatrix}, \quad J_0 = A_0^{-1}\hat{J}, \\
K_0(x_3, t) = A_0^{-1} K(x_3, t) = \begin{pmatrix} -\varepsilon\varphi'(t) & 0 \\ 0 & -\mu\psi'(t) \end{pmatrix}.
\end{gathered}$$

Систему (6) приведём к каноническому виду. Как известно из линейной алгебры [2, с. 149–153], в рассматриваемом случае существует такая невырожденная матрица T, что $T^{-1}B_3T = \Lambda$, где Λ — диагональная матрица, на диагонали которой стоят собственные числа матрицы B_3.

В [3, с. 5–20] построена матрица T, обладающая вышеописанными свойствами. Она имеет вид

$$T(x_3) = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & q_2 & 0 & 0 \\ q_3 & q_4 & q_3 & q_4 & 1 & 0 \\ 0 & 1/q_2 & 0 & -1/q_2 & 0 & 0 \\ -1/q_1 & 0 & 1/q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где

$$q_1 = \left(\frac{\varepsilon_{11}}{\mu_{22}}\right)^{1/4}, \quad q_2 = \left(\frac{\varepsilon_{22}}{\mu_{11}}\right)^{1/4}, \quad q_3 = \frac{\varepsilon_{31}}{\varepsilon_{11}^{3/4}\mu_{22}^{1/4}}, \quad q_4 = \frac{\varepsilon_{32}}{\varepsilon_{22}^{3/4}\mu_{11}^{1/4}}. \tag{9}$$

Отметим, что матрица T определяется неединственным образом.

Обратная матрица к T определяется формулой

$$T^{-1}(x_3) = \begin{pmatrix} 1/2q_1 & 0 & 0 & 0 & -q_1/2 & 0 \\ 0 & 1/2q_2 & 0 & q_2/2 & 0 & 0 \\ 1/2q_1 & 0 & 0 & 0 & q_1/2 & 0 \\ 0 & 1/2q_2 & 0 & -q_2/2 & 0 & 0 \\ -q_3/q_1 & -q_4/q_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Введём в уравнении (6) новую функцию с помощью равенства

$$U = T\overline{U} \tag{11}$$

и умножим это уравнение слева на матрицу T^{-1}. Тогда для функции $\overline{U}$ получим уравнение

$$\left(I_6\frac{\partial}{\partial t} + \Lambda\frac{\partial}{\partial x_3} + \sum_{j=1}^{2} C_j\frac{\partial}{\partial x_j} + C\right)\overline{U} = \int\limits_0^t \overline{K}(x_3, t-\tau)\overline{U}(x,\tau)\,d\tau + F, \tag{12}$$

где

$$\begin{gathered} C = C_0 + C_4, \quad C_0 = T^{-1}B_3\frac{\partial}{\partial x_3}T, \quad C_i = T^{-1}B_iT, \quad i=\overline{1,4}, \quad C_3 = \Lambda = \sqrt{p}\Lambda_0, \\ p = \varepsilon_{11}\mu_{22} = \varepsilon_{22}\mu_{11}, \quad \Lambda_0 = \operatorname{diag}(-1,-1,1,1,0,0), \\ \overline{K}(x_3,t) = T^{-1}K_0(x_3,t)T = (\overline{a}_{ij})_{i,j=1}^6(x_3,t), \quad F = T^{-1}J_0. \end{gathered} \tag{13}$$

Используя вытекающие из равенств (13) следствия для элементов матриц ε, μ

$$\begin{gathered} \varepsilon_{11} = q_1^2\sqrt{p}, \quad \varepsilon_{12} = 0, \quad \varepsilon_{13} = q_1q_3\sqrt{p}, \quad \varepsilon_{22} = q_2^2\sqrt{p}, \quad \varepsilon_{23} = q_2q_4\sqrt{p}, \\ \mu_{11} = q_2^{-2}\sqrt{p}, \quad \mu_{22} = q_1^{-2}\sqrt{p} \end{gathered} \tag{14}$$

и вводя дополнительные обозначения с помощью равенств

$$\varepsilon_{33} = \left(q_3^2 + q_4^2 + \frac{1}{2}q_5\right)\sqrt{p}, \quad \mu_{33} = \frac{1}{2}\frac{q_6\sqrt{p}}{q_1q_2}, \tag{15}$$

матрицы C_i, входящие в (12), можно записать в виде

$$C_1 = \frac{\sqrt{p}}{2q_1}\begin{pmatrix} 2q_3 & q_4 & 0 & q_4 & 1 & 0 \\ q_4 & 0 & -q_4 & 0 & 0 & q_1q_2 \\ 0 & -q_4 & -2q_3 & -q_4 & -1 & 0 \\ q_4 & 0 & -q_4 & 0 & 0 & q_1q_2 \\ q_5 & 0 & -q_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_6 & 0 & q_6 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ C_2 = \frac{\sqrt{p}}{2q_2}\begin{pmatrix} 0 & q_3 & 0 & -q_3 & 0 & -q_1q_2 \\ q_3 & 2q_4 & q_3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & q_3 & 0 & -q_3 & 0 & -q_1q_2 \\ -q_3 & 0 & -q_3 & -2q_4 & -1 & 0 \\ 0 & q_5 & 0 & -q_5 & 0 & 0 \\ -q_6 & 0 & -q_6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_0 = \frac{\sqrt{p}}{2q_2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\dfrac{\partial}{\partial x_3}\ln q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{\partial}{\partial x_3}\ln q_2 & 0 & 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_3}\ln q_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial x_3}\ln q_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ C_4 = \big(\varkappa_{ij} + M_{ij}\big)_{i,j=1}^{6}.$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\varkappa_{11} = \varkappa_{33} = \frac{\sqrt{p}}{2}\left(q_1^2\varphi_1(0) + q_3^2\varphi_3(0) + \frac{\psi_2(0)}{q_1^2}\right), \quad \varkappa_{13} = \varkappa_{31} = \frac{\sqrt{p}}{2}\left(q_1^2\varphi_1(0) + q_3^2\varphi_3(0) - \frac{\psi_2(0)}{q_1^2}\right),$$

$$\varkappa_{12} = \varkappa_{14} = \varkappa_{21} = \varkappa_{23} = \varkappa_{32} = \varkappa_{34} = \varkappa_{41} = \varkappa_{43} = \frac{\sqrt{p}}{2}q_3q_4\varphi_3(0), \quad \varkappa_{15} = \varkappa_{35} = \frac{\sqrt{p}}{2}q_3\varphi_3(0),$$

$$\varkappa_{22} = \varkappa_{44} = \frac{\sqrt{p}}{2}\left(q_2^2\varphi_2(0) + q_4^2\varphi_3(0) + \frac{\psi_1(0)}{q_2^2}\right), \quad \varkappa_{24} = \varkappa_{42} = \frac{\sqrt{p}}{2}\left(q_2^2\varphi_2(0) + q_4^2\varphi_3(0) - \frac{\psi_1(0)}{q_2^2}\right),$$

$$\varkappa_{25} = \varkappa_{45} = \frac{\sqrt{p}}{2}q_4\varphi_3(0), \quad \varkappa_{51} = \varkappa_{53} = \frac{\sqrt{p}}{2}q_3q_5\varphi_3(0), \quad \varkappa_{52} = \varkappa_{54} = \frac{\sqrt{p}}{2}q_4q_5\varphi_3(0),$$

$$\varkappa_{55} = \frac{\sqrt{p}}{2}q_5\varphi_3(0), \quad \varkappa_{6j} = \varkappa_{j6} = 0,\ j = \overline{1,5}, \quad \varkappa_{66} = \sqrt{p}\frac{q_6\psi_3(0)}{q_1q_2};$$

$$M_{11} = M_{13} = M_{31} = M_{33} = \frac{1}{2q_1}(\sigma_{11}q_1 + \sigma_{13}q_3),$$

$$M_{12} = M_{14} = M_{32} = M_{34} = \frac{1}{2q_1}(\sigma_{12}q_2 + \sigma_{13}q_3), \quad M_{15} = \frac{1}{2q_1}\sigma_{13},$$

$$M_{21} = M_{23} = M_{41} = M_{43} = \frac{1}{2q_2}(\sigma_{21}q_1 + \sigma_{23}q_3), \quad M_{25} = \frac{1}{2q_2}\sigma_{23},$$

$$M_{22} = M_{24} = M_{42} = M_{44} = \frac{1}{2q_2}(\sigma_{22}q_2 + \sigma_{23}q_4),$$

$$M_{51} = M_{53} = \left(-\sigma_{11}\frac{q_3}{q_1} - \sigma_{21}\frac{q_4}{q_2} + \sigma_{31}\right)q_1 + \left(-\sigma_{13}\frac{q_3}{q_1} - \sigma_{23}\frac{q_4}{q_2} + \sigma_{33}\right)q_3,$$

$$M_{52} = M_{54} = \left(-\sigma_{12}\frac{q_3}{q_1} - \sigma_{22}\frac{q_4}{q_2} + \sigma_{32}\right)q_2 + \left(-\sigma_{13}\frac{q_3}{q_1} - \sigma_{23}\frac{q_4}{q_2} + \sigma_{33}\right)q_4,$$

$$M_{55} = -\sigma_{13}\frac{q_3}{q_1} - \sigma_{23}\frac{q_4}{q_2} + \sigma_{33}, \quad M_{6j} = M_{j6} = 0, \quad j = \overline{1,5}, \quad M_{66} = 0.$$

Компоненты $\overline{K}(x_3, t)$ имеют вид

$$\bar{a}_{11}(x_3, t) = \bar{a}_{33}(x_3, t) = \frac{\sqrt{p(x_3)}}{2}\left(q_1^2(x_3)\varphi_1'(t) + q_3^2(x_3)\varphi_3'(t) + \frac{\psi_2'(t)}{q_1^2(x_3)}\right),$$

$$\bar{a}_{13}(x_3,t)=\bar{a}_{31}(x_3,t)=\frac{\sqrt{p(x_3)}}{2}\left(q_1^2(x_3)\varphi_1^{'}(t)+q_3^2(x_3)\varphi_3^{'}(t)-\frac{\psi_2^{'}(t)}{q_1^2(x_3)}\right),$$

$$\begin{aligned}\bar{a}_{12}(x_3,t)&=\bar{a}_{14}(x_3,t)=\bar{a}_{21}(x_3,t)=\bar{a}_{23}(x_3,t)\\&=\bar{a}_{32}(x_3,t)=\bar{a}_{34}(x_3,t)=\bar{a}_{41}(x_3,t)=\bar{a}_{43}(x_3,t)=\frac{\sqrt{p(x_3)}}{2}q_3(x_3)q_4(x_3)\varphi_3^{'}(t),\end{aligned}$$

$$\bar{a}_{15}=\bar{a}_{35}=\frac{\sqrt{p(x_3)}}{2}q_3(x_3)\varphi_3^{'}(t),$$

$$\bar{a}_{22}(x_3,t)=\bar{a}_{44}(x_3,t)=\frac{\sqrt{p(x_3)}}{2}\left(q_2^2(x_3)\varphi_2^{'}(t)+q_4^2(x_3)\varphi_3^{'}(t)+\frac{\psi_1^{'}(t)}{q_2^2(x_3)}\right),$$

$$\bar{a}_{24}(x_3,t)=\bar{a}_{42}(x_3,t)=\frac{\sqrt{p(x_3)}}{2}\left(q_2^2(x_3)\varphi_2^{'}(t)+q_4^2(x_3)\varphi_3^{'}(t)-\frac{\psi_1^{'}(t)}{q_2^2(x_3)}\right),$$

$$\bar{a}_{25}(x_3,t)=\bar{a}_{45}(x_3,t)=\frac{\sqrt{p(x_3)}}{2}q_4(x_3)\varphi_3^{'}(t),\quad \bar{a}_{51}(x_3,t)=\bar{a}_{53}(x_3,t)=\frac{\sqrt{p(x_3)}}{2}q_3(x_3)q_5(x_3)\varphi_3^{'}(t),$$

$$\bar{a}_{52}(x_3,t)=\bar{a}_{54}(x_3,t)=\frac{\sqrt{p(x_3)}}{2}q_4(x_3)q_5(x_3)\varphi_3^{'}(t),\quad \bar{a}_{55}(x_3,t)=\frac{\sqrt{p(x_3)}}{2}q_5(x_3)\varphi_3^{'}(t),$$

$$\bar{a}_{k6}(x_3,t)=\bar{a}_{6k}(x_3,t)=0,\quad k=\overline{1,5},\quad \bar{a}_{66}(x_3,t)=\sqrt{p(x_3)}\frac{q_6(x_3)\psi_3^{'}(t)}{q_1(x_3)q_2(x_3)}.$$

Введём новую переменную z с помощью формулы

$$z=\nu(x_3)=\int\limits_0^{x_3}\frac{d\xi}{\sqrt{p(\xi)}}. \tag{16}$$

Обозначим через $\nu^{-1}(z)$ функцию, обратную к $\nu(x_3)$, и пусть

$$V(x_1,x_2,z,t):=\overline{U}(x_1,x_2,\nu^{-1}(z),t),\quad \widehat{C}_j(z):=C_j(\nu^{-1}(z)),\quad \widehat{C}(z)=C(\nu^{-1}(z)),$$
$$\widehat{K}(z,t):=\overline{K}(\nu^{-1}(z),t),\quad \widehat{F}(x_1,x_2,z):=F(x_1,x_2,\nu^{-1}(z)),$$
$$a_{ij}(z,t):=\bar{a}_{ij}(\nu^{-1}(z),t),\quad i,j=\overline{1,6}.$$

Тогда система (12) принимает вид

$$\left(I_6\frac{\partial}{\partial t}+\Lambda_0\frac{\partial}{\partial z}+\sum_{j=1}^{2}\widetilde{C}_j\frac{\partial}{\partial x_j}+\widetilde{C}\right)V=\int\limits_0^t\widehat{K}(z,t-\tau)V(x_1,x_2,z,\tau)\,d\tau+\widehat{F}(x_1,x_2,z,t). \tag{17}$$

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В прямой задаче при заданных матрицах $\widehat{K}$, $\widehat{C}_1$, $\widehat{C}_2$, $\widehat{C}$ и вектор-функции $\widehat{F}$ требуется определить в области $D=\{(x_1,x_2,z,t)\mid 0<z<L,\, t>0,\, (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\}$ вектор-функцию $V(z,t)$, удовлетворяющую уравнению (17) при следующих начальных и граничных условиях:

$$V_i(x_1,x_2,z,t)|_{t=0}=\phi_i(x_1,x_2,z),\quad i=\overline{1,6}, \tag{18}$$

$$V_i(x_1,x_2,z,t)|_{z=0}=g_i(x_1,x_2,t),\quad i=1,2,\quad V_i(x_1,x_2,z,t)|_{z=L}=g_i(x_1,x_2,t),\quad i=3,4, \tag{19}$$

где $\phi(x_1,x_2,z)=(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_6)(x_1,x_2,z)$ и $g(x_1,x_2,t)=(g_1,g_2,\ldots,g_6)(x_1,x_2,t)$ — заданные функции.

Замечание 1. Для заданных начальных условий равенство (3) принимает вид

$$\operatorname{div}\left(\hat{\mu}(z)\begin{pmatrix}\dfrac{1}{q_2}(\phi_2(x_1,x_2,z)-\phi_4(x_1,x_2,z))\\ \dfrac{1}{q_1}(\phi_3(x_1,x_2,z)-\phi_1(x_1,x_2,z))\\ \phi_6(x_1,x_2,z)\end{pmatrix}\right)=0. \tag{20}$$

Обратную задачу поставим следующем образом: найти функции $\varphi_i(t)$, $\psi_i(t)$, $t>0$, $i=1,2,3$, входящие в матрицу $\widetilde{K}$, если относительно решения задачи (17)–(19) известны дополнительные условия

$$V_i(x_1,x_2,z,t)|_{z=L}=h_i(x_1,x_2,t),\quad i=1,2;\quad V_i(x_1,x_2,z,t)|_{z=0}=h_i(x_1,x_2,t),\quad i=\overline{3,6}. \tag{21}$$

При этом $\varphi_i(0)$ и $\psi_i(0)$ считаются заданными.

Замечание 2. Как следует из (8), (11) и (16), вектор-функция V выражается через $(E,H)^*$ по формуле

$$V(x_1,x_2,z,t)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2q_1}E_1-\dfrac{q_1}{2}H_2\\ \dfrac{1}{2q_2}E_2+\dfrac{q_2}{2}H_1\\ \dfrac{1}{2q_1}E_1+\dfrac{q_1}{2}H_2\\ \dfrac{1}{2q_2}E_2-\dfrac{q_2}{2}H_1\\ -\dfrac{q_3}{q_1}E_1-\dfrac{q_4}{q_2}E_2+E_3\\ H_6\end{pmatrix}(x_1,x_2,\nu^{-1}(z),t).$$

Граничные и дополнительные условия (19), (21) в терминах вектор-функции $(E,H)^*$ принимают вид

$$(E_i,H_i)^*(x_1,x_2,\nu^{-1}(z),t)|_{z=0}=T(0)\times(g_1,g_2,h_3,h_4,h_5,h_6)^*(x_1,x_2,t);$$
$$(E_i,H_i)^*(x_1,x_2,\nu^{-1}(z),t)|_{z=L}=T(\nu^{-1}(L))\times(h_1,h_2,g_3,g_4,g_5,g_6)^*(x_1,x_2,t),\quad i=\overline{1,3}.$$

К настоящему времени достаточно широко изучены задачи определения ядер из одного интегродифференциального уравнения второго порядка [4–23]. Численное решение прямых и обратных задач для таких уравнений исследовались в работах [24–38]. Как правило, уравнения второго порядка выводятся из систем уравнений в частных производных первого порядка при некоторых дополнительных предположениях.

Обратная задача определения ядер интегральных членов из системы интегродифференциальных уравнений первого порядка общего вида с двумя независимыми переменными изучена в [39]. Получена теорема локального существования и глобальной единственности.

Представляется совершенно естественным изучение обратных задач об определении ядер интегральных членов системы интегродифференциальных уравнений проводить непосредственно в терминах самой системы. Настоящая работа является естественным продолжением этого круга задач и в известной мере обобщает результаты [39] на случай системы уравнений Максвелла с памятью (1), (2).

Пусть функции $\widetilde{F}(x_1,x_2,z,t)$, $\phi_i(x_1,x_2,z)$, $g_i(x_1,x_2,t)$, входящие в правую часть (17), и данные (18), (19) финитны по x_1, x_2 при каждом фиксированном z, t. Из существования для системы (17) конечной области зависимости и финитности по x_1, x_2 правой части (17) и данных (18), (19) следует финитность по x_1, x_2 решений задачи (17)–(19).

Изучим свойство решения этой задачи. Более точно, мы ограничимся изучением образа Фурье по переменным x_1, x_2 решения. Обозначим

$$\begin{aligned}\widetilde{V}(\eta_1,\eta_2,z,t) &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} V(x_1,x_2,z,t)e^{i[\eta_1 x_1+\eta_2 x_2]}\,dx_1dx_2,\\ \widetilde{F}(\eta_1,\eta_2,z,t) &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} \widehat{F}(x_1,x_2,z,t)e^{i[\eta_1 x_1+\eta_2 x_2]}\,dx_1dx_2,\end{aligned} \tag{22}$$

где η_1, η_2 — параметры преобразования.

В терминах функции $\widetilde{V}$ задачу (17)–(19) запишем в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial \widetilde{V}_i}{\partial t}+\gamma_i\frac{\partial \widetilde{V}_i}{\partial z} = -\sum_{j=1}^{6} b_{ij}(\eta_1,\eta_2,z)\widetilde{V}_j(\eta_1,\eta_2,z,t)\\ +\int\limits_0^t\sum_{j=1}^{6} a_{ij}(z,\tau)\widetilde{V}_j(\eta_1,\eta_2,z,t-\tau)\,d\tau + F_i(\eta_1,\eta_2,z,t), \quad i=1,2,3,4,\end{aligned} \tag{23}$$

$$\frac{\partial \widetilde{V}_i}{\partial t} = -\sum_{j=1}^{6} b_{ij}(\eta_1,\eta_2,z)\widetilde{V}_j(\eta_1,\eta_2,z,t)+\int\limits_0^t\sum_{j=1}^{6} a_{ij}(z,\tau)\widetilde{V}_j(\eta_1,\eta_2,z,t-\tau)\,d\tau, \quad i=5,6. \tag{24}$$

Здесь γ_i принимает вещественные значения: $\gamma_i = \begin{cases}-1, & i=1,2,\\ 1, & i=3,4,\end{cases}$ коэффициенты b_{ij} определяются следующим образом:

$$b_{11} = \varkappa_{11}+M_{11}-i\eta_1\frac{q_3\sqrt{p}}{q_1}, \quad b_{12} = \varkappa_{12}+M_{12}-i\eta_1\frac{q_4\sqrt{p}}{2q_1}-i\eta_2\frac{q_3\sqrt{p}}{2q_2},$$

$$b_{13} = \varkappa_{13}+M_{13}-\frac{\sqrt{p}}{2q_2}\frac{q_1'}{q_1}, \quad b_{14} = \varkappa_{14}+M_{14}-i\eta_1\frac{q_4\sqrt{p}}{2q_1}+i\eta_2\frac{q_3\sqrt{p}}{2q_2},$$

$$b_{15} = \varkappa_{15}+M_{15}-i\eta_1\frac{\sqrt{p}}{2q_1}, \quad b_{16} = \varkappa_{16}+M_{16}-\frac{i\eta_2}{2}q_1\sqrt{p},$$

$$b_{21} = \varkappa_{21}+M_{21}-i\eta_1\frac{q_4\sqrt{p}}{2q_1}-i\eta_2\frac{q_3\sqrt{p}}{2q_2}, \quad b_{22} = \varkappa_{22}+M_{22}-i\eta_2\frac{q_4\sqrt{p}}{q_2},$$

$$b_{23} = \varkappa_{23}+M_{23}+i\eta_1\frac{q_4\sqrt{p}}{2q_1}-i\eta_2\frac{q_3\sqrt{p}}{2q_2}, \quad b_{24} = \varkappa_{24}+M_{24}-\frac{q_1'\sqrt{p}}{2q_2^2},$$

$$b_{25} = \varkappa_{25}+M_{25}-i\eta_1\frac{\sqrt{p}}{2q_2}, \quad b_{26} = \varkappa_{26}+M_{26}-\frac{i\eta_1}{2}q_2\sqrt{p},$$

$$b_{31} = \varkappa_{31}+M_{31}-\frac{\sqrt{p}}{2q_2}\frac{q_1'}{q_1}, \quad b_{32} = \varkappa_{32}+M_{32}+i\eta_1\frac{q_4\sqrt{p}}{2q_1}-i\eta_2\frac{q_3\sqrt{p}}{2q_2},$$

$$b_{33} = \varkappa_{33}+M_{33}+i\eta_1\frac{q_3\sqrt{p}}{q_1}, \quad b_{34} = \varkappa_{34}+M_{34}+i\eta_1\frac{q_4\sqrt{p}}{2q_1}+i\eta_2\frac{q_3\sqrt{p}}{2q_2},$$

$$b_{35} = \varkappa_{35}+M_{35}+i\eta_1\frac{\sqrt{p}}{2q_1}, \quad b_{36} = \varkappa_{36}+M_{36}-\frac{i\eta_1}{2}q_1\sqrt{p},$$

$$b_{41} = \varkappa_{41}+M_{41}-i\eta_1\frac{q_4\sqrt{p}}{2q_1}+i\eta_2\frac{q_3\sqrt{p}}{2q_2}, \quad b_{42} = \varkappa_{42}+M_{42}-\frac{q_1'\sqrt{p}}{2q_2^2},$$

$$b_{43} = \varkappa_{43} + M_{43} + i\eta_1 \frac{q_4\sqrt{p}}{2q_1} + i\eta_2 \frac{q_3\sqrt{p}}{2q_2}, \quad b_{44} = \varkappa_{44} + M_{44} + i\eta_2 \frac{q_4\sqrt{p}}{q_2},$$

$$b_{45} = \varkappa_{45} + M_{45} + i\eta_2 \frac{\sqrt{p}}{2q_2}, \quad b_{46} = \varkappa_{46} + M_{46} - \frac{i\eta_1}{2} q_2\sqrt{p},$$

$$b_{51} = \varkappa_{51} + M_{51} - i\eta_1 \frac{q_5\sqrt{p}}{2q_1}, \quad b_{52} = \varkappa_{52} + M_{52} - i\eta_2 \frac{q_5\sqrt{p}}{2q_2},$$

$$b_{53} = \varkappa_{51} + M_{51} + i\eta_1 \frac{q_5\sqrt{p}}{2q_1}, \quad b_{54} = \varkappa_{52} + M_{52} + i\eta_2 \frac{q_5\sqrt{p}}{2q_2}, \quad b_{55} = \varkappa_{55} + M_{55}, \quad b_{56} = 0,$$

$$b_{61} = \varkappa_{61} + M_{61} + i\eta_2 \frac{q_6\sqrt{p}}{2q_2}, \quad b_{62} = \varkappa_{62} + M_{62} - i\eta_1 \frac{q_6\sqrt{p}}{2q_1}, \quad b_{63} = \varkappa_{63} + M_{63} + i\eta_2 \frac{q_6\sqrt{p}}{2q_2},$$

$$b_{64} = \varkappa_{64} + M_{64} - i\eta_1 \frac{q_6\sqrt{p}}{2q_1}, \quad b_{65} = 0, \quad b_{66} = \varkappa_{66}.$$

Фиксируем η_1, η_2 и для удобства введём обозначение $\widetilde{V}(\eta_1, \eta_2, z, t) = \widetilde{V}(z, t)$. Подобные обозначение примем для образов Фурье-функций, входящих в начальные, граничные и дополнительные условия (18), (19) и (21):

$$\widetilde{V}_i\big|_{t=0} \equiv \tilde{\phi}_i(z), \quad i = 1, 2, \ldots, 6, \tag{25}$$

$$\widetilde{V}_i|_{z=0} = \tilde{g}_i(t), \quad i = 1, 2, \quad \widetilde{V}_i|_{z=L} = \tilde{g}_i(t), \quad i = 3, 4, \tag{26}$$

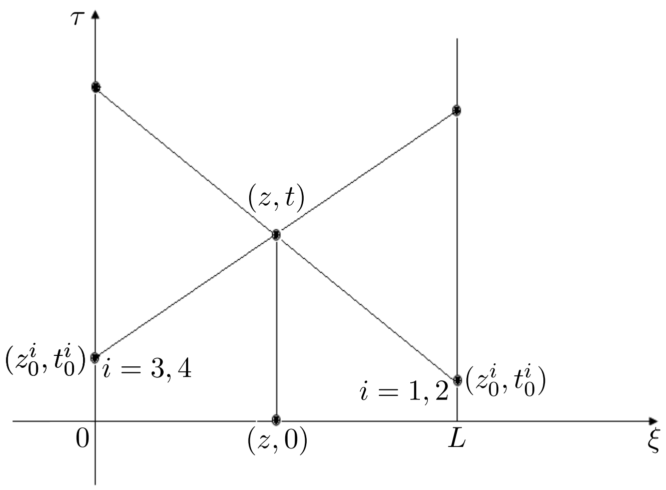
$$\widetilde{V}_i|_{z=L} = \tilde{h}_i(t), \quad i = 1, 2, \quad \widetilde{V}_i|_{z=0} = \tilde{h}_i(t), \quad i = 3, 4, 5, 6. \tag{27}$$

2. ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Пусть $\Pi = \{(z, t) \mid 0 < z < L, t > 0\}$ — проекция области D на плоскость переменных z, t. Рассмотрим произвольную точку $(z, t) \in \Pi$ на плоскости переменных ξ, τ и проведём через неё характеристику i-го уравнения системы (23), (24) до пересечения в области $\tau < t$ с границией Π. Уравнение имеет вид

$$\xi = z + \gamma_i(\tau - t). \tag{28}$$

При $\gamma_i = 1$ (т. е. $i = 3, 4$) эта точка лежит либо на отрезке $[0, L]$ оси $t = 0$, либо на прямой $z = 0$, а при $\gamma_i = -1$, (т. е. $i = 1, 2$) — либо на отрезке $[0, L]$, либо на прямой $z = L$ (см. рисунок).



Характеристические линии

Интегрируя i-ю компоненту равенств (23), (24) по характеристике (28) от точки $\left(z_0^i, t_0^i\right)$ до точки (z,t), находим

$$\widetilde{V}_i(z,t)=\widetilde{V}_i\big(z_0^i,t_0^i\big)+\int\limits_{t_0^i}^{t}\Big[F_i(\xi,\tau)-\sum_{j=1}^{6}b_{ij}(\xi)\widetilde{V}_j(\xi,\tau)\Big]\Big|_{\xi=z+\gamma_i(\tau-t)}d\tau$$
$$+\int\limits_{t_0^i}^{t}\int\limits_0^{\tau}\sum_{j=1}^{6}a_{ij}(\xi,\alpha)\widetilde{V}_j(\xi,\tau-\alpha)\,d\alpha\Big|_{\xi=z+\gamma_i(\tau-t)}d\tau,\quad i=1,2,3,4,\tag{29}$$

$$\widetilde{V}_i(z,t)=\widetilde{V}_i(z,0)-\int\limits_0^{t}\sum_{j=1}^{6}b_{ij}(z)\widetilde{V}_j(z,\tau)\,d\tau+\int\limits_0^{t}\int\limits_0^{\tau}\sum_{j=1}^{6}a_{ij}(z,\alpha)\widetilde{V}_j(z,\tau-\alpha)\,d\alpha d\tau,\quad i=5,6.\tag{30}$$

Определим в (29), (30) величину t_0^i. Она зависит от координат точки (z,t). Нетрудно заметить, что $t_0^i(z,t)$ имеет вид

$$t_0^i(z,t)=\begin{cases}t+\dfrac{L-z}{\gamma_i}, & t\geqslant\dfrac{L-z}{\gamma_i},\\ 0, & 0<t<\dfrac{L-z}{\gamma_i},\end{cases}\qquad i=1,2,$$
$$t_0^i(z,t)=\begin{cases}t-z/\gamma_i, & t\geqslant z/\gamma_i,\\ 0, & 0<t<z/\gamma_i,\end{cases}\qquad i=3,4,\quad t_0^i(z,t)=0,\quad i=5,6.$$

Тогда из условия того, что пара (z_0^i,t_0^i) удовлетворяет уравнению (28), следует

$$z_0^i(z,t)=\begin{cases}L, & t\geqslant\dfrac{L-z}{\gamma_i},\\ z-\gamma_i t, & 0<t<\dfrac{L-z}{\gamma_i},\end{cases}\qquad i=1,2,$$
$$z_0^i(z,t)=\begin{cases}0, & t\geqslant z/\gamma_i,\\ z-\gamma_i t, & 0<t<z/\gamma_i,\end{cases}\qquad i=3,4,\quad z_0^i(z,t)=z,\quad i=5,6.$$

Свободные члены интегральных уравнений (28) определяются через начальные и граничные условия (25) и (26) следующим образом:

$$\widetilde{V}_i\big(z_0^i,t_0^i\big)=\begin{cases}\tilde g_i\Big(t+\dfrac{L-z}{\gamma_i}\Big), & t\geqslant\dfrac{L-z}{\gamma_i},\\ \tilde\phi_i(z-\gamma_i t), & 0\leqslant t<\dfrac{L-z}{\gamma_i},\end{cases}\qquad i=1,2,$$
$$\widetilde{V}_i(z_0^i,t_0^i)=\begin{cases}\tilde g_i(t-z/\gamma_i), & t\geqslant z/\gamma_i,\\ \tilde\phi_i(z-\gamma_i t), & 0\leqslant t<z/\gamma_i,\end{cases}\qquad i=3,4.$$

Требуется, чтобы функции $\widetilde{V}_i\big(z_0^i,t_0^i\big)$ были непрерывными в области П. Заметим, что для выполнения этих условий заданные функции $\tilde\phi_i$ и $\tilde g_i$ должны удовлетворять условиям согласования в угловых точках области П:

$$\tilde\phi_i(0)=\tilde g_i(0),\quad i=1,2;\qquad \tilde\phi_i(L)=\tilde g_i(0),\quad i=3,4.\tag{31}$$

Здесь и далее значения функций $\tilde{g}_i$ при $t = 0$ и функций $\tilde{\phi}_i$ при $z = 0$ и $z = L$ понимаются как предел в этих точках при стремлении аргумента с той стороны точки, где эти функции определены.

Предположим, что все заданные функции, входящие в (29), (30), являются непрерывными функциями своих аргументов в П. Тогда эти система уравнений является замкнутой системой интегральных уравнений вольтерровского типа второго рода с непрерывными ядрами и свободными членами. Как обычно, такая система имеет единственное решение в ограниченной подобласти $\Pi_T = \{(z,t) \mid 0 \leqslant z \leqslant L,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$, $T > 0$ — некоторое фиксированные число области П.

Введём в рассмотрение вектор-функцию $w(z,t) = \dfrac{\partial}{\partial t}\widetilde{V}(z,t)$. Чтобы получить задачу для функции $w(z,t)$, подобной (23)–(26), дифференцируем уравнения (23), (24) и граничные условия (29) по переменной t, а условие при $t = 0$ найдём с помощью уравнений (23), (24) и начальных условий (25). При этом получим

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} + \gamma_i \frac{\partial w_i}{\partial z} = -\sum_{j=1}^{6} b_{ij}(z) w_j(z,t) + \sum_{j=1}^{6} a_{ij}(z,t)\tilde{\phi}_j(z) + \int\limits_0^t \sum_{j=1}^{6} a_{ij}(z,\tau) w_j(z,t-\tau)\,d\tau + \frac{\partial}{\partial t} F_i(z,t), \quad i = 1,2,3,4, \tag{32}$$

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} = -\sum_{j=1}^{6} b_{ij}(z) w_j(z,t) + \sum_{j=1}^{6} a_{ij}(z,t)\tilde{\phi}_j(z) + \int\limits_0^t \sum_{j=1}^{6} a_{ij}(z,\tau) w_j(z,t-\tau)\,d\tau, \quad i = 5,6, \tag{33}$$

$$w_i(z,t)|_{t=0} = \Phi_i(z), \quad i = \overline{1,6}, \tag{34}$$

$$w_i(z,t)|_{z=0} = \frac{d}{dt}\tilde{g}_i(t), \quad i = 1,2; \quad w_i(z,t)|_{z=L} = \frac{d}{dt}\tilde{g}_i(t), \quad i = 3,4, \tag{35}$$

где

$$\begin{gathered} \Phi_i(z) = F_i(z,0) - \gamma_i \frac{\partial}{\partial z}\tilde{\phi}_i(z) - \sum_{j=1}^{6} b_{ij}(z)\tilde{\phi}_i(z), \quad i = \overline{1,4}; \\ \Phi_i(z) = -\sum_{j=1}^{6} b_{ij}(z)\tilde{\phi}_i(z), \quad i = 5,6. \end{gathered} \tag{36}$$

Снова интегрирование вдоль соответствующих характеристик приведёт задачу (32)–(35) к интегральным уравнениям

$$w_i(z,t) = w_i\big(z_0^i, t_0^i\big) + \int\limits_{t_0^i}^{t} \left[\frac{\partial}{\partial t} F_i(\xi,\tau) - \sum_{j=1}^{6} b_{ij}(\xi) w_j(\xi,\tau) + \sum_{j=1}^{6} a_{ij}(\xi,\tau)\tilde{\phi}_j(\xi)\right]\Bigg|_{\xi = z+\gamma_i(\tau - t)} d\tau + \int\limits_{t_0^i}^{t} \int\limits_0^{\tau} \sum_{j=1}^{6} a_{ij}(\xi,\alpha) w_j(\xi,\tau-\alpha)\,d\alpha\Bigg|_{\xi = z+\gamma_i(\tau - t)} d\tau, \quad i = \overline{1,4}, \tag{37}$$

$$w_i(z,t)=w_i(z,0)+\int\limits_0^t\Big[-\sum_{j=1}^6 b_{ij}(z)w_j(z,\tau)+\sum_{j=1}^6 a_{ij}(z,\tau)\tilde{\phi}_j(z)\Big]d\tau$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau\sum_{j=1}^6 a_{ij}(z,\alpha)w_j(z,\tau-\alpha)\,d\alpha d\tau,\quad i=5,6.\quad(38)$$

Для функций w_i дополнительные условия (27) условия выглядят как

$$w_i(0,t)=\frac{d}{dt}\tilde{h}_i(t),\quad i=\overline{3,6};\quad w_i(L,t)=\frac{d}{dt}\tilde{h}_i(t),\quad i=1,2.\tag{39}$$

В уравнениях (37) функции $w_i\big(z_0^i,t_0^i\big)$ определяются следующим образом:

$$w_i(z_0^i,t_0^i)=\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\tilde{g}_i\Big(t+\dfrac{L-z}{\gamma_i}\Big), & t\geqslant\dfrac{L-z}{\gamma_i},\\ \Phi_i(z-\gamma_i t), & 0\leqslant t<\dfrac{L-z}{\gamma_i},\end{cases}\quad i=1,2,$$

$$w_i(z_0^i,t_0^i)=\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\tilde{g}_i(t-z/\gamma_i), & t\geqslant z/\gamma_i,\\ \Phi_i(z-\gamma_i t), & 0\leqslant t<z/\gamma_i,\end{cases}\quad i=3,4.$$

Пусть выполнены условия

$$F_i(0,0)-\gamma_i\Big[\frac{\partial}{\partial z}\tilde{\phi}_i(z)\Big]_{z=0}-\sum_{j=1}^6 b_{ij}(0)\tilde{\phi}_i(0)=\Big[\frac{d}{dt}\tilde{g}_i(t)\Big]_{t=0},\quad i=1,2,\tag{40}$$

$$F_i(L,0)-\gamma_i\Big[\frac{\partial}{\partial z}\tilde{\phi}_i(z)\Big]_{z=L}-\sum_{j=1}^6 b_{ij}(L)\tilde{\phi}_i(L)=\Big[\frac{d}{dt}\tilde{g}_i(t)\Big]_{t=0},\quad i=3,4.\tag{41}$$

Нетрудно заметить, что условия согласования начальных (34) и граничных (35) данных в угловых точках области П совпадают с соотношениями (40) и (41). Отсюда ясно, что при выполнении тех же равенств (40) и (41) уравнения (37), (38) будут иметь единственные непрерывные решения $w_i(z,t)$ или те же самые $\dfrac{\partial}{\partial t}\widetilde{V}_i(z,t)$.

Итак, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $\hat{\varepsilon}(x_3)\in C^1[0,\infty)$, $\hat{\mu}(x_3)\in C^1[0,\infty)$, $\tilde{\phi}(x_3)\in C^1[0,\infty]$, $\tilde{g}(t)\in C^1[0,\infty)$, $K(t)\in C^1[0,\infty)$, $\widetilde{F}(x_3,t)\in C^1(\Pi)$ *и выполнены условия* (20), (31), (40) и (41). *Тогда в области* П *существует единственное классическое решение задачи* (23)–(26).

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ. ВЫВОД ЭКВИВАЛЕНТНОЙ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим произвольную точку $(z,0)\in\Pi$ и проведём через неё характеристику (28) до пересечения с боковыми границами области П. Интегрируя i-ю компоненту уравнения (32), используя данные (39), находим

$$w_i(z,0)=\frac{d}{dt}\tilde{h}_i(t_i(z))+\int\limits_0^{t_i(z)}\Big[\frac{\partial}{\partial t}F_i(\xi,\tau)-\sum_{j=1}^6 b_{ij}(\xi)w_j(\xi,\tau)+\sum_{j=1}^6 a_{ij}(\xi,\tau)\tilde{\phi}_j(\xi)\Big]\Big|_{\xi=z+\gamma_i\tau}d\tau$$

$$+\int_0^{t_i(z)}\int_0^{\tau}\sum_{j=1}^{6}a_{ij}(\xi,\alpha)w_j(\xi,\tau-\alpha)d\alpha\Big|_{\xi=z+\gamma_i\tau}d\tau,\quad i=\overline{1,4},\quad (42)$$

где

$$t_i(z)=\frac{1}{\gamma_i}\begin{cases}z, & i=1,2,\\ L-z, & i=3,4.\end{cases}$$

Интегрирование (33) приведёт к следующим интегральным уравнениям:

$$w_i(z,t)=\Phi_i(z)+\int_0^t\Big[-\sum_{j=1}^{6}b_{ij}(z)w_j(z,\tau)+\sum_{j=1}^{6}a_{ij}(z,\tau)\tilde{\phi}_j(z)\Big]d\tau$$
$$+\int_0^t\int_0^{\tau}\sum_{j=1}^{6}a_{ij}(z,\alpha)w_j(z,\tau-\alpha)\,d\alpha d\tau,\quad i=5,6.\quad (43)$$

С учётом начальных условий (34) перепишем уравнения (42), (43) в виде

$$\int_0^{t_i(z)}\sum_{j=1}^{6}a_{ij}(z+\gamma_i\tau,\tau)\tilde{\phi}_j(z+\gamma_i\tau)\,d\tau+\int_0^{t_i(z)}\int_0^{\tau}\sum_{j=1}^{6}a_{ij}(z+\gamma_i\tau,\alpha)w_j(z+\gamma_i\tau,\tau-\alpha)\,d\alpha d\tau$$
$$=\Phi_i(z)-\frac{d}{dt}\tilde{h}_i(t_i(z))-\int_0^{t_i(z)}\Big[\frac{\partial}{\partial t}F_i(z+\gamma_i\tau,\tau)-\sum_{j=1}^{6}b_{ij}(z+\gamma_i\tau)w_j(z+\gamma_i\tau,\tau)\Big]d\tau,\quad i=\overline{1,4},$$

$$\int_0^t\sum_{j=1}^{6}a_{ij}(0,\tau)\tilde{\phi}_j(0)\,d\tau+\int_0^t\int_0^{\tau}\sum_{j=1}^{6}a_{ij}(0,\alpha)w_j(0,\tau-\alpha)\,d\alpha d\tau$$
$$=\frac{d}{dt}\tilde{h}_i(t)-\Phi_i(0)+\int_0^t\sum_{j=1}^{6}b_{ij}(0)w_j(0,\tau)d\tau,\quad i=5,6.$$

Продифференцируем первые уравнения по переменной z, а вторые — по t. Тогда имеем

$$\sum_{j=1}^{6}a_{ij}(z+\gamma_i t_i(z),t_i(z))\tilde{\phi}_j(z+\gamma_i t_i(z))-\gamma_i\int_0^{t_i(z)}\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial}{\partial z}(a_{ij}(z+\gamma_i\tau,\tau)\tilde{\phi}_j(z+\gamma_i\tau))\,d\tau$$
$$+\int_0^{t_i(z)}\sum_{j=1}^{6}a_{ij}(z+\gamma_i t_i(z),\tau)w_j(z+\gamma_i t_i(z),t_i(z)-\tau)\,d\tau$$
$$-\gamma_i\int_0^{t_i(z)}\int_0^{\tau}\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial}{\partial z}(a_{ij}(z+\gamma_i\tau,\alpha)w_j(z+\gamma_i\tau,\tau-\alpha))\,d\alpha d\tau$$
$$=-\gamma_i\frac{d}{dz}\Phi_i(z)-\frac{d^2}{dt^2}\tilde{h}_i(t_i(z))-\Big[\frac{\partial}{\partial t}F_i(z+\gamma_i t_i(z),t_i(z))-\sum_{j=1}^{6}b_{ij}(z+\gamma_i t_i(z))w_j(z+\gamma_i t_i(z),t_i(z))\Big]$$

$$+\gamma_i \int\limits_0^{t_i(z)} \left[\frac{\partial^2}{\partial t \partial z} F_i(z+\gamma_i\tau,\tau) - \sum_{j=1}^{6} \frac{\partial}{\partial z}(b_{ij}(z+\gamma_i\tau) w_j(z+\gamma_i\tau,\tau))\right] d\tau, \quad i=\overline{1,4}, \quad (44)$$

$$\sum_{j=1}^{6} a_{ij}(0,t)\tilde{\phi}_j(0) + \int\limits_0^t \sum_{j=1}^{6} a_{ij}(0,\tau) w_j(0,t-\tau)\,d\tau = \frac{d^2}{dt^2}\tilde{h}_i(t) + \sum_{j=1}^{6} b_{ij}(0) w_j(0,t), \quad i=5,6. \quad (45)$$

Далее в уравнениях (43) заменим $t_i(z)$ на t. Тогда получим

$$\sum_{j=1}^{6} a_{ij}(0,t)\tilde{\phi}_j(0) = P_i(-\gamma_i t) + \int\limits_0^t \sum_{j=1}^{6} \frac{\partial}{\partial z}(b_{ij}(-\gamma_i(t-\tau)) w_j(-\gamma_i(t-\tau,\tau)))\,d\tau$$
$$-\gamma_i \int\limits_0^t \sum_{j=1}^{6} \frac{\partial}{\partial z}(a_{ij}(-\gamma_i(t-\tau),\tau)\tilde{\phi}_j(-\gamma_i(t-\tau)))\,d\tau - \int\limits_0^t \sum_{j=1}^{6} a_{ij}(0,\tau)\frac{d}{dt}\tilde{h}_j(-\gamma_i(t-\tau))\,d\tau$$
$$-\int\limits_0^t \int\limits_0^\tau \sum_{j=1}^{6} \frac{\partial}{\partial z}(a_{ij}(-\gamma_i(t-\tau),\alpha) w_j(-\gamma_i(t-\tau),\tau-\alpha))\,d\alpha d\tau, \quad i=1,2, \quad (46)$$

$$\sum_{j=1}^{6} a_{ij}(L,t)\tilde{\phi}_j(L) = P_i(L-\gamma_i t) + \int\limits_0^t \sum_{j=1}^{6} \frac{\partial}{\partial z}(a_{ij}(L-\gamma_i(t-\tau),\tau)\tilde{\phi}_j(L-\gamma_i(t-\tau)))\,d\tau$$
$$-\int\limits_0^t \sum_{j=1}^{6} a_{ij}(L,\tau)\frac{d}{dt}\tilde{h}_j(-\gamma_i t-\tau)\,d\tau - \int\limits_0^t \sum_{j=1}^{6} \frac{\partial}{\partial z}(b_{ij}(H-\gamma_i(t-\tau)) w_j(L-\gamma_i(t-\tau),\tau))\,d\tau$$
$$+\int\limits_0^t \int\limits_0^\tau \sum_{j=1}^{6} \frac{\partial}{\partial z}(a_{ij}(L-\gamma_i(t-\tau),\alpha) w_j(L-\gamma_i(t-\tau),\tau-\alpha))\,d\alpha d\tau, \quad i=3,4, \quad (47)$$

где $P_i(z)$ определены формулами

$$P_i(z) = -\gamma_i \frac{d}{dz}\Phi_i(z) - \frac{d^2}{dt^2}\tilde{h}_i(t_i(z)) - \frac{\partial}{\partial t}F_i(z+\gamma_i t_i(z), t_i(z))$$
$$+\sum_{j=1}^{6} b_{ij}(z+\gamma_i t_i(z)) w_j(z+\gamma_i t_i(z), t_i(z)) + \gamma_i \int\limits_0^{t_i(z)} \frac{\partial^2}{\partial t \partial z} F_i(z+\gamma_i\tau,\tau)\,d\tau, \quad i=\overline{1,4},$$

а также введены обозначения

$$P_i(t) = \frac{d^2}{dt^2}\tilde{h}_i(t) + \sum_{j=1}^{6} b_{ij}(0)\frac{d}{dt}\tilde{h}_j(t), \quad i=5,6.$$

Введём следующее обозначение:

$$Q(z;\tilde{\phi}) := \begin{pmatrix} c_{11}(z) & 0 & c_{13}(z) & 0 & c_{15}(z) & 0 \\ 0 & c_{22}(z) & c_{23}(z) & c_{24}(z) & 0 & 0 \\ c_{31}(z) & 0 & c_{33}(z) & 0 & c_{35}(z) & 0 \\ 0 & c_{42}(z) & c_{43}(z) & c_{44}(z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{53}(z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}(z) \end{pmatrix}, \quad (48)$$

где

$$c_{11}(z) = c_{31}(z) = \frac{\sqrt{p}}{2}\big(q_1^2(z)\tilde{\phi}_1(z) + q_1^2(z)\tilde{\phi}_3(z)\big), \quad c_{12}(z) = 0,$$

$$c_{13}(z) = c_{33}(z) = \frac{\sqrt{p}}{2}\big(q_3^2(z)\tilde{\phi}_1(z) + q_3(z)q_4(z)\tilde{\phi}_2(z) + q_3^2(z)\tilde{\phi}_3(z) + q_3(z)q_4(z)\tilde{\phi}_4(z) + q_3(z)\tilde{\phi}_5(z)\big),$$

$$c_{14}(z) = 0, \ c_{15}(z) = -c_{35}(z) = \frac{\sqrt{p}}{2}\frac{\tilde{\phi}_1(z) - \tilde{\phi}_3(z)}{q_1^2(z)}, \quad c_{16}(z) = 0, \quad c_{21}(z) = 0,$$

$$c_{22}(z) = c_{42}(z) = \frac{\sqrt{p}}{2}\big(q_2^2(z)\tilde{\phi}_2(z) + q_2^2(z)\tilde{\phi}_4(z)\big),$$

$$c_{23}(z) = c_{43}(z) = \frac{\sqrt{p}}{2}\big(q_3(z)q_4(z)\tilde{\phi}_1(z) + q_4^2(z)\tilde{\phi}_2(z) + q_3(z)q_4(z)\tilde{\phi}_3(z) + q_4^2(z)\tilde{\phi}_4(z) + q_4(z)\tilde{\phi}_5(z)\big),$$

$$c_{24}(z) = -c_{44}(z) = \frac{\sqrt{p}}{2}\frac{\tilde{\phi}_2(z) - \tilde{\phi}_4(z)}{q_2^2(z)}, \quad c_{25}(z) = 0, \quad c_{26}(z) = 0,$$

$$c_{31}(z) = \frac{\sqrt{p}}{2}\big(q_1^2\tilde{\phi}_1(z) + q_1^2\tilde{\phi}_3(z)\big), \quad c_{32}(z) = 0, \quad c_{34}(z) = 0, \quad c_{36}(z) = 0, \quad c_{41}(z) = 0,$$

$$c_{45}(z) = 0, \quad c_{46}(z) = 0, \quad c_{51}(z) = 0, \quad c_{52}(z) = 0,$$

$$c_{53}(z) = \frac{\sqrt{p}}{2}(q_3q_5\tilde{\phi}_1(z) + q_4q_5\tilde{\phi}_2(z) + q_3q_5\tilde{\phi}_3(z) + q_4q_5\tilde{\phi}_4(z) + q_5\tilde{\phi}_5(z)),$$

$$c_{54}(z) = 0, \quad c_{55}(z) = 0, \quad c_{56}(z) = 0, \quad c_{6i}(z) = 0, \quad c_{66}(z) = \sqrt{p}\frac{q_6}{q_1q_2}\tilde{\phi}_6(z), \quad i = \overline{1,5}.$$

Учитывая (48), перепишем уравнения (37), (38) в следующем виде:

$$w_i(z,t) = w_i\big(z_0^i, t_0^i\big) + \int\limits_{t_0^i}^{t} \left[\frac{\partial}{\partial t}F_i(\xi,\tau) - \sum_{j=1}^{6} b_{ij}(\xi)w_j(\xi,\tau) + \sum_{j=1}^{6} Q_{ij}(\xi;\tilde{\phi})\Psi_j(\tau)\right]\bigg|_{\xi=z+\gamma_i(\tau-t)} d\tau$$
$$+ \int\limits_{t_0^i}^{t}\int\limits_0^{\tau} \sum_{j=1}^{6} Q_{ij}(\xi; w(\xi,\tau-\alpha))\Psi_j(\alpha)\,d\alpha\bigg|_{\xi=z+\gamma_i(\tau-t)} d\tau, \quad i = \overline{1,6}. \quad (49)$$

Пользуясь (48), систему (44), (45) перепишем в виде

$$\sum_{j=1}^{6} Q_{ij}(\nu_i; \tilde{\phi}(\nu_i))\Psi_j(t) = P_i(\bar{t}_i(t))$$
$$+ \beta_i \int\limits_0^t \sum_{j=1}^{6}\left[\frac{\partial}{\partial z}b_{ij}(-\gamma_i(t-\tau))w_j(-\gamma_i(t-\tau,\tau)) + b_{ij}(-\gamma_i(t-\tau))\frac{\partial}{\partial z}w_j(-\gamma_i(t-\tau,\tau))\right]d\tau$$
$$- \int\limits_0^t \sum_{j=1}^{6}\left[\gamma_i\beta_i\frac{\partial}{\partial z}Q_{ij}(-\gamma_i(t-\tau); \tilde{\phi}(-\gamma_i(t-\tau))) + Q_{ij}(-\gamma_i(t-\tau); \frac{d}{dt}\tilde{h}(-\gamma_i(t-\tau)))\right]\Psi_j(\tau)\,d\tau$$
$$- \beta_i \int\limits_0^t\int\limits_0^{\tau} \sum_{j=1}^{6} \frac{\partial}{\partial z}Q_{ij}(-\gamma_i(t-\tau); w_j(-\gamma_i(t-\tau), \tau-\alpha))\Psi_j(\alpha)d\alpha d\tau, \quad i = \overline{1,6}, \quad (50)$$

здесь

$$\beta_i = \begin{cases} 1, & i = \overline{1,4}, \\ 0, & i = 5,6, \end{cases} \qquad \nu_i = \begin{cases} L, & i = 3,4, \\ 0, & i = 1,2,5,6, \end{cases} \qquad \bar{t}_i(t) = \begin{cases} -\lambda_i t, & i = 1,2, \\ L - \lambda_i t, & i = 3,4, \\ t, & i = 5,6. \end{cases}$$

Пусть $\Psi(t) = \big(\varphi_1', \varphi_2', \varphi_3', \psi_1', \psi_2', \psi_3'\big)^*$ — вектор-функция, составленная из производных неизвестных функций обратной задачи, где $\Psi_i(t)$ — элементы этой вектор-функции. В дальнейшем будем предполагать, что выполнено условие

$$\det Q(\nu_i; \tilde{\phi}) \neq 0, \tag{51}$$

что равносильно неравенствам

$$c_{11} \neq 0, \quad c_{15} \neq 0, \quad c_{22} \neq 0, \quad c_{24} \neq 0, \quad c_{53} \neq 0, \quad c_{66} \neq 0.$$

Решая теперь систему (50) относительно $\Psi_i(t)$, получим

$$\begin{aligned}
\Psi_i(t) = \frac{1}{\det Q(\nu_i; \tilde{\phi})} \sum_{j=1}^{6} \Bigg[P_j(\bar{t}_j(t)) + \beta_j \int\limits_0^t \sum_{k=1}^{6} \frac{\partial}{\partial z} b_{jk}(-\gamma_j(t-\tau)) w_k(-\gamma_j(t-\tau, \tau))\, d\tau \Bigg] \mathcal{Q}_{ji}(\nu_i; \tilde{\phi}) \\
+ \frac{1}{\det Q(\nu_i; \tilde{\phi})} \sum_{j=1}^{6} \Bigg[\beta_j \int\limits_0^t \sum_{k=1}^{6} b_{jk}(-\gamma_j(t-\tau)) \frac{\partial}{\partial z} w_k(-\gamma_j(t-\tau, \tau))\, d\tau \Bigg] \mathcal{Q}_{ji}(\nu_i; \tilde{\phi}) \\
- \frac{1}{\det Q(\nu_i; \tilde{\phi})} \sum_{j=1}^{6} \Bigg[\gamma_j \beta_j \int\limits_0^t \sum_{k=1}^{6} \frac{\partial}{\partial z} Q_{jk}(-\gamma_j(t-\tau); \tilde{\phi}(-\gamma_j(t-\tau))) \Psi_k(\tau)\, d\tau \Bigg] \mathcal{Q}_{ji}(\nu_i; \tilde{\phi}) \\
- \frac{1}{\det Q(\nu_i; \tilde{\phi})} \sum_{j=1}^{6} \Bigg[\int\limits_0^t \sum_{k=1}^{6} Q_{jk}(-\gamma_j(t-\tau); \frac{d}{dt} \tilde{h}(-\gamma_j(t-\tau))) \Psi_k(\tau) d\tau \Bigg] \mathcal{Q}_{ji}(\nu_i; \tilde{\phi}) \\
- \frac{1}{\det Q(\nu_i; \tilde{\phi})} \sum_{j=1}^{6} \Bigg[\beta_j \int\limits_0^t \int\limits_0^\tau \sum_{k=1}^{6} \frac{\partial}{\partial z} Q_{jk}(-\gamma_j(t-\tau); w_k(-\gamma_j(t-\tau), \tau-\alpha)) \Psi_k(\alpha)\, d\alpha d\tau \Bigg] \mathcal{Q}_{ji}(\nu_i; \tilde{\phi}),
\end{aligned} \tag{52}$$

где $\mathcal{Q}_{ji}$ — алгебраические дополнения элементов c_{ji} матрицы Q, $i = \overline{1,6}$.

В уравнения (52) входят неизвестные функции $\dfrac{\partial w_j}{\partial z}$, $j = \overline{1,6}$. Для них мы получим интегральные уравнения из (49) с помощью дифференцирования их по переменной z. При этом имеем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z} w_i(z,t) = \frac{\partial}{\partial z} w_i(z_0^i, t_0^i) - \frac{\partial}{\partial z} t_0^i \Bigg[\frac{\partial}{\partial t} F_i(z_0^i, t_0^i) - \sum_{j=1}^{6} b_{ij}(z_0^i) w_j(z_0^i, t_0^i) + \sum_{j=1}^{6} Q_{ij}(z_0^i; \tilde{\phi}) \Psi_j(t_0^i) \Bigg] \\
+ \int\limits_{t_0^i}^{t} \Bigg[\frac{\partial}{\partial t \partial z} F_i(\xi, \tau) - \sum_{j=1}^{6} \frac{d}{dz} b_{ij}(\xi) w_j(\xi, \tau) - \sum_{j=1}^{6} b_{ij}(\xi) \frac{\partial}{\partial z} w_j(\xi, \tau) \\
+ \sum_{j=1}^{6} \frac{\partial}{\partial z} Q_{ij}(\xi; \tilde{\phi}) \Psi_j(\tau) \Bigg] \Bigg|_{\xi = z + \gamma_i(\tau - t)} d\tau - \frac{\partial}{\partial z} t_0^i \int\limits_0^{t_0^i} \sum_{j=1}^{6} Q_{ij}\big(z_0^i; G_j(z_0^i, t_0^i - \tau)\big) \Psi_j(\tau)\, d\tau \\
+ \int\limits_{t_0^i}^{t} \int\limits_0^\tau \sum_{j=1}^{6} \frac{\partial}{\partial z} Q_{ij}(\xi; w_j(\xi, \tau-\alpha)) \Psi_j(\alpha)\, d\alpha \Bigg|_{\xi = z + \gamma_i(\tau - t)} d\tau, \quad i = \overline{1,6},
\end{aligned} \tag{53}$$

где

$$G_j\big(z_0^i, t_0^i - \tau\big) = \begin{cases} \dfrac{d}{dt} h_j\left(\dfrac{L-z}{\gamma_i} - \tau\right), & j = \overline{3,6}, \\ \dfrac{d}{dt} g_j\left(\dfrac{L-z}{\gamma_i} - \tau\right), & j = 1,2. \end{cases}$$

Требуется выполнение условий согласования

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\tilde{g}_i(0) = F_i(0,0) - \gamma_i \frac{\partial}{\partial z}\tilde{\phi}_i(z)\bigg|_{z=0} - \sum_{j=1}^{6} b_{ij}(0)\tilde{\phi}_i(0), \quad i = 1,2, \\ &\frac{d}{dt}\tilde{g}_i(0) = F_i(L,0) - \gamma_i \frac{\partial}{\partial z}\tilde{\phi}_i(z)\bigg|_{z=L} - \sum_{j=1}^{6} b_{ij}(L)\tilde{\phi}_i(L), \quad i = 3,4, \end{aligned} \tag{54}$$

$$\frac{d}{dt}\tilde{h}_i(t)\bigg|_{t=0} = -\sum_{j=1}^{6} b_{ij}(0)\tilde{\phi}_i(0), \quad i = 5,6. \tag{55}$$

4. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ И ЕГО ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1, *кроме того,* $\tilde{\phi}(z) \in C^2[0,L]$, $\tilde{g}(t) \in C^2[0,\infty)$, $\tilde{h}(t) \in C^2(0,\infty)$, $F(z,t) \in C^2(\Pi)$ *и выполнены условие* (51), *условия согласования* (31), (40), (41), (54), (55). *Тогда для любого* $L > 0$ *на отрезке* $[0,L]$ *существует единственное решение обратной задачи* (32)–(34), (35) *из класса* $\Psi(t) \in C^1[0,L]$, *и каждая компонента* $\varphi_i \in C^1[0,L]$ *определяется заданием* $h_i(t)$ *для* $t \in [0,L]$, $i = 1,2,3$, *а* $\psi_i \in C^1[0,L]$ — $h_i(t)$ *для* $t \in [0,L]$, $i = 4,5,6$.

Доказательство. Уравнения (49), (52) и (53), дополненные начальными и граничными условиями из равенств (32), (33), образуют замкнутую систему уравнений относительно неизвестных $w_i(z,t)$, $\Psi_j(t)$, $\dfrac{\partial}{\partial z} w_i(z,t)$, $i = \overline{1,6}$. Рассмотрим теперь квадрат

$$\Pi_0 := \{(z,t) \mid 0 \leqslant z \leqslant L,\ 0 \leqslant t \leqslant L\}.$$

Уравнения (49), (52) и (53) показывают, что значения функций $w_i(z,t)$, $\Psi_j(t)$, $\dfrac{\partial}{\partial z} w_i(z,t)$ при $(z,t) \in \Pi_0$ выражаются через интегралы от некоторых комбинаций этих же функций по отрезкам, лежащим в Π_0.

Запишем уравнения (49), (52) и (53) в виде замкнутой системы интегральных уравнений вольтерровского типа второго рода. Для этого введём в рассмотрение вектор-функция $\upsilon(z,t) = \big(\upsilon_i^1, \upsilon_i^2, \upsilon_i^3\big)$, $i = \overline{1,6}$, задав их компоненты равенствами

$$\upsilon_i^1(z,t) = w_i(z,t), \quad \upsilon_i^2(z,t) = \Psi_i(t), \quad \upsilon_i^3(z,t) = \frac{\partial}{\partial z} w_i(z,t) + \sum_{j=1}^{6} Q_{ij}\big(z_0^i; \tilde{\phi}\big)\Psi_j(t_0^i)\frac{\partial}{\partial z} t_0^i.$$

Тогда система уравнений (49), (52) и (53) принимает операторную форму

$$\upsilon = \mathcal{A}\upsilon, \tag{56}$$

где оператор $\mathcal{A} = \big(\mathcal{A}_i^1, \mathcal{A}_i^2, \mathcal{A}_i^3\big)$, $i = \overline{1,6}$, в соответствии с правыми частями уравнений (49), (52) и (53) определён равенствами

$$\mathcal{A}_i^1 \upsilon = \upsilon_i^{01}(z,t) + \int\limits_{t_0^i}^{t} \Bigg[\sum_{j=1}^{6} Q_{ij}(z+\gamma_i(\tau-t);\tilde{\phi})\upsilon_j^2(\tau) - \sum_{j=1}^{6} b_{ij}(z+\gamma_i(\tau-t))\upsilon_j^1(z+\gamma_i(\tau-t),\tau)\Bigg] d\tau$$
$$+ \int\limits_{t_0^i}^{t} \int\limits_0^{\tau} \sum_{j=1}^{6} Q_{ij}(z+\gamma_i(\tau-t);\upsilon_j^1(z+\gamma_i(\tau-t),\tau-\alpha))\upsilon_j^2(\alpha)\, d\alpha d\tau, \quad (57)$$

$$\mathcal{A}_i^2 \upsilon = \upsilon_i^{02}(z,t) + \frac{1}{\det Q(\nu_i;\tilde{\phi})} \int\limits_0^t \sum_{j=1}^{6}\sum_{k=1}^{6} \beta_j \frac{\partial}{\partial z} b_{jk}(-\gamma_j(t-\tau))\upsilon_k^1(-\gamma_j(t-\tau,\tau))\, d\tau \mathcal{Q}_{ji}(\nu_i;\tilde{\phi})$$
$$+ \frac{1}{\det Q(\nu_i;\tilde{\phi})} \int\limits_0^t \sum_{j=1}^{6}\sum_{k=1}^{6} \beta_j b_{jk}(-\gamma_j(t-\tau))\Bigg[\upsilon_k^3(-\gamma_j(t-\tau),\tau)$$
$$- \sum_{p=1}^{6} Q_{kp}\big(z_0^k;\tilde{\phi}\big)\upsilon_p^2\big(t_0^k\big)\frac{\partial}{\partial z} t_0^j\Bigg] d\tau \mathcal{Q}_{ji}(\nu_i;\tilde{\phi})$$
$$- \frac{1}{\det Q(\nu_i;\tilde{\phi})} \int\limits_0^t \sum_{k=1}^{6}\sum_{j=1}^{6} \gamma_j\beta_j \frac{\partial}{\partial z} Q_{jk}(-\gamma_j(t-\tau);\tilde{\phi}(-\gamma_j(t-\tau)))\upsilon_k^2(\tau)\, d\tau \mathcal{Q}_{ji}(\nu_i;\tilde{\phi})$$
$$- \frac{1}{\det Q(\nu_i;\tilde{\phi})} \int\limits_0^t \sum_{j=1}^{6}\sum_{k=1}^{6} Q_{jk}\Bigg(-\gamma_j(t-\tau); \frac{d}{dt}\tilde{h}(-\gamma_j(t-\tau))\Bigg)\upsilon_k^2(\tau)\, d\tau \mathcal{Q}_{ji}(\nu_i;\tilde{\phi})$$
$$- \frac{1}{\det Q(\nu_i;\tilde{\phi})} \int\limits_0^t \int\limits_0^{\tau} \sum_{j=1}^{6}\sum_{k=1}^{6} \beta_j \frac{\partial}{\partial z} Q_{jk}\big(-\gamma_j(t-\tau);\upsilon_k^1(-\gamma_j(t-\tau),\tau-\alpha)\big)\upsilon_k^2(\alpha)\, d\alpha d\tau \mathcal{Q}_{ji}(\nu_i;\tilde{\phi}), \quad (58)$$

$$\mathcal{A}_i^3 \upsilon = \upsilon_i^{03}(z,t) - \int\limits_{t_0^i}^{t} \Bigg[\sum_{j=1}^{6} \frac{d}{dz} b_{ij}(\xi)\upsilon_j^1(\xi,\tau) + \sum_{j=1}^{6} b_{ij}(\xi)\Bigg(\upsilon_j^3(\xi,\tau) - \sum_{k=1}^{6} Q_{jk}\big(z_0^j;\tilde{\phi}\big)\upsilon_k^2\big(t_0^j\big)\frac{\partial}{\partial z} t_0^j\Bigg)$$
$$- \sum_{j=1}^{6} \frac{\partial}{\partial z} Q_{ij}(\xi;\tilde{\phi})\upsilon_j^2(\tau)\Bigg]\Bigg|_{\xi=z+\gamma_i(\tau-t)} d\tau - \frac{\partial}{\partial z} t_0^i \int\limits_0^{t_0^i} \sum_{j=1}^{6} Q_{ij}\big(z_0^i G_j z_0^i, t_0^i-\tau\big)\big)\upsilon_j^2(\tau)\, d\tau$$
$$+ \int\limits_{t_0^i}^{t} \int\limits_0^{\tau} \sum_{j=1}^{6} \frac{\partial}{\partial z} Q_{ij}\big(\xi;\upsilon_j^1(\xi,\tau-\alpha)\big)\upsilon_j^2(\alpha)\, d\alpha\Bigg|_{\xi=z+\gamma_i(\tau-t)} d\tau, \quad (59)$$

где $i=\overline{1,6}$.

В этих формулах использованы обозначения

$$\upsilon_i^{01}(z,t) = w_i\big(z_0^i,t_0^i\big) + \int\limits_{t_0^i}^{t} \frac{\partial}{\partial t} F_i(z+\gamma_i(\tau-t),\tau)\, d\tau, \quad \upsilon_i^{02}(z,t) = \frac{1}{\det Q(\nu_i;\tilde{\phi})} \sum_{j=1}^{6} P_j(\bar{t}_j(t))\mathcal{Q}_{ji}(\nu_i;\tilde{\phi}),$$

$$\upsilon_i^{03}(z,t) = \frac{\partial}{\partial z} w_i\big(z_0^i, t_0^i\big) - \frac{\partial}{\partial z} t_0^i \frac{\partial}{\partial t} F_i\big(z_0^i, t_0^i\big) + \frac{\partial}{\partial z} t_0^i \sum_{j=1}^{6} b_{ij}\big(z_0^i\big) w_j\big(z_0^i, t_0^i\big) + \int\limits_{t_0^i}^{t} \frac{\partial}{\partial t \partial z} F_i(z + \gamma_i(\tau - t), \tau)\, d\tau.$$

Определим на множестве непрерывных функций $C_s(\Pi_0)$ норму

$$\|\upsilon\|_s = \max_{\substack{1\leqslant i\leqslant 6\\ 1\leqslant l\leqslant 3}} \sup_{(z,t)\in\Pi_0} \big|\upsilon_i^l(z,t) e^{-st}\big|,$$

где $s \geqslant 0$ — некоторое число, которое будет выбрано позже. Очевидно, что при $s = 0$ это пространство совпадает с пространством непрерывных функций с обычной нормой $\|\upsilon\|_s$. В силу неравенства $e^{-sL}\|\upsilon\|_s \leqslant \|\upsilon\|_s \leqslant \|\upsilon\|$ нормы $\|\upsilon\|_s$ и $\|\upsilon\|$ эквивалентны для любого фиксированного $L \in (0, \infty)$.

Далее рассмотрим множество функций $S(\upsilon^0, r) \subset C_s(\Pi_0)$, удовлетворяющих неравенству

$$\|\upsilon - \upsilon^0\|_s \leqslant r, \tag{60}$$

где вектор-функция $\upsilon^0(z,t) = \big(\upsilon_i^{01}(z,t), \upsilon_i^{02}(t), \upsilon_i^{03}(z,t)\big)$, $i = \overline{1,6}$, определена свободными членами операторного уравнения (56). Нетрудно заметить, что для $\upsilon \in S(\upsilon^0, r)$ имеет место оценка $\|\upsilon\|_s \leqslant \|\upsilon^0\|_s + r \leqslant \|\upsilon^0\| + r := r_0$. Таким образом, r_0 — известное число.

Введём следующие обозначения:

$$\tilde\phi_0 := \max_{1\leqslant i\leqslant n} \|\tilde\phi_i\|_{C^2[0,L]}, \quad g_0 := \max_{1\leqslant i\leqslant n} \|g_i\|_{C^2[0,L]}, \quad F_0 := \max_{1\leqslant i\leqslant n} \|F_i\|_{C^2[\Pi_0]},$$
$$h_0 := \max_{1\leqslant i\leqslant n} \|h_i\|_{C^2[0,L]}, \quad \Gamma_0 := \max\{g_0,\, f_0\}, \quad P_0 := \min\{|\mathcal{Q}(0)|, |\mathcal{Q}(L)|\},$$
$$\Upsilon_0\tilde\phi_0 = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \|Q_{ij}(z + \gamma_i(\tau - t); \tilde\phi)\|_{C^1[0,L]}, \quad Q_0 := \max\big\{ \max_{1\leqslant i\leqslant n} |Q_i(0)|, \max_{1\leqslant i\leqslant n} |Q_i(L)|\big\}.$$

Оператор $\mathcal{A}$ переводит пространство $C_s(\Pi_0)$ в себя. Покажем, что при подходящем выборе s (заметим, что $L > 0$ — произвольное фиксированное число) он является на множестве $S(\upsilon^0, r)$ оператором сжатия. Убедимся сначала в том, что оператор $\mathcal{A}$ переводит множество $S(\upsilon^0, r)$ в себя, т. е. из условия $\upsilon(z,t) \in S(\upsilon^0, r)$ следует, что $\mathcal{A}\upsilon \in S(\upsilon^0, r)$, если s удовлетворяет некоторым ограничениям. В самом деле, для любых $(z,t) \in \Pi_0$ и любого $\upsilon \in S(\upsilon^0, r)$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned}
\big|(\mathcal{A}_i^1\upsilon - \upsilon_i^{01})e^{-st}\big| = \Bigg| \int\limits_{t_0^i}^{t} \Bigg[&\sum_{j=1}^{6} Q_{ij}(z + \gamma_i(\tau - t); \tilde\phi) e^{-s(t-\tau)} \upsilon_j^2(\tau) e^{-s\tau} \\
&- \sum_{j=1}^{6} b_{ij}(z + \gamma_i(\tau - t)) e^{-s(t-\tau)} \upsilon_j^1(z + \gamma_i(\tau - t), \tau) e^{-s\tau} \Bigg] d\tau \\
+ \int\limits_{t_0^i}^{t} \int\limits_{0}^{\tau} \sum_{j=1}^{6} &Q_{ij}(z + \gamma_i(\tau - t); \upsilon_j^1(z + \gamma_i(\tau - t), \tau - \alpha)) e^{-s(\tau-\alpha)} \upsilon_j^2(\alpha) e^{-s\alpha}\, d\alpha d\tau \Bigg| \\
\leqslant 6\big[(\Upsilon_0\tilde\phi_0 + b_0)\|\upsilon\|_s + \Upsilon_0\|\upsilon\|_s^2\tau\big] &\int_0^t e^{-s(t-\tau)}\, d\tau \leqslant \frac{6}{s}((\Upsilon_0\tilde\phi_0 + b_0) + \Upsilon_0 L r_0) r_0 := \frac{1}{s}\alpha_1.
\end{aligned}$$

Аналогично получим следующие оценки:

$$\big|(\mathcal{A}_i^2\upsilon - \upsilon_i^{02})e^{-st}\big| \leqslant \frac{36P_0}{sQ_0}(b_0(2 + 6\Upsilon_0\tilde\phi_0) + \Upsilon_0\tilde\phi_0 + \Upsilon_0\Gamma_0 + \Upsilon_0 L r_0) r_0 := \frac{1}{s}\alpha_2,$$

$$\left|\left(\mathcal{A}_i^3\upsilon - \upsilon_i^{03}\right)e^{-st}\right| \leqslant \frac{6}{s}(b_0(2+6\Upsilon_0\tilde{\phi}_0) + \Upsilon_0\tilde{\phi}_0 + \Upsilon_0\Gamma_0 + \Upsilon_0 L r_0)r_0 := \frac{1}{s}\alpha_3.$$

Отсюда и из формул (56) и (57)–(59) следует оценка

$$\|\mathcal{A}\upsilon - \upsilon^0\|_s = \max\Big\{\max_{1\leqslant i\leqslant 6}\sup_{(z,t)\in\Pi_0}\left|\left(\mathcal{A}_i^1\upsilon - \upsilon_i^{01}\right)e^{-st}\right|,$$
$$\max_{1\leqslant i\leqslant 6}\sup_{t\in[0,L]}\left|\left(\mathcal{A}_i^2\upsilon - \upsilon_i^{02}\right)e^{-st}\right|, \max_{1\leqslant i\leqslant 6}\sup_{t\in[0,L]}\left|\left(\mathcal{A}_i^3\upsilon - \upsilon_i^{03}\right)e^{-st}\right|\Big\} \leqslant \frac{1}{s}\alpha_0,$$

где $\alpha_0 := \max(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Выбирая $s > (1/r)\alpha_0$, получим, что оператор $\mathcal{A}$ переводит множество $S(\upsilon^0, \rho)$ в себя.

Возьмём теперь любые функции $\upsilon, \tilde{\upsilon} \in S(\upsilon^0, r)$ и оценим норму разности $U\upsilon - U\tilde{\upsilon}$. Используя очевидное неравенство

$$\left|\upsilon_i^k\upsilon_i^l - \tilde{\upsilon}_i^k\tilde{\upsilon}_i^l\right|e^{-st} \leqslant \left|\upsilon_i^k - \tilde{\upsilon}_i^k\right|\left|\upsilon_i^l\right|e^{-st} + \left|\tilde{\upsilon}_i^k\right|\left|\upsilon_i^l - \tilde{\upsilon}_i^l\right|e^{-st} \leqslant 2r_0\|\upsilon - \tilde{\upsilon}\|_s$$

и оценки для интегралов, аналогичные приведённым выше, получим

$$\left|\left(\mathcal{A}_i^1\upsilon - \mathcal{A}_i^1\tilde{\upsilon}\right)e^{-st}\right| = \Bigg|\int\limits_{t_0^i}^{t}\Bigg[\sum_{j=1}^{6} Q_{ij}(z+\gamma_i(\tau-t);\tilde{\phi})e^{-s(\tau-\alpha)}\left(\upsilon_j^2(\tau) - \tilde{\upsilon}_j^2(\tau)\right)e^{-s\tau}$$
$$-\sum_{j=1}^{6} b_{ij}(z+\gamma_i(\tau-t))e^{-s(\tau-\alpha)}\left(\upsilon_j^1(z+\gamma_i(\tau-t),\tau) - \tilde{\upsilon}_j^1(z+\gamma_i(\tau-t),\tau)\right)e^{-s\tau}\Bigg]d\tau$$
$$+\int\limits_{t_0^i}^{t}\int\limits_0^{\tau}\sum_{j=1}^{6}\Big[Q_{ij}(z+\gamma_i(\tau-t);\upsilon_j^1(z+\gamma_i(\tau-t),\tau-\alpha))e^{-s(\tau-\alpha)}\upsilon_j^2(\alpha)e^{-s\alpha}$$
$$-Q_{ij}(z+\gamma_i(\tau-t);\tilde{\upsilon}_j^1(z+\gamma_i(\tau-t),\tau-\alpha))e^{-s(\tau-\alpha)}\tilde{\upsilon}_j^2(\alpha)e^{-s\alpha}\Big]d\alpha d\tau\Bigg|$$
$$\leqslant n[(\Upsilon_0\tilde{\phi}_0 + b_0)\|\upsilon - \tilde{\upsilon}\|_s + 2r_0\Upsilon_0\|\upsilon - \tilde{\upsilon}\|_s\tau]\int\limits_0^t e^{-s(t-\tau)}\,d\tau$$
$$\leqslant \frac{1}{s}n(\Upsilon_0\tilde{\phi}_0 + b_0 + 2r_0\Upsilon_0 L)\|\upsilon - \tilde{\upsilon}\|_s := \frac{1}{s}\beta_1\|\upsilon - \tilde{\upsilon}\|_s.$$

Аналогично получим следующие оценки:

$$\left|\left(\mathcal{A}_i^2\upsilon - \mathcal{A}_i^2\tilde{\upsilon}\right)e^{-st}\right| \leqslant \frac{36P_0}{sQ_0}(b_0(2+6\Upsilon_0\tilde{\phi}_0) + \Upsilon_0\tilde{\phi}_0 + \Upsilon_0\Gamma_0 + 2r_0\Upsilon_0 L)\|\upsilon - \tilde{\upsilon}\|_s := \frac{1}{s}\beta_2\|\upsilon - \tilde{\upsilon}\|_s,$$
$$\left|\left(\mathcal{A}_i^3\upsilon - \mathcal{A}_i^3\tilde{\upsilon}\right)e^{-st}\right| \leqslant \frac{6}{s}[b_0(2+6\Upsilon_0\tilde{\phi}_0) + \Upsilon_0\tilde{\phi}_0 + \Upsilon_0\Gamma_0 + 2r_0\Upsilon_0 L]\|\upsilon - \tilde{\upsilon}\|_s := \frac{1}{s}\beta_3\|\upsilon - \tilde{\upsilon}\|_s.$$

Отсюда имеем

$$\|\mathcal{A}\upsilon - \mathcal{A}\tilde{\upsilon}\|_s = \max\Big\{\max_{1\leqslant i\leqslant 6}\sup_{(z,t)\in\Pi_0}\left|\left(\mathcal{A}_i^1\upsilon - \mathcal{A}_i^1\tilde{\upsilon}\right)e^{-st}\right|,$$
$$\max_{1\leqslant i\leqslant 6}\sup_{t\in[0,L]}\left|\left(\mathcal{A}_i^2\upsilon - \mathcal{A}_i^2\tilde{\upsilon}\right)e^{-st}\right|, \max_{1\leqslant i\leqslant 6}\sup_{t\in[0,L]}\left|\left(\mathcal{A}_i^3\upsilon - \mathcal{A}_i^3\tilde{\upsilon}\right)e^{-st}\right|\Big\} \leqslant \frac{1}{s}\beta_0\|\upsilon - \tilde{\upsilon}\|_s,$$

где $\beta_0 := \max(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. Выбирая теперь $s > \beta_0$, получим, что оператор $\mathcal{A}$ сжимает расстояние между элементами $\upsilon, \tilde{\upsilon}$ на $S(\upsilon^0, \rho)$.

Как следует из проделанных оценок, если число s выбрано из условия $s > s^* := \max\{\alpha_0, \beta_0\}$, то оператор $\mathcal{A}$ является сжимающим на $S(v^0, \rho)$. В этом случае согласно принципу Банаха [40, с. 87–97] уравнение (56) имеет единственное решение в $S(v^0, \rho)$ для любого фиксированного $L > 0$. Теорема 2 доказана. □

Зная $\varphi_i'(t)$, $\psi_i'(t)$, $i = 1, 2, 3$, можем определить функции $\varphi_i(t)$, $\psi_i(t)$:

$$\varphi_i(t) = \varphi_i(0) + \int\limits_0^t \varphi_i'(\tau)\,d\tau, \quad \psi_i(t) = \psi_i(0) + \int\limits_0^t \psi_i'(\tau)\,d\tau, \quad i = 1, 2, 3.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
2. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988.
3. *Романов В. Г., Кабанихин С. И., Пухначева Т. П.* Обратные задачи электродинамики. Новосибирск: изд. Вычисл. центра СО АН СССР, 1984.
4. *Romanov V. G.* Inverse problems for equation with a memory // Eurasian J. Math. Comput. Applications. 2014. V. 2, N 4. P. 51–80.
5. *Romanov V. G.* Problem of determining the permittivity in the stationary system of Maxwell equations // Dokl. Math. 2017. V. 95, N 3. P. 230-234; Zbl 1375.35532.
6. *Lorenzi A.* An identification problem related to a nonlinear hyperbolic integro-differential equation // Nonlinear Anal.: Theory, Methods Appl. 1994. V. 22, N 1. P. 21–44; DOI: 10.1016/0362-546x(94)90003-5
7. *Дурдиев Д. К., Тотиева Ж. Д.* Задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости // Сиб. журн. индустр. математики. 2013. Т. 16, № 2. С. 72–82.
8. *Яхно В. Г.* Обратные задачи для дифференциальных уравнений упругости. Новосибирск: Наука, 1989.
9. *Janno J., Von Wolfersdorf L.* Inverse problems for identification of memory kernels in viscoelasticity // Math. Methods Appl. Sci. 1997. V. 20, N 4. P. 291–314.
10. *Романов В. Г.* Оценки устойчивости решения в задаче об определении ядра уравнения вязкоупругости // Сиб. журн. индустр. математики. 2012. Т. 15, № 1. С. 86–98.
11. *Дурдиев Д. К., Тотиева Ж. Д.* Задача об определении многомерного ядра уравнения вязкоупругости // Владикавказ. мат. журн. 2015. Т. 17, № 4. С. 18–43.
12. *Durdiev D. K.* Some multidimensional inverse problems of memory determination in hyperbolic equations // Журн. мат. физ., анал., геом. 2007. V. 3, N 4. P. 411–423.
13. *Дурдиев Д. К., Сафаров Ж. Ш.* Обратная задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости в ограниченной области // Мат. заметки. 2015. Т. 97, № 6. С. 855–867.
14. *Romanov V. G.* On the determination of the coefficients in the viscoelasticity equations // Sib. Math. J. 2014. V. 55, N 3. P. 503-510.
15. *Романов В. Г.* Задача об определения ядра в уравнении вязкоупругости // Докл. АН. 2012. Т. 446, № 1. С. 18–20.
16. *Дурдиев Д. К., Рахмонов А. А.* Обратная задача для системы интегродифференциальных уравнений SH-волн в вязкоупругой пористой среде: глобальная разрешимость // Теор. и мат. физика. 2018. Т. 195, № 3. С. 491–506.
17. *Дурдиев Д. К., Рахмонов А. А.* Задача об определении двумерного ядра в системе интегродифференциальных уравнений вязкоупругой пористой среды // Сиб. журн. индустр. математики. 2020. Т. 23, № 2. С. 63–80.
18. *Durdiev D. K., Rahmonov A. A.* A 2D kernel determination problem in a visco-elastic porous medium with a weakly horizontally inhomogeneity // Math. Meth. Appl. Sci. 2020. V. 43, N 15. P. 8776–8796.
19. *Durdiev D. K., Totieva Z. D.* The problem of determining the one-dimensional matrix kernel of the system of viscoelasticity equations // Math. Meth. Appl. Sci. 2018. V. 41, N 17. P. 8019–8032.

20. *Totieva Z. D., Durdiev D. K.* The problem of finding the one-dimensional kernel of the thermoviscoelasticity equation // Math. Notes. 2018. V. 103, N 1–2. P. 118–132.

21. *Safarov Z. S., Durdiev D. K.* Inverse problem for an integro-differential equation of acoustics // Differ. Equ. 2018. V. 54, N 1. P. 134–142.

22. *Durdiev D. K., Totieva Z. D.* The problem of determining the one-dimensional kernel of viscoelasticity equation with a source of explosive type // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2020. V. 28, N 1. P. 43–52.

23. *Дурдиев У. Д.* Обратная задача для системы уравнений вязкоупругости в однородных анизотропных средах // Сиб. журн. индустр. математики. 2019. Т. 22, № 4. С. 26–32; DOI: 10.33048/sibjim.2019.22.403.

24. *Teshaev M. K., Safarov I. I., Kuldashov N. U., Ishmamatov M. R., Ruziev T. R.* On the distribution of free waves on the surface of a viscoelastic cylindrical cavity // J. Vibrational Engineering and Technologies. 2020. V. 8, N 4. P. 579–585.

25. *Mirsaidov M., Teshaev M., Ablokulov S., Rayimov D.* Choice of optimum extinguishers parameters for a dissipative mechanical system // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Engrg. 2020. V. 883, N 1. P. 012100.

26. *Safarov I., Teshaev M., Toshmatov E., Boltaev Z., Homidov F.* Torsional vibrations of a cylindrical shell in a linear viscoelastic medium // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Engrg. 2020. V. 883, N 1. P. 012190.

27. *Teshaev M. K., Safarov I. I., Mirsaidov M.* Oscillations of multilayer viscoelastic composite toroidal pipes // J. Serbian Society Comput. Mechanics. 2019. V. 13, N 2. P. 104–115.

28. *Teshaev M. K.* Realization of servo-constraints by electromechanical servosystems // Russian Mathematics. 2010. V. 54, N 12. P. 38–44.

29. *Karchevsky A. L.* A frequency-domain analytical solution of Maxwell's equations for layered anisotropic media // Russian Geology and Geophysics. 2007. V. 48, N 8. P. 689–695.

30. *Romanov V. G., Karchevsky A. L.* Determination of permittivity and conductivity of medium in a vicinity of a well having complex profile // Eurasian J. Math. Comput. Appl. 2018. V. 6, N 4. P. 62–72.

31. *Karchevsky A. L.* A numerical solution to a system of elasticity equations for layered anisotropic media // Russian Geology and Geophysics. 2005. V. 46, N 3. P. 339–351.

32. *Karchevsky A. L.* The direct dynamical problem of seismics for horizontally stratified media // Sib. Electron. Mat. Izv. 2005. N 2. P. 23–61; Zbl 1125.86004.

33. *Karchevsky A. L.* Numerical solution to the one-dimensional inverse problem for an elastic system // Dokl. Earth Sci. 2000. V. 375, N 8. P. 1325–1328; Zbl 1059.74530.

34. *Karchevsky A. L.* Simultaneous reconstruction of permittivity and conductivity // Inverse and III-Posed Probl. 2009. V. 17, N 4. P. 387–404; Zbl 1177.35253.

35. *Kurpinar E., Karchevsky A. L.* Numerical solution of the inverse problem for the elasticity system for horizontally stratified media // Inverse Probl. 2004. V. 20, N 3. P. 953–976; Zbl 1062.74025.

36. *Karchevsky A. L.* Numerical reconstruction of medium parameters of member of thin anisotropic layers // Inverse III-Posed Probl. 2004. V. 12, N 5. P. 519–534; Zbl 1080.74035.

37. *Durdiev U. D.* Numerical method for determining the dependence of the dielectric permittivity on the frequency in the equation of electrodynamics with memory // Sib. Electron. Mat. Izv. 2020. V. 17, P. 179–189; DOI: 10.33048/semi.2020.17.013

38. *Bozorov Z. R.* Numerical determining a memory function of a horizontally-stratified elastic medium with aftereffect // Eurasian J. Math. Comput. Appl. 2020. V. 8, N 2. P. 4–16.

39. *Дурдиев Д. К., Турдиев Х. Х.* Обратная задача для гиперболической системы первого порядка с памятью // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56, № 12. С. 1666–1675.

40. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 517.968.72

THE PROBLEM OF FINDING THE KERNELS IN THE SYSTEM OF INTEGRO-DIFFERENTIAL MAXWELL'S EQUATIONS

© 2021 **D. K. Durdiev**[1a], **K. K. Turdiev**[2b]

[1] *The Institute of Mathematics named after V. I. Romanovskiy at the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, ul. M. Ikbal 11, Bukhara 200117, Uzbekistan,*
[2] *Bukhara State University, ul. M. Ikbal 11, Bukhara 200117, Uzbekistan*

E-mails: [a]durdiev65@mail.ru, [b]hturdiev@mail.ru

Received 13.01.2021, revised 11.02.2021, accepted 15.04.2021

Abstract. We pose the direct and inverse problem of finding the electromagnetic field and the diagonal memory matrix for the reduced canonical system of integro-differential Maxwell's equations. The problems are replaced by a closed system of Volterra-type integral equations of the second kind with respect to the Fourier transform in the variables x_1 and x_2 of the solution to the direct problem and the unknowns of the inverse problem. To this system, we then apply the method of contraction mapping in the space of continuous functions with a weighted norm. Thus, we prove the global existence and uniqueness theorems for solutions to the posed problems.

Keywords: hyperbolic system, system of Maxwell's equations, integral equation, contraction mapping principle.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.203

REFERENCES

1. Landau L.D., Lifshits E.M. Elektrodinamika sploshnykh sred [Electrodynamics of continuum]. Moscow: Nauka, 1982 (in Russian).
2. Gantmakher F.R. The Theory of Matrices. Amer. Math. Soc., AMS Chelsea Publ., 2000.
3. Romanov V.G., Kabanikhin S.I., Pukhnacheva T.P. Obratnye zadachi elektrodinamiki [Inverse problems of electrodynamics]. Novosibirsk: Izd. Vychisl. Tscentra Sibir. Otdel. Akad. Nauk SSSR, Novosibirsk, 1984 (in Russian).
4. Romanov V.G. Inverse problems for equation with a memory. *Eurasian J. Math. Comput. Applications*, 2014, Vol. 2, No. 4, pp. 51–80.
5. Romanov V.G. Problem of determining the permittivity in the stationary system of Maxwell equations. *Dokl. Math.*, 2017, Vol. 95, No. 3, pp. 230-234; Zbl 1375.35532.
6. Lorenzi A. An identification problem related to a nonlinear hyperbolic integro-differential equation. *Nonlinear Anal.: Theory, Methods Appl.*, 1994, Vol. 22, No. 1, pp. 21–44; DOI: 10.1016/0362-546x(94)90003-5
7. Durdiev D.K., Totieva Zh.D. Zadacha ob opredelenii odnomernogo yadra uravneniya vyazkouprugosti [A problem of determining the one-dimensional kernel of the viscoelasticity equation]. *Sib. Zhurn. Industr. Matematiki*, 2013, Vol. 16, No. 2, pp. 72–82 (in Russian).
8. Yakhno V.G. Obratnye zadachi dlya differentsial'nykh uravnenii uprugosti [Inverse problems for elasticity differential equations]. Novosibirsk: Nauka, 1989 (in Russian).

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2021, Vol. 15, No. 2; DOI: 10.1134/S1990478921020022

9. Janno J., Von Wolfersdorf L. Inverse problems for identification of memory kernels in viscoelasticity. *Math. Methods Appl. Sci.*, 1997, Vol. 20, No. 4, pp. 291–314.

10. Romanov V.G. Stability estimates for the solution to the problem of determining the kernel of a viscoelastic equation. *J. Appl. Ind. Math.*, 2012, Vol. 6, No. 3, pp. 360–370.

11. Durdiev D.K., Totieva Zh.D. Zadacha ob opredelenii mnogomernogo yadra uravneniya vyazkouprugosti [Inverse problem for identification of the multidimensional kernel in a viscoelasticity equation]. *Vladikavkaz. Mat. Zhurn.*, 2015, Vol. 17, No. 4, pp. 18–43 (in Russian).

12. Durdiev D.K. Some multidimensional inverse problems of memory determination in hyperbolic equations. *Zhurn. Mat. Fiz., Anal., Geom.*, 2007, Vol. 3, No. 4, pp. 411–423 (in Russian).

13. Durdiev D.K., Safarov Zh.Sh. Inverse problem of determining the one-dimensional kernel of the viscoelasticity equation in a bounded domain. *Math. Notes*, 2015, Vol. 97, No. 6, pp. 867–877.

14. Romanov V.G. On the determination of the coefficients in the viscoelasticity equations. *Sib. Math. J.*, 2014, Vol. 55, No. 3, pp. 503-510.

15. Romanov V.G. Zadacha ob opredeleniya yadra v uravnenii vyazkouprugosti [A problem of determining the kernel in an viscoelasticity equation]. *Dokl. Akad. Nauk*, 2012, Vol. 446, No. 1, pp. 18–20 (in Russian).

16. Durdiev D.K., Rakhmonov A.A. An inverse problem for a system of integro-differential equations of SH-waves in a viscoelastic porous medium: global solvability. *Teor. Mat. Fiz.* 2018. T. 195, No 3. S. 491–506.

17. Durdiev D.K., Rakhmonov A.A. The problem of determining the 2D kernel in a system of integro-differential equations of a viscoelastic porous medium. *J. Appl. Ind. Math.*, 2020, Vol. 14, No. 2, pp. 281–295.

18. Durdiev D.K., Rahmonov A.A. A 2D kernel determination problem in a visco-elastic porous medium with a weakly horizontally inhomogeneity. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2020, Vol. 43, No. 15, pp. 8776–8796.

19. Durdiev D.K., Totieva Z.D. The problem of determining the one-dimensional matrix kernel of the system of viscoelasticity equations. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2018, Vol. 41, No. 17, pp. 8019–8032.

20. Totieva Z.D., Durdiev D.K. The problem of finding the one-dimensional kernel of the thermoviscoelasticity equation. *Math. Notes*, 2018, Vol. 103, No. 1–2, pp. 118–132.

21. Safarov Z.S., Durdiev D.K. Inverse problem for an integro-differential equation of acoustics. *Differ. Equ.*, 2018, Vol. 54, No. 1, pp. 134–142.

22. Durdiev D.K., Totieva Z.D. The problem of determining the one-dimensional kernel of viscoelasticity equation with a source of explosive type. *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 2020, Vol. 28, No. 1, pp. 43–52.

23. Durdiev U.D. An inverse problem for the system of viscoelasticity equations in homogeneous anisotropic media. *J. Appl. Ind. Math.*, 2019, Vol. 13, No. 4, pp. 623–628;
DOI: 10.33048/sibjim.2019.22.403.

24. Teshaev M.K., Safarov I.I., Kuldashov N.U., Ishmamatov M.R., Ruziev T.R. On the distribution of free waves on the surface of a viscoelastic cylindrical cavity. *J. Vibrat. Engrg. and Technol.*, 2020, Vol. 8, No. 4, pp. 579–585.

25. Mirsaidov M., Teshaev M., Ablokulov S., Rayimov D. Choice of optimum extinguishers parameters for a dissipative mechanical system. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Engrg.*, 2020, Vol. 883, No. 1, pp. 012100.

26. Safarov I., Teshaev M., Toshmatov E., Boltaev Z., Homidov F. Torsional vibrations of a cylindrical shell in a linear viscoelastic medium. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Engrg.*, 2020, Vol. 883, No. 1, pp. 012190.

27. Teshaev M.K., Safarov I.I., Mirsaidov M. Oscillations of multilayer viscoelastic composite toroidal pipes. *J. Serbian Soc. Comput. Mech.*, 2019, Vol. 13, No. 2, pp. 104–115.

28. Teshaev M.K. Realization of servo-constraints by electromechanical servosystems. *Russian Math.*, 2010, Vol. 54, No. 12, pp. 38–44.

29. Karchevsky A.L. A frequency-domain analytical solution of Maxwell's equations for layered anisotropic media. *Russian Geology and Geophys.*, 2007, Vol. 48, No. 8, pp. 689–695.

30. Romanov V.G., Karchevsky A.L. Determination of permittivity and conductivity of medium in a vicinity of a well having complex profile. *Eurasian J. Math. Comput. Appl.*, 2018, Vol. 6, No. 4, pp. 62–72.

31. Karchevsky A.L. A numerical solution to a system of elasticity equations for layered anisotropic media. *Russian Geology and Geophys.*, 2005, Vol. 46, No. 3, pp. 339–351.

32. Karchevsky A.L. The direct dynamical problem of seismics for horizontally stratified media. *Sib. Electron. Mat. Izv.*, 2005, No 2, pp. 23–61; Zbl 1125.86004.

33. Karchevsky A.L. Numerical solution to the one-dimensional inverse problem for an elastic system. *Dokl. Earth Sci.*, 2000, Vol. 375, No. 8, pp. 1325–1328; Zbl 1059.74530.

34. Karchevsky A.L. Simultaneous reconstruction of permittivity and conductivity. *Inverse and III-Posed Probl.*, 2009, Vol. 17, No. 4, pp. 387–404; Zbl 1177.35253.

35. Kurpinar E., Karchevsky A.L. Numerical solution of the inverse problem for the elasticity system for horizontally stratified media. *Inverse Probl.*, 2004, Vol. 20, No. 3, pp. 953–976; Zbl 1062.74025.

36. Karchevsky A. L. Numerical reconstruction of medium parameters of member of thin anisotropic layers. *Inverse III-Posed Probl.*, 2004, Vol. 12, No. 5, pp. 519–534; Zbl 1080.74035.

37. Durdiev U.D. Numerical method for determining the dependence of the dielectric permittivity on the frequency in the equation of electrodynamics with memory. *Sib. Electron. Mat. Izv.*, 2020, Vol. 17, pp. 179–189; DOI: 10.33048/semi.2020.17.013

38. Bozorov Z.R. Numerical determining a memory function of a horizontally-stratified elastic medium with aftereffect. *Eurasian J. Math. Comput. Appl.*, 2020, Vol. 8, No 2, pp. 4–16.

39. Durdiev D.K., Turdiev Kh.Kh. Obratnaya zadacha dlya giperbolicheskoi sistemy pervogo poryadka s pamyat'yu [An inverse problem for a first order hyperbolic system with memory]. *Differents. Uravneniya*, 2020, Vol. 56, No. 12, pp. 1666–1675 (in Russian).

40. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza [Elements of function theory and functional analysis]. Moscow: Nauka, 1989 (in Russian).