

УДК 517.562

МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕГУЛЯРНЫХ ТЕКСТУР НА ИЗОБРАЖЕНИЯХ С ПОМОЩЬЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА

© 2021 И. Г. Казанцев^{1a}, Р. Ж. Туребеков^{2b}, М. А. Султанов^{2c}

*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
просп. Академика Лаврентьева, 6, г. Новосибирск 630090, Россия,
Международный Казахско-Турецкий университет им. Ходжи Ахмеда Ясави,
просп. Бекзат Саттарханова, 29, г. Туркестан 161200, Казахстан*

E-mails: ^akazantsev.ivan6@gmail.com, ^brauan.turebekov@ayu.edu.kz,
^cmurat.sultanov@ayu.edu.kz

Поступила в редакцию 02.12.2020 г.; после доработки 03.02.2021 г.;
принята к публикации 15.04.2021 г.

Преобразование Радона является основным интегральным преобразованием в вычислительной томографии, а также широко используемым методом в машинном зрении и анализе изображений для обнаружения линейных структур и регулярных текстур. Основой его применения является свойство интегралов прямой задачи аккумулировать яркости изображения вдоль исследуемых контуров. Операция обратного проецирования (одна из основных компонент томографических алгоритмов) даёт в результате ридж-функции, обладающие направлениями, в которых они участвовали в прямом операторе. Исследованы ридж-функции и их ориентация в качестве признаков для описания анизотропии регулярных текстур. Эти признаки включены в модель регулярных текстур в виде суммы ридж-функций. Многие текстуры визуально воспринимаются как суперпозиция линейных структур и поэтому исследуются с использованием преобразования Радона. Представлена вычислительная схема сингулярного разложения регулярной текстуры в сумму информативных ридж-функций. Приведены результаты численных экспериментов с текстурами образцов промышленных тканей. Алгоритм может применяться в обработке визуальных данных в системах технического зрения, текстильной промышленности, робототехнике и кристаллографии.

Ключевые слова: обработка изображений, преобразование Радона, регулярные текстуры, текстиль.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.204

ВВЕДЕНИЕ

Преобразование Радона является основным интегральным преобразованием в вычислительной томографии [1], а также широко используемым методом в машинном зрении и анализе изображений для обнаружения линейных структур и регулярных текстур. Применение преобразования Радона для нахождения границ в форме параметризуемых кривых (линии, эллипсы и др.) на цифровых изображениях получило название преобразование Хафа [2], а линейные структуры — термин «линеаменты» [3, 4]. Информация о наличии объектов криволинейной формы содержится в данных, вычисленных на этом изображении, включающих интегралы вдоль кривых, совпадающих с искомыми структурами, поскольку эти интегралы аккумулируют одинаковые (приблизительно) значения вдоль их контуров. В частности, в задаче поиска

Работа выполнена в рамках государственного задания ИВМиМГ СО РАН (проект 0251-2021-0003) и поддержана грантом Министерства образования и науки Республики Казахстан (проект AP05133873).

линейных структур присутствие прямой линии проявляется в локальных экстремумах на синограмме, т. е. визуализированном изображении преобразования Радона. Математическим обобщением линейных структур являются ридж-функции (ridge functions), впервые определённые в [5] и обзор которых можно найти в монографии [6] и статьях [7, 8]. Здесь мы используем ридж-функции и их ориентацию в качестве признаков для описания анизотропии таких важных объектов на изображениях, как регулярные текстуры. Эти признаки включены в модель многих регулярных текстур в виде суммы ридж-функций.

Текстуры делятся на два класса — стохастические и регулярные [9, 10]. Стохастическая текстура представляет собой случайное поле яркостей, где строительные элементы не поддаются аналитическому описанию, поэтому статистические методы обработки сигналов являются более подходящими [11]. Примером стохастической текстуры может служить «белый» шум на экране телевизора, рябь на поверхности водоёма во время дождя, снимки крон деревьев с высоты и др. Объектом анализа в данной работе являются регулярные текстуры. Наряду с этим термином могут использоваться «орнамент», «узор», «фактура»; распространённые примеры — кирпичная кладка, паркет, решётки, плетения, текстиль, денежные банкноты и др. В приложениях компьютерного зрения [12–14] таких, как автоматический контроль материалов, обнаружение дефектов в текстурах выделилось в отдельную область анализа изображений. Представление об обширной тематике можно получить из множества обзоров и монографий [15–20].

Дефекты в текстуре являются областями локального случайного нарушения периодичности узора ткани. Традиционно дефекты выявлялись визуальным контролем с участием человека, что занимает много времени и не обеспечивает точности. Для объективной и последовательной оценки применяют автоматизированные системы контроля, основанные на компьютерном зрении. Автоматизированная проверка ткани предлагает ряд преимуществ, включая повышение безопасности, снижение затрат, устранение человеческой ошибки, и даёт возможность осуществлять фактическое производство и контроль ткани отдельно. За последние десятилетия были разработаны различные методы автоматического контроля тканей такие, как мониторинг пространственно-частотного спектра ткани [21], вариационные методы [22], вейвлет-анализ [23], малоранговые представления текстур [24], методы теории решёток и покрытий [25], глубокое обучение нейронных сетей [26], регрессионный анализ [27] и другие.

Выделение текстур на изображениях в этой работе основывается на количественном критерии информативности интегральных данных преобразования Радона. В экспериментах с промышленными образцами текстур текстиля показано, что декомпозиция регулярной текстуры в сумму небольшого числа (4–8) наиболее информативных ридж-функций даёт хорошую аппроксимацию текстуры. Эта методика может осуществлять контроль текстурных изображений в системах машинного зрения и обнаружение на них бесструктурных включений.

Статья структурирована следующим образом. В разд. 1 введены определения и изложены основные положения и утверждения, необходимые для обоснования анализа регулярных текстур в пространстве Радона. В разд. 2 изложен метод сингулярного разложения преобразования Радона. В разд. 3 излагается критерий информативности проекций для определения преобладающих направлений в текстуре. В разд. 4 обсуждается вычислительная схема декомпозиции текстур в сумму ридж-функций. В разд. 5 приведены результаты апробации метода на снимках текстур из открытых баз данных изображений.

1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАДОНА

Введём определение преобразования Радона [1] и приведём основные положения и утверждения, необходимые для обоснования анализа регулярных текстур с помощью преобразования Радона.

Определение 1. Преобразование Радона R (двумерное) определяется как оператор, отображающий функцию f , определённую в \mathbb{R}^2 , во множество её интегралов по прямым линиям в \mathbb{R}^2 :

$$Rf(\theta, s) \equiv p(\theta, s) = \int_{\langle u, \theta \rangle = s} f(u) du = \int_{-\infty}^{\infty} f(s\theta + t\theta^\perp) dt, \quad (1)$$

где $\theta = \theta(\alpha) = (\cos \alpha \ \sin \alpha)^T \in \mathbb{S}^1$ — единичный вектор, α — угол между вектором θ и положительной осью y , $\theta^\perp = (-\sin \alpha \ \cos \alpha)^T$ перпендикулярно θ , $s \in \mathbb{R}^1$.

Обратное преобразование Радона [1] по данным $p = Rf$ имеет вид

$$f = \frac{1}{4\pi} R^\# \mathbb{H} \frac{\partial}{\partial s} p, \quad (2)$$

где \mathbb{H} обозначает преобразование Гильберта по второй переменной

$$\mathbb{H}p(\theta, s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(\theta, t)}{s-t} dt, \quad (3)$$

а $R^\#$ есть оператор обратного проецирования

$$R^\#p(u) = \int_0^{2\pi} p(\theta, \langle u, \theta \rangle) d\alpha. \quad (4)$$

При фиксированном θ функция $p(\theta, \langle u, \theta \rangle)$ постоянна на прямых, перпендикулярных θ . Напомним определение ридж-функций [5–8].

Определение 2. Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ — некоторое множество. Ридж-функцией на D называется функция вида $\varphi(\langle a, x \rangle)$, где $x = (x_1, x_2) \in D$, $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ и φ — действительная функция.

Функция $p(\theta, \langle u, \theta \rangle)$ является ридж-функцией, а уравнения (2)–(4) описывают представление функции f в виде суммы ридж-функций. Эти формулы лежат в основе метода фильтрованных обратных проекций (ФОП), в котором оператор $(1/4\pi)\mathbb{H}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)$ аппроксимируется оператором свёртки с ядром k , в результате алгоритм восстановления имеет форму

$$f = R^\#(k * p), \quad (k * p)(\theta, s) = \int_{-\infty}^{\infty} k(s-t)p(\theta, t) dt.$$

Приведённые формулы существенно используют полные данные по θ , s . На практике эти данные дискретны и переход от выборочных значений к полным данным продолжает оставаться актуальной задачей. Предполагаем, что функции f интерпретируются как изображения с носителем в форме круга.

Пусть f — функция, интегрируемая с квадратом и носителем D — кругом единичного радиуса на плоскости (x, y) , т. е. $f \in L_2(D)$. Удобно использовать параметризацию направления проекций $p(\theta, s)$ не вектором $\theta = \theta(\alpha) = (\cos \alpha \ \sin \alpha)^T$, а углом α , составляемым этим вектором с положительным направлением оси y . При этом часто употребляемое в литературе сокращение «проекция $p(\alpha, s)$ в направлении α » понимается как $p(\theta, s)$. Преобразование отображает функцию f на её интегралы вдоль пучка параллельных прямых, параметризуемых

углом $\alpha \in [0, \pi)$ и расстоянием $s \in [-1, 1]$ от начала координат. Уравнение (1) может быть записано с указанием пределов интегрирования:

$$R_\alpha f(s) = \int_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} f(s \cos \alpha - t \sin \alpha, s \sin \alpha + t \cos \alpha) dt.$$

Оператор $f \mapsto R_\alpha f$ непрерывен, когда выбраны пространства $L_2(D)$, $L_2([-1, 1], (1 - s^2)^{-1/2})$. Отдельная проекция будет обозначаться также в виде $p(\alpha, s) = p_\alpha(s)$. Формула (2) предполагает известными все $p(\alpha, s)$, заданные на множестве $[0, \pi) \times [-1, 1]$. В практических ситуациях вычислительной томографии данные представлены конечным набором проекций и конечным числом отсчётов на проекцию. Будем называть проекцию полной, если она известна на всем отрезке $[-1, 1]$. Если множество направлений проекций представлено n -вектором $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in [0, \pi)^n$, то соответствующий набор полных проекций обозначаем как $R_\omega f = (R_{\omega_1} f, \dots, R_{\omega_n} f)$. В томографических сканерах, регистрирующих достаточное число равномерно распределённых по углам проекций, реконструкция функции f по данным $R_\omega f$ осуществляется в виде суммы фильтрованных обратных проекций:

$$f(x, y) \approx \sum_{i=1}^n r_i(x \cos \omega_i + y \sin \omega_i) = \sum_{i=1}^n r_i((x, y) \cdot (\cos \omega_i \ \sin \omega_i)^T). \quad (5)$$

Функции r_i определены как

$$r_i(s) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\omega_i, t) k(s - t) dt.$$

Ядро свёртки k есть регуляризованная версия обратного преобразования Фурье от модуля пространственной частоты $|\xi|$. Следует отметить, что для каждого r_i используется одно и то же ядро k . Метод ФОП также тесно связан с методами обращения на основе преобразования Фурье и теоремы о центральном сечении. Эта теорема утверждает, что одномерный фурье-образ $\hat{p}(\theta, \xi)$ проекционных данных $p(\theta, s)$ равен центральному сечению двумерного фурье-образа \hat{f} в направлении θ^\perp . Формула (5) выражает аппроксимацию функции f в виде суммы ридж-функций r_i с направлениями ω_i , равномерно распределёнными в интервале $[0, \pi)$.

2. СИНГУЛЯРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА

Однако в случае произвольного набора направлений ω , а также в случае их малого числа среди аналитических методов оказывается предпочтительнее подход, основанный на теореме существования [5] о том, что если H — функция в $L_2(D)$ с наименьшей нормой, удовлетворяющая условиям

$$R_{\omega_i} f = R_{\omega_i} H, \quad i = 1, \dots, n, \quad (6)$$

тогда существуют функции $h_1, \dots, h_n \in L_2([-1, 1], (1 - s^2)^{-1/2})$ такие, что

$$H(x, y) \equiv H_\omega(x, y) = \sum_{i=1}^n h_i(x \cos \omega_i + y \sin \omega_i). \quad (7)$$

Функции $h_i(x \cos \omega_i + y \sin \omega_i)$ являются ридж-функциями. Теорема Логана — Шеппа есть утверждение о существовании ридж-функций в выбранных направлениях. Получим конструктивный алгоритм вычисления суммы ридж-функций $H_\omega(x, y)$ по произвольному набору полных проекций $R_\omega f$. Пусть $H \in L_2(D)$ ищется в виде суммы (7) n ридж-функций. Обозначим

$p_i(s) \equiv p(\omega_i, s)$. Уравнения $R_{\omega_i}H(s) = p_i(s)$, $i = 1, \dots, n$, образуют совместную систему, эквивалентную системе (6). Она может интерпретироваться одновременно и как модель генерирования проекций p_i для функции H . Тогда проблема восстановления функции H может быть сформулирована в терминах функций одной переменной h_i и p_i . Предлагаемый подход основан на следующих утверждениях.

Утверждение 1. Пусть $H_\beta(x, y) = h_\beta(x \cos \beta + y \sin \beta)$, где $h_\beta(s) \in L_2([-1, 1], (1-s^2)^{-1/2})$. Тогда проекция $R_\alpha H_\beta \equiv R_\alpha[H_\beta]$ от H_β имеет вид

$$R_\beta[H_\beta](s) = 2(1-s^2)^{1/2}h_\beta(s), \quad R_\alpha[H_\beta](s) = \frac{1}{\sin(\alpha-\beta)} \int_{s_1}^{s_2} h_\beta(t) dt,$$

где

$$s_1 = s \cos(\alpha - \beta) - (1 - s^2)^{1/2} \sin(\alpha - \beta), \quad s_2 = s \cos(\alpha - \beta) + (1 - s^2)^{1/2} \sin(\alpha - \beta).$$

Доказательство. Имеем

$$\|H_\beta\|_{L_2(D)}^2 = 1/2 \int_{-1}^1 (1-s^2)^{-1/2} h_\beta^2(s) ds < \infty.$$

Тогда $H_\beta \in L_2(D)$ и преобразование R_α применимо:

$$\begin{aligned} R_\alpha[H_\beta](s) &= \int_{-(1-s^2)^{1/2}}^{(1-s^2)^{1/2}} H_\beta(s \cos \alpha - z \sin \alpha, s \sin \alpha + z \cos \alpha) dz \\ &= \int_{-(1-s^2)^{1/2}}^{(1-s^2)^{1/2}} h_\beta(s \cos(\alpha - \beta) - z \sin(\alpha - \beta)) dz. \end{aligned}$$

Замена переменных $t = s \cos(\alpha - \beta) - z \sin(\alpha - \beta)$ доказывает утверждение. \square

Утверждение 2. Если функция $H(x, y)$ является суммой ридж-функций, то ограничения в виде проекционных данных $R_{\omega_i}H = p_i$, $i = 1, \dots, n$ равносильны системе интегральных уравнений Фредгольма третьего рода

$$a(s)h_i(s) + \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{1}{\sin(\omega_i - \omega_j)} \int_{s_1}^{s_2} h_j(t) dt = p_i(s), \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} a(s) &= 2(1-s^2)^{1/2}, \quad s \in [-1, 1], \\ s_1 &= s \cos(\omega_i - \omega_j) - (1-s^2)^{1/2} \sin(\omega_i - \omega_j), \quad s_2 = s \cos(\omega_i - \omega_j) + (1-s^2)^{1/2} \sin(\omega_i - \omega_j). \end{aligned}$$

Доказательство. Обозначим $H_{\omega_j}(x, y) = h_j(x \cos \omega_j + y \sin \omega_j)$. Благодаря линейности преобразования Радона, ограничения принимают вид

$$R_{\omega_i} \left[\sum_{j=1}^n H_{\omega_j} \right] (s) = R_{\omega_i} [H_{\omega_i}] (s) + \sum_{j=1, j \neq i}^n R_{\omega_i} [H_{\omega_j}] (s).$$

Применяя утверждение 1, получаем систему (8). \square

Утверждение 3. Полиномы Чебышёва второго рода $U_{k-1}(t) = \frac{\sin(k \arccos t)}{\sin(\arccos t)}$, $k = 1, 2, \dots$, удовлетворяют соотношению

$$\int_{s_1}^{s_2} U_{k-1}(t) dt = a(s) \frac{\sin(k\alpha)}{k} U_{k-1}(s),$$

где $s_1 = s \cos \alpha - (1 - s^2)^{1/2} \sin \alpha$, $s_2 = s \cos \alpha + (1 - s^2)^{1/2} \sin \alpha$.

Доказательство. Используем тождество $T'_k(t) = kU_{k-1}(t)$, где $T_k = \cos(k \arccos t)$ — полиномы Чебышёва первого рода. Подставляя $\cos \beta = s$, $\sin \beta = (1 - s^2)^{1/2}$, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\cos(\beta+\alpha)}^{\cos(\beta-\alpha)} \frac{T'_k(t)}{k} dt &= \frac{1}{k} [T_k(\cos(\beta - \alpha)) - T_k(\cos(\beta + \alpha))] \\ &= \frac{2}{k} \sin(k \arccos s) \sin(k\alpha) = \frac{a(s)}{k} U_{k-1}(s) \sin(k\alpha). \end{aligned}$$

Утверждение 3 доказано. \square

Теорема 1. Пусть $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ есть n -вектор различных углов. Пусть $f \in L_2(D)$ и H — функция в $L_2(D)$ с наименьшей нормой, удовлетворяющая условиям $R_{\omega_i} f = R_{\omega_i} H$, $i = 1, \dots, n$. Тогда функции h_1, \dots, h_n , составляющие разложение в сумму ридж-функций $H(x, y) = \sum_{i=1}^n h_i(x \cos \omega_i + y \sin \omega_i)$, могут быть записаны в виде

$$h_i(s) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^n \eta_{ij}^{(k)} U_{k-1}(s) \int_{-1}^1 p_j(t) U_{k-1}(t) dt, \quad (9)$$

где $\eta_{ij}^{(k)}$ являются элементами матрицы, обобщённой обратной к $\Lambda_k = [\lambda_{ij}^{(k)}]$, $i, j = 1, \dots, n$, где

$$\lambda_{ij}^{(k)} = \frac{\sin(k(\omega_i - \omega_j))}{k \sin(\omega_i - \omega_j)}.$$

Доказательство. Имеем

$$h_i, p_i \in L_2([-1, 1], (1 - s^2)^{-1/2}) \subset L_2([-1, 1]) \subset L_2([-1, 1], (1 - s^2)^{1/2}).$$

Тогда, полагая $v_i(s) = p_i(s)/a(s)$, мы имеем $v_i, h_i \in L_2([-1, 1], (1 - s^2)^{1/2})$ и можем использовать разложение по полиномам Чебышёва функций v_i и h_i :

$$h_i(s) = \sum_{k=1}^{\infty} b_i^{(k)} U_{k-1}(s), \quad v_i(s) = \sum_{k=1}^{\infty} c_i^{(k)} U_{k-1}(s), \quad (10)$$

где коэффициенты $b_i^{(k)}$ и $c_i^{(k)}$ имеют форму

$$b_i^{(k)} = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{1/2} h_i(t) U_{k-1}(t) dt,$$

$$c_i^{(k)} = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{1/2} v_i(t) U_{k-1}(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 p_i(t) U_{k-1}(t) dt.$$

Подставляя выражения (10) в систему (8) и используя утверждение 3, получаем

$$a(s) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^n \lambda_{ij}^{(k)} b_j^{(k)} - c_i^{(k)} \right) U_{k-1}(s) = 0, \quad s \in [-1, 1], \quad i = 1, \dots, n, \quad (11)$$

где

$$\lambda_{ij}^{(k)} = \frac{\sin(k(\omega_i - \omega_j))}{k \sin(\omega_i - \omega_j)}.$$

Из совместности систем (8) и (11) следует, что система

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{ij}^{(k)} b_j^{(k)} = c_i^{(k)} \quad i = 1, \dots, n, \quad (12)$$

также совместна. Матрица $\Lambda_k = [\lambda_{ij}^{(k)}]$ может быть сингулярной (например, при $k = 1$). В этом случае минимальное нормальное решение системы (12) вычисляется с использованием матрицы, обобщённой обратной к Λ_k . Представим решение системы (11) в виде

$$h_i(s) = \sum_{k=1}^{\infty} U_{k-1}(s) \sum_{j=1}^n \eta_{ij}^{(k)} c_j^{(k)},$$

где $\eta_{ij}^{(k)}$ — элементы матрицы Λ_k^{-1} или Λ_k^+ . В результате получаем (9). \square

Следствие 1. *Норма функции H имеет вид*

$$\|H\|^2 = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i,j=1}^n \eta_{ij}^{(k)} \int_{-1}^1 U_{k-1}(s) p_i(s) ds \int_{-1}^1 U_{k-1}(t) p_j(t) dt.$$

Доказательство. Следует из теоремы 1 и тождества

$$\|H\|^2 = \sum_{i=1}^n \int_{-1}^1 h_i(s) p_i(s) ds.$$

Следствие 1 доказано. \square

Если углы направлений проекций ω_i равномерно распределены ($\omega_i = (i-1)\pi/n$, $i = \overline{1, n}$), то возможно аналитическое обращение матрицы Λ_k [28].

Утверждение 4. *Для значений $k < n$ матрица Λ_k сингулярна и её обобщённая обратная Λ_k^+ имеет вид $\Lambda_k^+ = \frac{k^2}{n^2} \Lambda_k$.*

В случае произвольных направлений мы используем численную процедуру **pinv** псевдообращения матриц из стандартных библиотек программ пакета МАТЛАБ. В недавних работах [6–8], содержащих также и обзоры литературы, продолжают исследования вопросов гладкости, единственности и устойчивости сумм ридж-функций и SVD-разложения преобразования Радона, начатые в классических работах [5, 29, 30, 31].

3. ИНФОРМАТИВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ ПРОЕКЦИЙ

Предположим, что изображение f известно, как имеет место в случае решения прямой задачи или в задачах анализа и распознавания изображений. Тогда данные в виде n проекций $R_\omega f = (p_{\omega_1}, \dots, p_{\omega_n})$ могут интерпретироваться как представители или признаки изображения f . Варьируя n -вектор направлений ω , может быть найдена наилучшая аппроксимация f в виде $H_\omega = \sum_{j=1}^n h_{\omega_j}$. Мы назовём одну группу проекций более информативной, чем другая, если реконструкция по первой группе данных лучше, чем по второй (в смысле выбранной нормы). Информативность проекционных данных $R_\omega f$ может оцениваться нормой минимального решения H_ω в силу равенства [28]: $\|f - H_\omega\|^2 = \|f\|^2 - \|H_\omega\|^2$.

Определение 3. Введём обозначение $Q(f, \omega) \equiv \|H_\omega(x, y)\|^2$ и будем называть эту величину информативностью набора проекций $R_\omega f$.

Если для двух наборов проекций $R_\omega f$ и $R_\alpha f$, регистрируемых по наборам направлений ω и α , выполняется $Q(f, \omega) > Q(f, \alpha)$, то будем говорить, что проекции $R_\omega f$ более информативны, чем $R_\alpha f$. Напомним, что информативность может быть вычислена по проекциям и ридж-функциям следующим образом:

$$Q(f, \omega) = \|H_\omega\|^2 = \sum_{j=1}^n \int_{-1}^1 p_{\omega_j}(s) h_{\omega_j}(s) ds. \quad (13)$$

При известном f и данном числе проекций n наиболее информативный набор направлений ω^0 находится глобальным поиском

$$\omega^0 = \arg \max_{\omega} Q(f, \omega). \quad (14)$$

Можно показать, что информативность отдельной проекции p_{ω_j} вычисляется в виде

$$Q^0(f, \omega_j) \equiv 1/2 \int_{-1}^1 (1 - s^2)^{-1/2} p_{\omega_j}^2(s) ds. \quad (15)$$

На практике каждая проекция p_{ω_j} представляют собой дискретный набор интегралов вдоль лучей. Возникает задача вычисления интегралов $\int p_{\omega_j}(t) U_{k-1}(t) dt$ по дискретным данным. Пусть нам даны m значений $p_{jl} = p_{\omega_j}(t_l)$ проекции p_{ω_j} в некоторых точках $t_l \in (-1, 1)$, $l = 1, \dots, m$. В случае, когда

$$t_l = \cos\left(\frac{2l-1}{2m}\pi\right),$$

может быть применена квадратурная формула Гаусса — Чебышёва:

$$\int_{-1}^1 \frac{u(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \cong \frac{\pi}{m} \sum_{l=1}^m u(t_l).$$

Тогда имеем

$$\int_{-1}^1 p_{\omega_j}(t) U_{k-1}(t) dt \cong \frac{\pi}{m} \sum_{l=1}^m p_{\omega_j}(t_l) \sin\left(k \frac{2l-1}{2m}\pi\right)$$

и формула (9) преобразуется к виду

$$h_{\omega_i}(s) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^n \eta_{ij}^{(k)} U_{k-1}(s) \sum_{l=1}^m p_{jl} \sin\left(k \frac{2l-1}{2m}\pi\right).$$

При численном обращении ряда (9) должны быть ограничены конечным числом членов, а их число в частной сумме становится параметром регуляризации этого SVD-разложения. В наших экспериментах параметр усечения бесконечного ряда выбран равным числу отсчётов (детекторов) в проекции.

4. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СХЕМА ДЕКОМПОЗИЦИИ ТЕКСТУР

Рабочая гипотеза состоит в том, что регулярные текстуры достаточно хорошо аппроксимируются суммой небольшого ($M = 2, 3, \dots, 10$) числа информативных ридж-функций. Число M выбирается для каждой исследуемой текстуры моделированием. Типичные размеры матрицы изображения текстуры $n \times n$ составляют значения $n = 256, \dots, 512$ и более. Практика показывает, что для таких n вычисление преобразования Радона R_ω в виде матрицы размерности $n \times n$ обладает достаточным разрешением по углу. Вычислим полную синограмму R_ω и найдём M информативных проекций в направлениях $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_M)$, так что множество углов α есть подмножество множества углов ω . Множество α может быть найдено полным комбинаторным перебором M углов среди набора n направлений ω и вычислением информативности Q по формулам (13), (14) или быстрым поиском локальных максимумов информативности Q^0 отдельных проекций по формуле (15). Затем вычисляется минимальное решение H_α . Если на текстуре имеется дефект, он проявится в реконструкции H_α как более заглаженная область в силу интегральной природы преобразования Радона и регуляризации процедуры усечённого сингулярного разложения. Имея исходное изображение текстуры с нерегулярностью и информативную аппроксимацию с подавленным дефектом, мы можем, исследуя их разницу, выявить дефект, так как не дефектные области вычтутся. Области со значительной разницей определяются как индикаторы аномалии и обнаруживаются в общем случае статистическими методами.

5. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ С ТЕКСТУРАМИ

В вычислительных экспериментах использованы образцы текстур из двух открытых баз данных [32, 33] изображений текстиля. Выбранная текстура ограничивается круговым окном в изображении квадратной формы размером $n \times n$. Для изображения f численно генерируются n проекций, равномерно распределённых в диапазоне $[0, \pi)$, т. е. с дискретностью $180/n$ градусов. Каждая проекция имеет n отсчётов, так что преобразование Радона, или синограмма, имеет размер $n \times n$. Значения информативности Q^0 отдельных n проекций вычислены по формуле (15), а затем, исследуя локальные максимумы, можно выбирать M проекций α , по которым вычисляется SVD-реконструкция H_α . Выбор проекций для последующего использования в реконструкции осуществляется автоматически поиском локальных максимумов, по числу заранее задаваемых информативных проекций. Результаты эксперимента для каждого образца выбранного тестового изображения иллюстрируются на рис. 1 и 2 в форме пяти последовательных изображений слева направо следующим образом:

- (а) тестовое изображение f ;
- (б) преобразование Радона (синограмма), проекции расположены строка за строкой последовательно сверху вниз, отсчёты (детекторы) составляют горизонтальную ось;
- (в) информативность отдельной проекции, график Q^0 изображён вертикально сверху вниз, для удобства сравнения с синограммой;
- (г) реконструкция или минимальное нормальное решение H_α ;
- (д) разность тестового изображения и нормального решения $|f - H_\alpha|$.

Проведённые численные эксперименты показали, что поиск набора углов ω^0 (14), на котором достигается глобальный максимум совместной информативности Q (13), может быть

ускорен с помощью одномерного поиска M локальных максимумов информативности Q^0 отдельных проекций (15). Эксперименты на ряде текстур из баз данных [32, 33] и других изображений текстиля показали, что использование быстрого критерия информативности Q^0 отдельных проекций в случае исследования регулярных текстур даёт результаты, сравнимые с глобальным поиском.

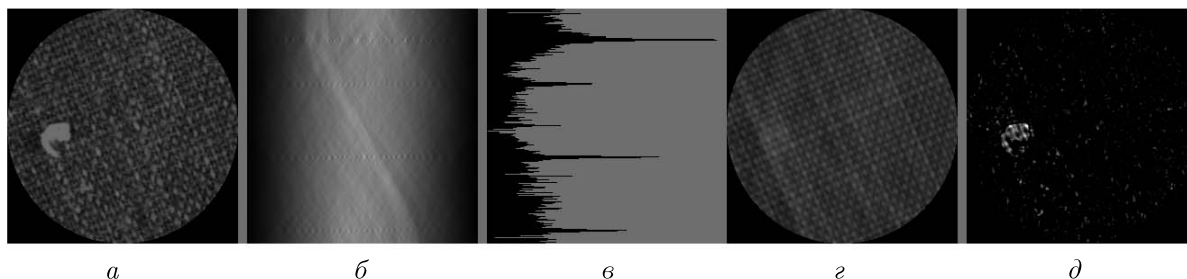


Рис. 1. Текстиль, образец E2R10.jpg из базы данных GLSR [32]:

- (а) тестовый объект f , $n = 256$, $\|f\|^2 = 65903$;
- (б) синограмма размером $n \times n$;
- (в) график значений информативности Q^0 ;
- (г) реконструкция H_α по четырём проекциям, выбранным в направлениях $\alpha = (24^\circ, 58^\circ, 113^\circ, 170^\circ)$, $\|H_\alpha\|^2 = 63733$, $\|H_\alpha\|^2/\|f\|^2 = 0,97$;
- (д) модуль разности $|f - H_\alpha|$ изображений с номерами (а) и (г)

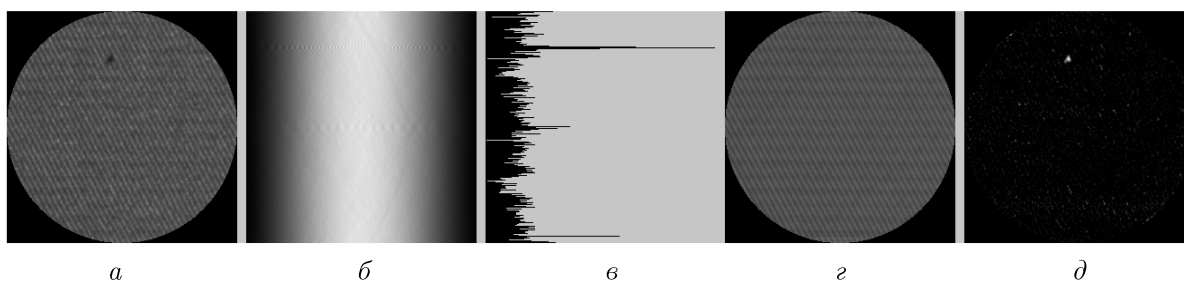


Рис. 2. Текстиль, образец 0057_019_06.png из базы данных AITEX [33]:

- (а) тестовый объект f , $n = 256$, $\|f\|^2 = 60495$;
- (б) синограмма размером $n \times n$;
- (в) график n значений информативности Q^0 ;
- (г) реконструкция H_α по трём проекциям в направлениях $\alpha = (28^\circ, 89^\circ, 128^\circ)$, $\|H_\alpha\|^2 = 60202$, $\|H_\alpha\|^2/\|f\|^2 = 0,99$;
- (д) модуль разности $|f - H_\alpha|$ изображений с номерами (а) и (г)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследованы возможности использования сингулярного разложения преобразования Радона в моделировании регулярных текстур на изображениях. Анизотропия в определённых направлениях рассматривается как характерный признак таких структур. В качестве количественной оценки качества аппроксимации изображения суммой небольшого числа ридж-функций применён критерий информативности проекционных данных. Вычислительные эксперименты проведены на ряде изображений реальных текстур из баз данных, используемых в текстильной индустрии для апробирования методов и алгоритмов обнаружения дефектов. Алгоритм сингулярного разложения преобразования Радона показал эффективность и достаточно точное восстановление гладких аппроксимаций регулярных текстур. В отличие от большинства эвристических подходов обработки изображений предлагаемый метод имеет аналитическое обоснование. Границы применения подхода, как и способы разделения текстур на

регулярные и нерегулярные, остаются актуальными проблемами и являются предметом дальнейших исследований. Метод может применяться в системах технического зрения, в будущем планируется совершенствование этого подхода в направлении улучшения помехоустойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Наттерер Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии. М.: Мир, 1990.
2. *Bachiller-Burgos P., Manso L. J., Bustos P.* A variant of the Hough transform for the combined detection of corners, segments, and polylines // *J. Image Video Proc.* 2017. V. 2017. P. 32.
3. *Бондур В. Г., Зверев А. Т.* Метод прогнозирования землетрясений на основе линеаментного анализа космических изображений // *Докл. АН.* 2005. Т. 402, № 1. С. 98–105.
4. *Алексеев А. С., Казанцев И. Г., Пяткин В. П.* Томографический подход к выделению линеаментов на аэрокосмических изображениях // *Исследование Земли из космоса.* 1988. № 5. С. 99–103.
5. *Logan B. F., Shepp L. A.* Optimal reconstruction of a function from its projections // *Duke Math. J.* 1975. V. 42. P. 645–659.
6. *Pinkus A.* Ridge Functions. Cambridge: Univ. Press, 2015.
7. *Исмаилов В. Э.* Аппроксимация суммами ридж функций с фиксированными направлениями // *Алгебра и анализ.* 2016. Т. 28, № 6. С. 20–69.
8. *Конягин С. В., Кулешов А. А., Майоров В. Е.* Некоторые проблемы теории ридж-функций // *Тр. Мат. ин-та им. Стеклова.* 2018. Т. 301. С. 155–181.
9. *Haralick R. M.* Statistical and structural approaches to texture // *Proc. IEEE.* 1979. V. 67, N 5. P. 786–804.
10. *Кольцов П. П.* Сравнительное изучение алгоритмов выделения и классификации текстур // *Журн. вычисл. математики и мат. физики.* 2011. Т. 51, № 8. С. 1561–1568.
11. *Tomita F., Tsuji S.* Computer analysis of visual textures. Boston: Kluwer Acad. Publ., 1990.
12. *Ершов С. В., Реймер В., Калинин Е. Н., Грис Т.* Разработка системы компьютерного зрения для измерения направленности волокон в плетёных структурах // *Изв. вузов. Технология текстильной промышленности.* 2019. № 5. С. 204–208.
13. *Ньян В. Х.* Информационная система контроля качества производства многослойных тканых материалов на основе обработки их изображений: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. М., 2020.
14. *Applications of Computer Vision in Fashion and Textiles.* Cambridge: Woodhead Publ., 2018.
15. *Thomassey S., Zeng X.* Artificial Intelligence for Fashion Industry in the Big Data Era. Singapore: Springer-Verl., 2018.
16. *Mahajan P. M., Kolhe S. R., Patil P. M.* A review of automatic fabric defect detection techniques // *Adv. Comput. Research.* 2009. V. 1, N 2. P. 18–29.
17. *Ngan H. Y. T., Pang G. K. H., Yung N. H. C.* Automated fabric defect detection: A review // *Image Vis. Comput.* 2011. V. 29, N 7. P. 442–458.
18. *Hanbay K., Talu M. F., Özgüven Ö. F.* Fabric defect detection systems and methods. A systematic literature review // *Optik.* 2016. V. 127, N 24. P. 11960–11973.
19. *Behera B. K.* Image-processing in textiles // *Textile Progress.* 2004. V. 35, N 2–4. P. 1–193.
20. *Zhang J., Xin B., Wu X.* A Review of fabric identification based on Image Analysis Technology // *Textiles and Light Industrial Science and Technology (TLIST).* 2013. V. 2, N 3. P. 120–130.
21. *Chan C.-H., Pang G. K. H.* Fabric Defect Detection by Fourier Analysis // *IEEE Trans. Industry Applications.* 2000. V. 36, N 5. P. 1267–1276.
22. *Vese L. A., Osher S. J.* Modeling textures with total variation minimization and oscillating patterns in image processing // *J. Sci. Computing.* 2003. V. 19. P. 553–572.
23. *Chaudhari C., Gupta R. K., Fegade S.* A hybrid method of textile defect detection using GLCM, LBP, SVD and Wavelet Transform // *Internat. J. Recent Technology and Engineering.* 2020. V. 8, N 6. P. 5356–5360.

24. Peng L., Liang J., Shen X., Zhao M., Sui L. Textile fabric defect detection based on low-rank representation // *Multimedia Tools and Applications*. 2019. V. 78, N 1. P. 99–124.
25. Ng M. K., Ngan H. Y. T., Yuan X., Zhang W. Lattice-based patterned fabric inspection by using total variation and sparsity with low-rank representations // *SIAM J. Imaging Sci.* 2017. V. 10, N 4. P. 2140–2164.
26. Liu Z., Wang B., Li C., Yu M., Ding S. Fabric defect detection based on deep-feature and low-rank decomposition // *J. Engineered Fibers and Fabrics*. 2020. V. 15. P. 1–12.
27. Cao J., Zhang J., Wen Z., Wang N., Liu X. Fabric defect inspection using prior knowledge guided least squares regression // *Multimedia Tools and Applications*. 2017. V. 76, N 3. P. 4141–4157.
28. Kazantsev I. G. Tomographic reconstruction from arbitrary directions using ridge functions // *Inverse Problems*. 1998. V. 14. P. 635–645.
29. Davison M. E. A singular value decomposition for the Radon transform in n-dimensional Euclidian space // *Numer. Funct. Anal. and Optim.* 1981. V. 3. P. 321–340.
30. Davison M. E., Grunbaum F. A. Tomographic reconstruction with arbitrary directions // *Comm. Pure Appl. Math.* 1981. V. 34. P. 77–120.
31. Louis A. K. Optimal sampling in nuclear magnetic resonance (NMR) tomography // *J. Comput. Assist. Tomogr.* 1982. V. 6, N 2. P. 334–340.
32. Fabric Defect Inspection GLSR Dataset. URL: <https://github.com/jjcao/Fabric-Defect-Inspection-GLSR>
33. Silvestre-Blanes J., Albero-Albero T., Miralles I., Pérez-Llorens R., Moreno J. A public fabric image database for defect detection // *AUTEX Research J.* 2019. V. 19, N 4. P. 363–374; URL: <https://www.aitex.es/afd/>

UDC 517.562

MODELING REGULAR TEXTURES IN IMAGES USING THE RADON TRANSFORM© 2021 I. G. Kazantsev^{1a}, R. Z. Turebekov^{2b}, M. A. Sultanov^{2c}¹*Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS,
pr. Acad. Lavrentyeva 6, Novosibirsk 630090, Russia,*²*Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University,
ul. Sattarkhan 29, Turkestan 160200, Kazakhstan*E-mails: ^akazantsev.ivan6@gmail.com, ^brauan.turebekov@ayu.edu.kz,
^cmurat.sultanov@ayu.edu.kz

Received 02.12.2020, revised 03.02.2021, accepted 15.04.2021

Abstract. The Radon transform is a major integral transform in computed tomography and a widely applied technique in computer vision and image analysis used to detect linear structures and regular textures. Its application is based on the property of the integrals of the direct problem to accumulate the image brightness along the contours under study. The back-projection operation, one of the main components of tomographic algorithms, results in ridge functions having the directions in which they participated in the direct operator. In the present paper, we examine the ridge functions and their orientation as the features for describing the anisotropy of regular textures. These features are involved in the regular texture model as a sum of ridge functions. Many textures are visually perceived as a superposition of linear structures and are therefore examined using the Radon transform. The paper presents a computational scheme for the singular value decomposition of a regular texture into a sum of informative ridge functions. The results are given of numerical experiments with the textures of industrial fabrics. The algorithm can be used in processing the visual data in computer vision systems, textile industry, robotics, and crystallography.

Keywords: image processing, Radon transform, regular texture, textile.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.204

REFERENCES

1. Natterer F. *The Mathematics of Computerized Tomography*. N. Y.: Wiley, 1985.
2. Bachiller-Burgos P., Manso L. J., Bustos P. A variant of the Hough transform for the combined detection of corners, segments, and polylines. *J. Image Video Proc.*, 2017, Vol. 2017, pp. 32.
3. Bondur V.G., Zverev A.T. A method earthquake forecast based on the lineament analysis of satellite images. *Dokl. Earth Sci.*, 2005, vol. 402, No. 4, pp. 561–567.
4. Alekseev A.S., Kazantsev I.G., Pyatkin V.P. Tomograficheskiy podkhod k vydeleniyu lineamentov na aerokosmicheskikh izobrazheniyakh [A tomographic approach to highlighting lineaments on aerospace imagery]. *Issled. Zemli iz Kosmosa*, 1988, No. 5, pp. 99–103 (in Russian).
5. Logan B.F., Shepp L.A. Optimal reconstruction of a function from its projections. *Duke Math. J.*, 1975, Vol. 42, pp. 645–659.
6. Pinkus A. *Ridge Functions*. Cambridge: Univ. Press, 2015.

7. Ismailov V.E. Approksimatsiya summami ridzh funktsii s fiksirovannymi napravleniyami [Approximation by Sums of Ridge Functions with Fixed Directions]. *Algebra i Analiz*, 2016, Vol. 28, No. 6, pp. 20–69 (in Russian).
8. Konyagin S.V., Kuleshov A.A., Maiorov V.E. Some problems in the theory of ridge functions. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2018, Vol. 301, No. 1, pp. 144–169.
9. Haralick R.M. Statistical and structural approaches to texture. *Proc. IEEE*, 1979, Vol. 67, No. 5, pp. 786–804.
10. Kol'tsov P.P. Comparative study of algorithms for the selection and classification of textures. *J. Comput. Math. Math. Phys.*, 2011, Vol. 51, No. 8, pp. 1561–1568 (in Russian).
11. Tomita F., Tsuji S. Computer Analysis of Visual Textures. Boston: Kluwer Acad. Publ., 1990.
12. Ershov S.V., Reimer V., Kalinin E.N., Gris T. Razrabotka sistemy komp'yuternogo zreniya dlya izmereniya napravlenosti volokon v pletnykh strukturakh [Development of a computer vision system for measuring the fiber orientation in braided structures]. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Tekhnol. Tekstil. Prom.*, 2019, No. 5, pp. 204–208 (in Russian).
13. N'yan V.Kh. Informatsionnaya sistema kontrolya kachestva proizvodstva mnogoslownykh tkanykh materialov na osnove obrabotki ikh izobrazhenii: Avtoref. dis. ...kand. tekhn. nauk [Avtoreferat of candidates dissertation on techn. nauk]. Moscow, 2020.
14. Applications of Computer Vision in Fashion and Textiles. Cambridge: Woodhead Publ., 2018.
15. Thomassey S., Zeng X. Artificial Intelligence for Fashion Industry in the Big Data Era. Singapore: Springer-Verl., 2018.
16. Mahajan P.M., Kolhe S.R., Patil P.M. A review of automatic fabric defect detection techniques. *Adv. Comput. Research*, 2009, Vol. 1, No. 2, pp. 18–29.
17. Ngan H.Y.T., Pang G.K.H., Yung N.H.C. Automated fabric defect detection: A review. *Image Vis. Comput.*, 2011, Vol. 29, No. 7, pp. 442–458.
18. Hanbay K., Talu M. F., Özgüven Ö.F. Fabric defect detection systems and methods. A systematic literature review. *Optik.*, 2016, Vol. 127, No. 24, pp. 11960–11973.
19. Behera B.K. Image-processing in textiles. *Textile Progress*, 2004, Vol. 35, NO. 2–4, pp. 1–193.
20. Zhang J., Xin B., Wu X. A Review of fabric identification based on Image Analysis Technology. *Textiles and Light Industrial Science and Technology (TLIST)*, 2013, Vol. 2, No. 3, pp. 120–130.
21. Chan C.-H., Pang G.K.H. Fabric Defect Detection by Fourier Analysis. *IEEE Trans. Ind. Appl.*, 2000, Vol. 36, No. 5, pp. 1267–1276.
22. Vese L.A., Osher S.J. Modeling textures with total variation minimization and oscillating patterns in image processing. *J. Sci. Comput.*, 2003, Vol. 19, pp. 553–572.
23. Chaudhari C., Gupta R. K., Fegade S. A hybrid method of textile defect detection using GLCM, LBP, SVD and Wavelet Transform. *Internat. J. Recent Technol. and Engrg.*, 2020, Vol. 8, No. 6, pp. 5356–5360.
24. Peng L., Liang J., Shen X., Zhao M., Sui L. Textile fabric defect detection based on low-rank representation. *Multimedia Tools and Applications*, 2019, Vol. 78, No. 1, pp. 99–124.
25. Ng M. K., Ngan H. Y. T., Yuan X., Zhang W. Lattice-based patterned fabric inspection by using total variation and sparsity with low-rank representations. *SIAM J. Imaging Sci.*, 2017, Vol. 10, No. 4, pp. 2140–2164.
26. Liu Z., Wang B. , Li C., Yu M., Ding S. Fabric defect detection based on deep-feature and low-rank decomposition. *J. Engineered Fibers and Fabrics*, 2020, Vol. 15, pp. 1–12.
27. Cao J., Zhang J., Wen Z., Wang N., Liu X. Fabric defect inspection using prior knowledge guided least squares regression. *Multimedia Tools and Applications*, 2017, Vol. 76, No. 3, pp. 4141–4157.
28. Kazantsev I.G. Tomographic reconstruction from arbitrary directions using ridge functions. *Inverse Problems*, 1998, Vol. 14, pp. 635–645.
29. Davison M.E. A singular value decomposition for the Radon transform in n-dimensional Euclidian space. *Numer. Funct. Anal. and Optim.*, 1981, Vol. 3, pp. 321–340.
30. Davison M.E., Grunbaum F.A. Tomographic reconstruction with arbitrary directions. *Communs. Pure Appl. Math.*, 1981, Vol. 34, pp. 77–120.

31. Louis A.K. Optimal sampling in nuclear magnetic resonance (NMR) tomography. *J. Comput. Assist. Tomogr.*, 1982, Vol. 6, No. 2, pp. 334–340.
32. Fabric Defect Inspection GLSR Dataset. URL: <https://github.com/jjcao/Fabric-Defect-Inspection-GLSR>
33. Silvestre-Blanes J., Albero-Albero T., Miralles I., Pérez-Llorens R., Moreno J. A public fabric image database for defect detection. *AUTEX Research J.*, 2019, Vol. 19, No 4, pp. 363–374; URL: <https://www.aitex.es/afid/>