СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ. 2021. Т. 24, № 2. С. 77–86

УДК 517.957

О ТОЧНЫХ МНОГОМЕРНЫХ РЕШЕНИЯХ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА

© 2021 А. А. Косов[1a], Э. И. Семенов[1b], В. В. Тирских[2c]

[1] *Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, ул. Лермонтова, 134, г. Иркутск 664033, Россия,*
[2] *Иркутский государственный университет путей сообщения, ул. Чернышевского, 15, Иркутск 664074, Россия*

E-mails: [a]kosov_idstu@mail.ru, [b]edwseiz@gmail.com, [c]tirskikh_vv@irgups.ru

Поступила в редакцию 09.11.2021 г.; после доработки 03.02.2021 г.;
принята к публикации 15.04.2021 г.

Изучается система двух нелинейных гиперболических уравнений в частных производных четвёртого порядка. Правые части системы уравнений содержат двукратные операторы Лапласа и квадраты градиентов искомых функций. Такого рода уравнения, близкие к уравнению Буссинеска и уравнениям Навье — Стокса, встречаются в задачах гидродинамики. Предлагается искать решение в виде анзаца, содержащего квадратичную зависимость от пространственных переменных и произвольные функции от времени. Использование предложенного анзаца позволяет декомпозировать процесс отыскания компонент решения, зависящих от пространственных переменных и времени. Для отыскания зависимости от пространственных переменных необходимо решать алгебраическую систему матричных, векторных и скалярного уравнений. Найдено общее решение этой системы уравнений в параметрическом виде. При отыскании компонент решения исходной системы, зависящих от времени, возникает система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. В частном случае, когда квадраты градиентов не входят в систему, установлено существование точных решений определённого вида у исходной системы, выражаемых через произвольные гармонические функции от пространственных переменных и экспоненциальные функции времени. Приводится ряд примеров построенных точных решений, в том числе периодических по времени и анизотропных по пространственным переменным. Найденные точные решения можно использовать для верификации численных методов приближённого построения решений прикладных краевых задач.

Ключевые слова: нелинейная система, нелинейные гиперболические уравнения, редукция, точные решения, эллиптические функции Якоби.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.205

ВВЕДЕНИЕ

Цель работы — построение точных решений одной нелинейной системы гиперболических уравнений четвёртого порядка следующего вида:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= k_1\Delta(u\Delta u) + b_1|\nabla u|^2 + \alpha_1 v + f(t), \\ v_{tt} &= k_2\Delta(v\Delta v) + b_2|\nabla v|^2 + \alpha_2 u + g(t). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $u := u(\mathbf{x},t)$, $v := v(\mathbf{x},t)$, $t \in \mathbb{R}^+$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $u_{tt} := \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, Δ — n-мерный

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 19-08-00746, 20-07-00397).

оператор Лапласа; ∇ — оператор взятия градиента; $f(t)$, $g(t)$ — некоторые заданные функции времени t; $k_i > 0$, b_i, $\alpha_i \neq 0$, $i = 1, 2$, — произвольные параметры.

Точные решения системы (1) будем отыскивать в виде обобщённого разделения переменных

$$u(\mathbf{x}, t) = \psi_1(t)[W(\mathbf{x}) + \varphi_1(t)], \quad v(\mathbf{x}, t) = \psi_2(t)[W(\mathbf{x}) + \varphi_2(t)], \tag{2}$$

$$W(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x}) + (\mathbf{B}, \mathbf{x}) + C, \tag{3}$$

где $\psi_i(t)$, $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2$, — неизвестные функции времени; ненулевая числовая симметрическая матрица A размера $n \times n$, постоянный вектор $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^n$ и константа $C \in \mathbb{R}$ подлежат определению. Здесь и далее $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

Отдельное внимание уделим системе уравнений вида

$$\begin{aligned} u_{tt} &= k\Delta(u\Delta u) + b|\nabla u|^2 + \alpha_1 v, \\ v_{tt} &= \gamma k\Delta(v\Delta v) + \gamma b|\nabla v|^2 + \alpha_2 u, \end{aligned} \tag{4}$$

которая является частным случаем системы (1) при $k_1 = k > 0$, $k_2 = \gamma k > 0$, $b_1 = b$, $b_2 = \gamma b$, $f(t) = g(t) \equiv 0$. Решения системы уравнений (4) предлагается искать путём разделения переменных

$$u(\mathbf{x}, t) = \psi_1(t)\Theta(\mathbf{x}), \quad v(\mathbf{x}, t) = \psi_2(t)\Theta(\mathbf{x}), \tag{5}$$

где $\psi_i(t)$, $i = 1, 2$, — неизвестные функции времени, $\Theta(\mathbf{x})$ — функция, подлежащая определению.

Отметим, что конструкции типа (2), (3) ранее успешно использовались в ряде работ [1–8] для построения точных решений уравнения нелинейной теплопроводности и нелинейных параболических систем со степенными нелинейностями [9, 10]. Решения некоторых нелинейных гиперболических уравнений с функциональным разделением переменных получены в [11]. Отметим также, что в [12] авторами построены точные решения обобщённого уравнения Буссинеска. Построение точных решений нелинейных систем в частных производных важно и в ряде других приложений, например в теории кинетических систем [13–15]. Полученные точные решения можно использовать для верификации численных методов и алгоритмов отыскания приближённых решений краевых задач, возникающих в приложениях.

1. РЕДУКЦИИ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ (1)

Точные решения нелинейной системы гиперболических уравнений четвёртого порядка (1) будем отыскивать в виде (2), (3). Для этого проведём редукцию исходной системы в частных производных к системам обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) на искомые функции $\psi_i(t)$, $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2$.

1.1. Редукция к системам ОДУ

После подстановки функций (2) в систему уравнений (1) и несложных преобразований приходим к равенствам

$$\psi_1'' W(\mathbf{x}) + (\psi_1\varphi_1)'' = k_1\psi_1^2\Delta(W(\mathbf{x})\Delta W(\mathbf{x})) + b_1\psi_1^2|\nabla W(\mathbf{x})|^2 + \alpha_1\psi_2[W(\mathbf{x}) + \varphi_2], \tag{6}$$

$$\psi_2'' W(\mathbf{x}) + (\psi_2\varphi_2)'' = k_2\psi_2^2\Delta(W(\mathbf{x})\Delta W(\mathbf{x})) + b_2\psi_2^2|\nabla W(\mathbf{x})|^2 + \alpha_2\psi_1[W(\mathbf{x}) + \varphi_1]. \tag{7}$$

Здесь $\psi_i = \psi_i(t)$, $\varphi_i = \varphi_i(t)$, $\psi_i'' = \dfrac{d^2\psi_i}{dt^2}$, $\varphi_i'' = \dfrac{d^2\varphi_i}{dt^2}$, $i = 1, 2$. Из (3) прямым вычислением находим

$$|\nabla W(\mathbf{x})|^2 = (A^2\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2(A\mathbf{B}, \mathbf{x}) + |\mathbf{B}|^2, \quad \Delta W(\mathbf{x}) = \operatorname{tr} A \text{ — след матрицы } A,$$

$$\Delta(W(\mathbf{x})\Delta W(\mathbf{x})) = W(\mathbf{x})\Delta\Delta W(\mathbf{x}) + (\Delta W(\mathbf{x}))^2 + 2(\nabla W(\mathbf{x}), \nabla\Delta W(\mathbf{x})) \equiv (\operatorname{tr} A)^2.$$

С учётом этих соотношений и формулы (3) равенства (6), (7) запишутся в виде

$$\left(\psi_1'' - \alpha_1\psi_2\right)\left[\frac{1}{2}(A\mathbf{x},\mathbf{x}) + (\mathbf{B},\mathbf{x}) + C\right] + (\psi_1\varphi_1)'' \\ = k_1(\operatorname{tr} A)^2\psi_1^2 + b_1\psi_1^2[(A^2\mathbf{x},\mathbf{x}) + 2(A\mathbf{B},\mathbf{x}) + |\mathbf{B}|^2] + \alpha_1\psi_2\varphi_2 + f(t), \quad (8)$$

$$\left(\psi_2'' - \alpha_2\psi_1\right)\left[\frac{1}{2}(A\mathbf{x},\mathbf{x}) + (\mathbf{B},\mathbf{x}) + C\right] + (\psi_2\varphi_2)'' \\ = k_2(\operatorname{tr} A)^2\psi_2^2 + b_2\psi_2^2[(A^2\mathbf{x},\mathbf{x}) + 2(A\mathbf{B},\mathbf{x}) + |\mathbf{B}|^2] + \alpha_2\psi_1\varphi_1 + g(t). \quad (9)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что если симметричная матрица A, вектор $\mathbf{B}$ и постоянная C удовлетворяют системе алгебраических уравнений (САУ)

$$A = 2\sigma A^2, \quad \mathbf{B} = 2\sigma A\mathbf{B}, \quad C = \sigma\,|\mathbf{B}|^2, \tag{10}$$

где $\sigma \neq 0$ — константа разделения, то равенства (8), (9) сводятся к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка:

$$\psi_1'' - \alpha_1\psi_2 - \frac{b_1}{\sigma}\,\psi_1^2 = 0, \quad \psi_2'' - \alpha_2\psi_1 - \frac{b_2}{\sigma}\,\psi_2^2 = 0, \tag{11}$$

$$(\psi_1\varphi_1)'' - \alpha_1\psi_2\varphi_2 - k_1(\operatorname{tr} A)^2\psi_1^2 - f(t) = 0, \quad (\psi_2\varphi_2)'' - \alpha_2\psi_1\varphi_1 - k_2(\operatorname{tr} A)^2\psi_2^2 - g(t) = 0. \tag{12}$$

Таким образом, проведёнными рассуждениями установлена справедливость следующего утверждения.

Теорема. *Нелинейная гиперболическая система* (1) *имеет точные решения* (2), *где функция* $W(\mathbf{x})$ *может быть выбрана произвольным полиномом вида* (3) *с коэффициентами, удовлетворяющими* САУ (10), *а функции* $\psi_i(t)$, $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2$, *являются решениями систем* ОДУ (11), (12).

1.2. Разрешимость алгебраических уравнений

Рассмотрим разрешимость матричного уравнения (10). Отметим, что оно всегда имеет тривиальное решение $A = 0$. Поэтому далее будем рассматривать только нетривиальные решения этого уравнения. Легко проверить, что решением матричного уравнения (10) является $A = \dfrac{1}{2\sigma}\,P$, где P — произвольная идемпотентная матрица, т. е. матрица, удовлетворяющая равенству $P^2 = P$. Известно [16], что любую идемпотентную матрицу P можно записать как $P = ME_mM^{-1}$, где M — произвольная невырожденная матрица порядка n, E_m — диагональная матрица, у которой на диагонали произвольным образом расположены $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ единиц и $n - m$ нулей; E_m также является идемпотентной: $E_m^2 = E_m$. Поскольку нас интересуют только симметрические матрицы A, то идемпотентные матрицы P мы должны взять также симметрическими, т. е. $P = SE_mS^T$, где S — произвольная ортогональная матрица. Таким образом, матрица

$$A = \frac{1}{2\sigma}\,SE_mS^T \tag{13}$$

является решением матричного уравнения (10). При этом имеем

$$\operatorname{tr} A = m/(2\sigma), \quad m \leqslant n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 2. \tag{14}$$

Векторное уравнение (10) представляет собой систему n линейных однородных алгебраических уравнений относительно компонент $b_1, \ldots, b_n$ искомого вектора $\mathbf{B}$. Для любой зафиксированной матрицы A вида (13) с $\operatorname{rank} A = m < n$ всегда существует нетривиальное решение линейной однородной системы, причём m компонент вектора $\mathbf{B}$ могут быть выбраны произвольно из m-мерного линейного многообразия. В случае, когда $\operatorname{rank} A = m \equiv n$, т. е. при $E_m \equiv E$, линейная однородная система уравнений имеет решение — произвольный вектор $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^n$. После того, как последовательно найдены решения матричного и векторного уравнений, постоянная C определяется из скалярного уравнения (10) единственным образом.

1.3. Разрешимость системы ОДУ (11)

В системах ОДУ (11), (12), полученных в результате редукции системы гиперболических уравнений (11), нелинейной является только система уравнений (1). Поэтому в этом разделе всё внимание уделим построению точных решений нелинейной системы ОДУ (11).

1.3.1. Случай постоянных функций $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$.

Приступим к интегрированию нелинейной системы ОДУ (11), относительно неизвестных функций $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$. Но прежде отметим, что для целей нашего исследования представляют интерес и нетривиальные постоянные решения системы ОДУ (11), которые определяются из следующей системы нелинейных алгебраических уравнений:

$$\frac{b_1}{\sigma}\,\psi_1^2 + \alpha_1\psi_2 = 0, \quad \frac{b_2}{\sigma}\,\psi_2^2 + \alpha_2\psi_1 = 0.$$

Отсюда находим нетривиальное решение

$$\psi_{10} = \sigma\Big(-\frac{\alpha_1^2\alpha_2}{b_1^2 b_2}\Big)^{1/3}, \quad \psi_{20} = -\frac{\sigma b_1}{\alpha_1}\Big(-\frac{\alpha_1^2\alpha_2}{b_1^2 b_2}\Big)^{2/3}. \tag{15}$$

Для этих постоянных ψ_{10}, ψ_{20} система ОДУ (12) примет вид

$$\psi_{10}\varphi_1'' - \alpha_1\psi_{20}\varphi_2 = f_1(t), \quad \psi_{20}\varphi_2'' - \alpha_2\psi_{10}\varphi_1 = g_1(t). \tag{16}$$

Здесь для удобства введены обозначения

$$f_1(t) = k_1(\operatorname{tr} A)^2\psi_{10}^2 + f(t), \quad g_1(t) = k_2(\operatorname{tr} A)^2\psi_{20}^2 + g(t).$$

Таким образом, в силу приведённых результатов и теоремы получаем

Утверждение 1. *Система гиперболических уравнений* (1) *имеет точное многомерное решение*

$$u(\mathbf{x},t) = \psi_{10}[W(\mathbf{x}) + \varphi_1(t)], \quad v(\mathbf{x},t) = \psi_{20}[W(\mathbf{x}) + \varphi_2(t)],$$

где постоянные ψ_{10}, ψ_{20} выражаются равенствами (15), *а функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ определяются из системы линейных неоднородных* ОДУ *второго порядка* (16).

Отметим, что в утверждении для случая $n = 3$ ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$) в качестве $W(x,y,z)$ можно взять любую из функций приведённых в [9] (см. пример 1 на стр. 799). Так, для функций, определяемых формулами (13)–(15), из [9] получим анизотропные по пространственным переменным точные решения, а для функции (12) из [9] можно выписать радиально-симметричное по пространственным переменным x, y, z точное решение.

Пример. Пусть $n = 3$, $f(t) = \sin(t)$, $g(t) = \cos(t)$ и $\alpha_1\alpha_2 \neq 1$. Тогда система (1) в трёхмерном координатном пространстве имеет частные анизотропные по пространственным переменным и периодические по времени семейства точных решений

$$u_i(x,y,z,t) = \psi_{10}[W_i(x,y,z) + \varphi_1(t)], \quad v_i(x,y,z,t) = \psi_{20}[W_i(x,y,z) + \varphi_2(t)], \quad i = 1,2,3,$$

где постоянные ψ_{10}, ψ_{20} выражаются равенствами (15), $W_i(x,y,z)$ определяются формулами (13)–(15) из [9], а функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ имеют вид

$$\varphi_1(t) = \frac{\alpha_1\cos(t) - \sin(t)}{\psi_{10}(1-\alpha_1\alpha_2)} - \frac{k_2\psi_{20}^2}{\psi_{10}\alpha_2\sigma^2}, \quad \varphi_2(t) = \frac{\alpha_2\sin(t) - \cos(t)}{\psi_{20}(1-\alpha_1\alpha_2)} - \frac{k_1\psi_{10}^2}{\psi_{20}\alpha_1\sigma^2}.$$

Здесь $\sigma \neq 0$ — произвольная постоянная.

1.3.2. Случай непостоянных функций $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$.

Элементарными преобразованиями система ОДУ (11) сводится к одному нелинейному ОДУ четвёртого порядка относительно функции $\psi_1(t)$ следующего вида:

$$\left(\psi_1'' - \frac{b_1}{\sigma}\,\psi_1^2\right)'' - \frac{b_2}{\alpha_1\sigma}\left(\psi_1'' - \frac{b_1}{\sigma}\,\psi_1^2\right)^2 - \alpha_1\alpha_2\psi_1 = 0. \tag{17}$$

Заметим, что если параметры системы (11) связаны равенством $\alpha_1 b_1^2 - \alpha_2 b_2^2 = 0$, то уравнение (17) имеет частное решение $\psi_1^*(t) = y(t)$, которое удовлетворяет ОДУ второго порядка

$$y'' - \frac{b_1}{\sigma}\,y^2 - \frac{b_1\alpha_1}{b_2}\,y = 0. \tag{18}$$

ОДУ (18) сводится к следующей квадратуре:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{\frac{2b_1}{3\sigma}\,y^3 + \frac{b_1\alpha_1}{b_2}\,y^2 + C_1}} = t - t_0, \tag{19}$$

где C_1, t_0 — произвольные постоянные. Вычислив этот интеграл, получим, что зависимость y от переменной t задаётся неявно равенством, содержащим эллиптический интеграл первого рода. Однако если постоянная C_1 принимает значения $C_1 = 0$ и $C_1 = -\dfrac{b_1\alpha_1^3\sigma^2}{3b_2^3}$, то легко выписать явные частные точные решения уравнения (18) в элементарных функциях. Кроме того, если параметры b_1, b_2, α_1, σ и постоянная C_1 выбираются определённым образом, то можно получить точные решения уравнения (18) в эллиптических функциях Якоби.

Пусть $C_1 = 0$, тогда интеграл (19) вычисляется в элементарных функциях и в этом случае система ОДУ (11) имеет частные точные решения следующих видов:

$$\begin{aligned}
\psi_1^{*1}(t) &= \frac{3\alpha_1\sigma}{2b_2}\left(\tanh^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b_1\alpha_1}{b_2}}(t-t_0)\right) - 1\right),\\
\psi_2^{*1}(t) &= \frac{3b_1\alpha_1\sigma}{2b_2^2}\left(\tanh^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b_1\alpha_1}{b_2}}(t-t_0)\right) - 1\right).
\end{aligned} \tag{20}$$

Пусть $C_1 = -\dfrac{b_1\alpha_1^3\sigma^2}{3b_2^3}$, тогда интеграл (19) вычисляется в элементарных функциях и в этом случае система ОДУ (11) имеет частные точные решения следующих видов:

$$\begin{aligned}
\psi_1^{*2}(t) &= \frac{\alpha_1\sigma}{2b_1}\left(3\tan^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b_1\alpha_1}{b_2}}(t-t_0)\right) + 1\right),\\
\psi_2^{*2}(t) &= b_1\alpha_1\sigma\left(3 - 2\cos^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b_1\alpha_1}{b_2}}(t-t_0)\right)\right)\Big/\left(2b_2^2\cos^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b_1\alpha_1}{b_2}}(t-t_0)\right)\right).
\end{aligned} \tag{21}$$

С учётом этих результатов и теоремы получаем

Утверждение 2. *Система гиперболических уравнений* (1) *имеет точные многомерные решения*

$$\begin{aligned}
u_1(\mathbf{x},t) &= \psi_1^{*1}(t)[W(\mathbf{x}) + \varphi_1(t)], \quad v_1(\mathbf{x},t) = \psi_2^{*1}(t)[W(\mathbf{x}) + \varphi_2(t)],\\
u_2(\mathbf{x},t) &= \psi_1^{*2}(t)[W(\mathbf{x}) + \varphi_1(t)], \quad v_2(\mathbf{x},t) = \psi_2^{*2}(t)[W(\mathbf{x}) + \varphi_2(t)],
\end{aligned}$$

где функции $\psi_1^{*1}(t)$, $\psi_2^{*1}(t)$, $\psi_1^{*2}(t)$, $\psi_2^{*2}(t)$ *выражаются формулами* (20), (21), *а функции* $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ *определяются из системы линейных неавтономных и неоднородных* ОДУ *второго порядка* (12).

Пусть теперь параметры b_1, b_2, α_1, σ и постоянная C_1 таковы, что $b_1\sigma > 0$, и кубический трёхчлен в интеграле (19) представим в виде $(y-a_1)(y-a_2)(y-a_3)$, где вещественные постоянные $a_1 < a_2 < a_3$ определяются из следующей системы алгебраических уравнений:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \frac{3\alpha_1\sigma}{2b_2} = 0, \quad a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 = 0, \quad C_1 + a_1a_2a_3 = 0. \tag{22}$$

Тогда, вычислив интеграл (19), находим

$$\psi_3^{*1}(t) = (a_2 - a_1)\,\mathrm{sn}^2(T,k) + a_1, \quad \psi_3^{*2}(t) = \frac{b_1\alpha_1}{b_2}\Big[(a_2 - a_1)\,\mathrm{sn}^2(T,k) + a_1\Big]. \tag{23}$$

Здесь введено обозначение $T = \dfrac{\sqrt{6b_1\sigma(a_3 - a_1)}}{6\sigma}(t - t_0)$, $\mathrm{sn}(T,k)$ — эллиптический синус Якоби, $k = \sqrt{\dfrac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1}}$ — модуль эллиптической функции. С учётом приведённых результатов и теоремы доказывается

Утверждение 3. *Система гиперболических уравнений* (1) *имеет точные многомерные решения*

$$u(\mathbf{x},t) = \psi_3^{*1}(t)[W(\mathbf{x}) + \varphi_1(t)], \quad v(\mathbf{x},t) = \psi_3^{*2}(t)[W(\mathbf{x}) + \varphi_2(t)],$$

где функции $\psi_3^{*1}(t)$, $\psi_3^{*2}(t)$ *выражаются формулами* (23), *в которых вещественные постоянные* $a_1 < a_2 < a_3$ *удовлетворяют системе алгебраических уравнений* (22), *а функции* $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ *определяются из системы линейных неавтономных и неоднородных* ОДУ *второго порядка* (12).

2. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ (4)

Решение системы (4) будем искать в виде (5). Подставляя (5) в уравнения (4), получим

$$\ddot\psi_1\Theta = \psi_1^2 k\Delta(\Theta\Delta\Theta) + b|\nabla\Theta|^2) + \alpha_1\psi_2\Theta,$$
$$\ddot\psi_2\Theta = \gamma\psi_2^2(k\Delta(\Theta\Delta\Theta) + b|\nabla\Theta|^2) + \alpha_2\psi_1\Theta.$$

Если $k\Delta(\Theta\Delta\Theta) + b|\nabla\Theta|^2 = \lambda\Theta$, $\lambda = \mathrm{const}$, то $\psi_i(t)$, $i = 1,2$, должны удовлетворять системе ОДУ

$$\ddot\psi_1 = \lambda\psi_1^2 + \alpha_1\psi_2, \quad \ddot\psi_2 = \lambda\gamma\psi_2^2 + \alpha_2\psi_1. \tag{24}$$

Таким образом, получили

Утверждение 4. *Система нелинейных гиперболических уравнений четвёртого порядка* (4) *имеет частные точные решения вида* (5), *где функция* $\Theta(\mathbf{x})$ *есть решение уравнения*

$$k\Delta(\Theta\Delta\Theta) + b|\nabla\Theta|^2 - \lambda\Theta = 0, \quad \lambda = \mathrm{const}, \tag{25}$$

а функции $\psi_i(t)$, $i = 1,2$, *удовлетворяют системе* ОДУ (24).

В случае $b \neq 0$, $\lambda \neq 0$ функция (3) является частным решением уравнения в частных производных (25), при этом числовая симметрическая матрица A, постоянный вектор $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^n$ и константа $C \in \mathbb{R}$ удовлетворяют системе алгебраических уравнений

$$A^2 = \frac{\lambda}{2b}A, \quad A\mathbf{B} = \frac{\lambda}{2b}\mathbf{B}, \quad \lambda C = b|\mathbf{B}|^2 + k(\mathrm{tr}\,A)^2. \tag{26}$$

Заметим, что матричные и векторные уравнения систем (10), (26) совпадают при $\sigma{=}b/\lambda$. Поэтому решения матричного и векторного уравнений системы (26) легко выписать, воспользовавшись соответствующими формулами, полученными в п. 1.2.

Кроме решения $\Theta(\mathbf{x}) = W(\mathbf{x})$, где $W(\mathbf{x})$ задаётся формулой (3), уравнение (25) обладает и другими точными решениями. Например, радиально-симметричные решения $\Theta(\mathbf{x}) = \Theta(r)$, $r^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$ уравнения (25) определяются из нелинейного ОДУ четвёртого порядка следующего вида:

$$k\bigg[\Theta\Theta_{rrrr} + 2\Theta_r\Theta_{rrr} + \frac{2(n-1)}{r}\,\Theta\Theta_{rrr} + \frac{4(n-1)}{r}\,\Theta_r\Theta_{rr} + \Theta_{rr}^2 + \frac{(n-1)(n-3)}{r^2}\,\Theta\Theta_{rr} + \frac{(n-1)(3-n)}{r^3}\,\Theta\Theta_r\bigg] + \bigg(\frac{k(n-1)(n-3)}{r^2} + b\bigg)\Theta_r^2 - \lambda\Theta = 0. \quad (27)$$

Непосредственное проверкой можно убедиться, что ОДУ (27) обладает частным точным решением

$$\Theta(r) = \frac{\lambda}{4b}\,r^2 + \frac{\lambda k n^2}{4b^2}, \quad b \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 2.$$

В случае $b = 0$ ОДУ (27) имеет частное точное решение

$$\Theta(r) = \frac{\lambda}{24k(n+2)(n+4)} r^4.$$

Уравнение (25) при $b = \lambda \equiv 0$ имеет решением гармоническую функцию $\Delta\Theta = 0$. Следовательно, справедливо

Утверждение 5. *Система нелинейных гиперболических уравнений четвёртого порядка* (4) *имеет при* $b = 0$ *частные точные решения вида* (5), *где* $\Theta(\mathbf{x})$ *— произвольная гармоническая функция, а* $\psi_i(t)$, $i = 1, 2$, *удовлетворяют линейной системе* ОДУ

$$\ddot{\psi}_1 = \alpha_1\psi_2, \quad \ddot{\psi}_2 = \alpha_2\psi_1. \quad (28)$$

В частности, при $\alpha_1\alpha_2 > 0$ решение системы ОДУ (28) имеет вид

$$\begin{gathered} \psi_1(t) = C_1\sin(\omega t) + C_2\cos(\omega t) + C_3e^{\omega t} + C_4e^{-\omega t}, \\ \psi_1(t) = -\frac{(\alpha_1\alpha_2)^{1/2}}{\alpha_1}(C_1\sin(\omega t) + C_2\cos(\omega t) + C_3e^{\omega t} + C_4e^{-\omega t}), \end{gathered} \quad (29)$$

где $\omega = (\alpha_1\alpha_2)^{1/4}$, C_i, $i = \overline{1,4}$, — произвольные постоянные. Из этих формул следует, что система нелинейных гиперболических уравнений четвёртого порядка (4) имеет глобальные, т. е. определённые при всех $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, решения.

Рассмотрим нелинейное эллиптическое уравнение

$$\Delta\Theta = \Theta^{-1}. \quad (30)$$

Любое его решение является решением уравнения (25) при $b = \lambda = 0$. Поэтому справедливо

Утверждение 6. *Система нелинейных гиперболических уравнений четвёртого порядка* (4) *имеет при* $b = 0$ *частные точные решения вида* (5), *где* $\Theta(\mathbf{x})$ *есть произвольное решение уравнения* (30), *а функции* $\psi_i(t)$, $i = 1, 2$, *удовлетворяют линейной системе* ОДУ (28).

Отметим, что уравнение (30) имеет семейство точных решений

$$\Theta(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{n-1}}\bigg(\sum_{i=1}^{n}(x_i + C_i)^2\bigg)^{1/2}, \quad (31)$$

где $C_i \in \mathbb{R}$ — произвольные постоянные. Поэтому из утверждения 6 следует, что при $b = 0$ система (4) имеет решения вида (5), где функция $\Theta(\mathbf{x})$ определяется выражением (31), а функции $\psi_i(t)$, $i = 1, 2$, задаются формулами (29).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получены формулы новых точных многомерных решений нелинейных систем гиперболических уравнений в частных производных четвёртого порядка. Полученные явные выражения точных многомерных решений, которые выражаются в элементарных функциях, могут иметь не только теоретическое, но и прикладное значение, поскольку их можно использовать для тестирования, настройки и адаптации численных методов и алгоритмов построения приближённых решений краевых задач для нелинейных систем гиперболических уравнений в частных производных четвёртого порядка большой размерности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Титов С. С.* Метод конечномерных колец для решения нелинейных уравнений математической физики // Аэродинамика. Саратов: Саратовский гос. ун-т, 1988. С. 104–110.
2. *Галактионов В. А., Посашков С. С.* О новых точных решениях параболических уравнений с квадратичными нелинейностями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1989. Т. 29, № 4. С. 497–506.
3. *Рудых Г. А., Семенов Э. И.* Построение точных решений многомерного уравнения нелинейной теплопроводности // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1993. Т. 33, № 8. С. 1228–1239.
4. *Рудых Г. А., Семенов Э. И.* Точные неотрицательные решения многомерного уравнения нелинейной диффузии // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 5. С. 1131–1140; https://doi.org/10.1007/BF02672920
5. *Рудых Г. А., Семенов Э. И.* Неавтомодельные решения многомерного уравнения нелинейной диффузии // Мат. заметки. 2000. Т. 67, № 2. С. 250–256; https://doi.org/10.4213/mzm833
6. *Зайцев В. Ф., Полянин А. Д.* Справочник по нелинейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2003.
7. *Полянин А. Д., Зайцев В. Ф., Журов А. И.* Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2005.
8. *Galactionov V. A., Svirshchevskii S. R.* Subspaces of Nonlinear Partial Differential Equations in Mechanics and Physics. Chapman & Hall/CRC, 2007.
9. *Косов А. А., Семенов Э. И.* О точных многомерных решениях системы уравнений реакции-диффузии со степенными нелинейностями // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 4. С. 796–812; DOI: 10.17377/smzh.2017.58.408
10. *Косов А. А., Семенов Э. И.* О точных многомерных решениях одной нелинейной системы уравнений реакции-диффузии // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54, № 1. С. 108–122; DOI: 10.1134/S0374064118010090
11. *Полянин А. Д., Журов А. И.* Решения с функциональным разделением переменных двух классов нелинейных уравнений математической физики // Докл. АН. 2019. Т. 486, № 3. С. 287–291.
12. *Косов А. А., Семенов Э. И., Тирских В. В.* Обобщённое уравнение Буссинеска и его точные решения // Вестн. Бурят. гос. ун-та. Математика и информатика. 2020. № 1. С. 3–10.
13. *Скубачевский А. Л.* Уравнения Власова — Пуассона для двухкомпонентной плазмы в однородном магнитном поле // Успехи мат. наук. 2014. Т. 69, № 2. С. 107–148; DOI: https://doi.org/10.4213/rm9579
14. *Markov Y., Rudykh G., Sidorov N., Sinitsyn A., Tolstonogov D.* Steady state solutions of the Vlasov—Maxwell system and their stability // Acta Appl. Math. 1992. V. 28, N 3. P. 253–293.
15. *Сидоров Н. А., Синицын А. В.* Стационарная система Власова — Максвелла в ограниченных областях // Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения. М.: Физматлит. 2003. С. 50–88.
16. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 517.957

ON EXACT MULTIDIMENSIONAL SOLUTIONS TO A NONLINEAR SYSTEM OF FOURTH-ORDER HYPERBOLIC EQUATIONS

© 2021 **A. A. Kosov**[1a], **E. I. Semenov**[1b], **V. V. Tirskikh**[2c]

[1]*Matrosov Institute of System Dynamics and Control Theory SB RAS, ul. Lermontova 134, Irkutsk 664033, Russia,*
[2]*Irkutsk State Transport University, ul. Chernyshevskogo 15, Irkutsk 664074, Russia*

E-mails: [a]kosov_idstu@mail.ru, [b]edwseiz@gmail.com, [c]tirskikh_vv@irgups.ru

Received 09.11.2021, revised 03.02.2021, accepted 15.04.2021

Abstract. We study the system of two fourth-order nonlinear hyperbolic partial differential equations. The right-hand sides of the equations contain double Laplace operators and the squares of the gradients of the sought functions. Such equations, close to the Boussinesq equation and the Navier–Stokes equations, occur in problems of hydrodynamics. We propose to search for a solution in the form of an ansatz containing quadratic dependence on the spatial variables and arbitrary functions of time. The use of the proposed ansatz allows us to decompose the process of finding the components of the solution depending on the space variables and time. For finding the dependence on the spatial variables, it is necessary to solve an algebraic system of matrix, vector, and scalar equations. We find the general solution to this system in parametric form. In finding the time-dependent components of the solution to the original system, there arises a system of nonlinear ordinary differential equations. In the particular case when the squares of the gradients are not included in the system, we establish the existence of exact solutions of a certain kind to the original system expressed through arbitrary harmonic functions of the spatial variables and exponential functions of time. Some examples are given of the constructed exact solutions including solutions periodic in time and anisotropic in space variables. The exact solutions can be used to verify numerical methods for the approximate construction of the solutions to applied boundary value problems.

Keywords: nonlinear system, nonlinear hyperbolic equation, reduction, exact solution, Jacobi elliptic function.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.205

REFERENCES

1. Titov S.S. The method of finite-dimensional rings for solving nonlinear equations of mathematical physics. aerodynamics. Saratov: Saratov. Gos. Univ., 1988, pp. 104–110 (in Russian).
2. Galaktionov V.A., Posashkov S.S. New exact solutions of parabolic equations with quadratic nonlinearities. *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 1989 ,Vol. 29, No. 4, pp. 112–119.
3. Rudykh G.A., Semenov E.I. The construction of exact solutions of the multidimensional quasilinear heat-conduction equation. *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 1993, Vol. 33, No. 8, pp. 1087–1097.
4. Rudykh G.A., Semenov E.I. Exact nonnegative solutions to the multidimensional nonlinear diffusion equation. *Sibir. Math. J.*, 1998, Vol. 39, No. 5, pp. 977–985.
5. Rudykh G.A., Semenov E.I. Non-self-similar solutions of multidimensional nonlinear diffusion equations. *Math. Notes*, 2000, Vol. 67, No. 2, pp. 200–206.

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2021, Vol. 15, No. 2; DOI: 10.1134/S199047892102006X

6. Zaitsev V.F., Polyanin A.D. Spravochnik po nelineinym uravneniyam matematicheskoi fiziki [Handbook on nonlinear equations of mathematical physics: exact solutions]. Moscow: Fizmatlit, 2003 (in Russian).
7. Polyanin A.D., Zaitsev V.F., Zhurov A.I. Metody resheniya nelineinykh uravnenii matematicheskoi fiziki i mekhaniki [Methods for solution of nonlinear equations of mathematical physics and mechanics]. Moscow: Fizmatlit, 2005 (in Russian).
8. Galactionov V.A., Svirshchevskii S.R. Exact Solutions and Invariant Subspaces of Nonlinear Partial Differential Equations in Mechanics and Physics. Boca Raton: Taylor & Francis, 2007.
9. Kosov A.A., Semenov E.I. Multidimensional exact solutions to the reaction–diffusion system with power-low nonlinear terms. *Sibir. Math. J.*, 2017, Vol. 58, No. 4, pp. 619–632.
10. Kosov A.A., Semenov E.I. O tochnykh mnogomernykh resheniyakh odnoi nelineinoi sistemy uravnenii reaktsii-diffuzii [On exact multidimensional solutions of a system of nonlinear reaction–diffusion equations]. *Differentsial'nye Uravneniya*, 2018, Vol. 54, No. 1, pp. 108–122 (in Russian); DOI: 10.1134/S0374064118010090
11. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Resheniya s funktsional'nym razdeleniem peremennykh dvukh klassov nelineinykh uravnenii matematicheskoi fiziki [Solutions with functional separation of variables for two classes of nonlinear equations of mathematical physics]. *Dokl. Akad. Nauk*, 2019, Vol. 486, No. 3, pp. 287–291 (in Russian).
12. Kosov A.A., Semenov E.I., Tirskikh V.V. Obobshchennoe uravnenie Bussineska i ego tochnye resheniya [A generalized Boussinesq equation and the exact solution]. *Vestnik Buryat. Gos. Univ. Matematika i informatika*, 2020, No. 1, pp. 3–10 (in Russian).
13. Skubachevskii A.L. Vlasov—Poisson equations for a two-component plasma in a homogeneous magnetic field. *Russ. Math. Surveys*, 2014, Vol. 69, No. 2, pp. 291–330.
14. Markov Y., Rudykh G., Sidorov N., Sinitsyn A., Tolstonogov D. Steady state solutions of the Vlasov–Maxwell system and their stability. *Acta Appl. Math.*, 1992, Vol. 28, No. 3, pp. 253–293.
15. Sidorov N.A., Sinitsyn A.V. A stationary Vlasov—Maxwell system in bounded domains. *Nonlinear Analysis and Nonlinear Differential Equations*. Moscow: Fizmatlit, 2003, pp. 50–88 (in Russian).
16. Gantmakher F.R. The Theory of Matrices. Amer. Math. Soc., AMS Chelsea Publ., 2000.