

УДК 519.4

## ОБ ОДНОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МОДЕЛИ ГРАВИТАЦИОННОЙ ГИДРОДИНАМИКИ С УЧЕТОМ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ В ДИФФУЗИОННОМ ПРИБЛИЖЕНИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕТРАЭДРАЛЬНЫХ СЕТОК

© 2021 И. М. Куликов

*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,  
пр. Лаврентьева, 6, г. Новосибирск 630090, Россия*

E-mail: kulikov@ssd.ssc.ru

Поступила в редакцию 16.02.2021 г.; после доработки 21.03.2021 г.;  
принята к публикации 15.04.2021 г.

Предложена новая вычислительная модель гравитационной гидродинамики с учетом переноса излучения в диффузионном приближении на тетраэдральных сетках. Данная модель является качественным расширением модели гравитационной гидродинамики, адаптированной для воспроизведения процесса звездообразования и эволюции протопланетных дисков. Описаны численные методы для разрешения данной модели и приведены результаты моделирования коллапса облака солнечной массы.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, вычислительная астрофизика, перенос излучения.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.206

### ВВЕДЕНИЕ

Вычислительные эксперименты по исследованию неустойчивости протопланетного диска в гидродинамическом приближении показали возможность формирования планет-гигантов как при использовании сеточных методов [1], так и при использовании методов сглаженных частиц [2]. Существенным ограничением использования классической гидродинамической модели является потенциальная возможность подавления неустойчивости диска, что, в свою очередь, ведет к ограничению воспроизведения механизма охлаждения будущих протопланет во время сжатия до протопланетных плотностей. В связи с этим гидродинамическая модель требует расширения с учетом переноса излучения в диффузионном приближении [3].

Ранее нами был предложен подход к гидродинамическому моделированию процессов звездообразования на основе использования геодезических сеток [4], которые затем были доработаны с учетом самосогласованного потенциала до использования тетраэдральных сеток [5]. Использование подхода на основе геодезических сеток и дальнейшее разбиение на тетраэдры имеет ряд ограничений, в дальнейшем мы планируем использовать пакеты с открытым кодом (например, пакет NetGen). Такой подход успешно используется для аккреции вещества на диски [6]. В настоящей работе представлено расширение разработанной ранее вычислительной модели с учетом переноса излучения в диффузионном приближении [7].

В первом разделе описана вычислительная модель переноса излучения в диффузионном приближении. Второй раздел посвящен детальному описанию численного метода решения параболических уравнений, описывающих диффузионный терм. В третьем разделе приведены результаты вычислительных экспериментов по коллапсу облака солнечной массы.

## 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ В ДИФФУЗИОННОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Для описания модели гравитационной радиационной гидродинамики будем использовать закон сохранения массы:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0,$$

закон сохранения момента импульса:

$$\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v} + p) = -\rho \nabla \Phi,$$

закон сохранения энергии, основанный на диффузионном приближении переноса излучения:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon \right) + \nabla \cdot \left[ \left( \frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon + p \right) \vec{v} \right] = -(\rho \vec{v}, \nabla \Phi) + \nabla \cdot \left( \frac{4}{3\kappa\rho} \nabla(\sigma T^4) \right),$$

где  $\rho$  — плотность,  $\vec{v}$  — вектор скорости,  $p$  — давление,  $T$  — температура,  $\rho \varepsilon$  — внутренняя энергия,  $\Phi$  — гравитационный потенциал,  $\kappa$  — средняя непрозрачность Росселанда,  $\sigma$  — постоянная Стефана — Больцмана. В нашей модели мы используем приближение идеального газа  $p = (\gamma - 1)\rho \varepsilon$ , где  $p$  — давление газа,  $\gamma$  — показатель адиабаты. С другой стороны, давление может быть записано в виде  $p = \frac{R}{\mu} \rho T$ , где  $R$  — универсальная газовая постоянная,  $\mu$  — молекулярная масса. Уравнения гидродинамики дополнены уравнением Пуассона для определения гравитационного потенциала  $\Delta \Phi = 4\pi G \rho$ , где  $G$  — гравитационная постоянная.

Для решения уравнений гравитационной радиационной гидродинамики будем использовать метод разделения операторов и последовательно на каждом шаге по времени разрешать три системы уравнений:

1) гиперболическую систему уравнений гидродинамики, записанную в векторной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \vec{v} \\ \frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon \end{pmatrix} + \nabla \cdot \begin{pmatrix} \rho \vec{v} \\ \rho \vec{v} \vec{v} + p \\ \left[ \frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon + p \right] \vec{v} \end{pmatrix} = 0;$$

2) эллиптическое уравнение Пуассона для гравитационного потенциала с учетом вклада градиента потенциала в момент импульса и полную энергию:

$$\begin{aligned} \Delta \Phi &= 4\pi G \rho, \\ \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} &= -\rho \nabla \Phi, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon \right) &= -(\rho \vec{v}, \nabla \Phi); \end{aligned}$$

3) параболическое уравнение для учета диффузионного слагаемого, описывающего перенос излучения:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon \right) = \nabla \cdot \left( \frac{4}{3\kappa\rho} \nabla(\sigma T^4) \right).$$

Отметим, что данное расширение суть параболическое уравнение, которое необходимо одновременно решать с использованием метода разделения операторов с гиперболическими уравнениями гидродинамики и эллиптическим уравнением Пуассона. Основной сложностью при использовании явной схемы является существенное ограничение на шаг по времени для сохранения устойчивости численного метода. Поэтому в нашей модели мы будем использовать

неявную схему для вычисления правой части уравнения внутренней энергии. Далее приведем вывод решаемого параболического уравнения, а в следующем разделе подробно приведем численный метод для его разрешения на тетраэдральных сетках. Для этого преобразуем уравнение для полной энергии с учетом того, что на данном этапе вклад происходит только во внутреннюю энергию:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{R}{\mu} \rho T \right) = \nabla \cdot \left( \frac{4}{3\kappa\rho} \nabla(\sigma T^4) \right).$$

С учетом того, что при учете диффузионного члена плотность со временем неизменна, то последнее уравнение можно переписать в виде  $\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T^4)$ , где коэффициент  $k$  определяется уравнением  $k = \frac{4\sigma\mu(\gamma-1)}{3\kappa R\rho^2}$ . В нашей численной модели параболическое уравнение для температуры мы будем разрешать с использованием неявной схемы, а полученное значение температуры будет использоваться в формировании правой части для уравнения полной энергии.

## 2. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГРАВИТАЦИОННОЙ РАДИАЦИОННОЙ ГИДРОДИНАМИКИ НА ТЕТРАЭДРАЛЬНОЙ СЕТКЕ

Рассмотрим произвольную тетраэдральную ячейку с номером  $i$  для описания множества соседних ячеек используем индекс  $j$ . Определим внешние нормали  $n_{ij}$  ячейки  $i$  по направлению к ячейкам  $j$  при известном векторе  $\overrightarrow{M_i M_{ij}}$ , где  $A$ ,  $B$  и  $C$  — вершины грани между ячейками  $i$  и  $j$ ,  $M_i$  — центр вписанной в тетраэдр  $i$ -й сферы,  $M_{ij}$  — центр вписанной в грань окружности между ячейками  $i$  и  $j$ . Также в расчетах будут необходимы площади граней и объемы ячеек. Объем тетраэдра  $V_i$  и площадь треугольников  $S_{ij}$  выписываются тривиально. Подробности построение тетраэдральной сетки приведены в работе [5].

Сформулируем законы сохранения уравнений гидродинамики в векторной форме:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} + \frac{\partial g(u)}{\partial y} + \frac{\partial h(u)}{\partial z} = 0,$$

где  $u$  — вектор консервативных переменных; функции  $f(u)$ ,  $g(u)$ ,  $h(u)$  — потоки по соответствующим направлениям. Дополнительно будем рассматривать вектор физических переменных  $q(u) = (\rho, \vec{v}, p)$ , которые достаточно просто можно восстановить из консервативных переменных. Проинтегрируем решаемые уравнения и рассмотрим конечный объем  $V_i$  с границей  $\Gamma_i = \bigcap_j S_{ij}$ , получим

$$\int_{V_i} \frac{\partial u}{\partial t} dV + \int_{V_i} \left( \frac{\partial f(u)}{\partial x} + \frac{\partial g(u)}{\partial y} + \frac{\partial h(u)}{\partial z} \right) dV = 0.$$

Воспользуемся формулой Остроградского и запишем интегральные уравнения в виде

$$V_i \frac{du}{dt} + \oint_{\Gamma_i} (fn^x + gn^y + hn^z) dS = 0.$$

Конечно-объемная схема имеет вид

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + \sum_j \frac{S_{ij}}{V_i} (F_{ij} n_{ij}^x + G_{ij} n_{ij}^y + H_{ij} n_{ij}^z) = 0,$$

где  $F_{ij}$ ,  $G_{ij}$ ,  $H_{ij}$  — решение задачи Римана  $\mathcal{R} = (w, u^L, u^R)$  для уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial w(u)}{\partial x} = 0$$

с начальными условиями  $u(x, t) = u^L$  при  $x < 0$  и  $u(x, t) = u^R$  при  $x \geq 0$ . В качестве решения задачи Римана будем использовать схему типа Рундана [8–10]:

$$\mathcal{R}(w, u^L, u^R) = \frac{w(u^L) + w(u^R)}{2} + \frac{|\frac{\partial w}{\partial u}|}{2}(u^L - u^R).$$

Для повышения порядка точности будем использовать подход, аналогичный описанному в работе [11]. Такой подход состоит в осреднении физических переменных в узлы тетраэдров, а затем формировании градиентов плотности, компонент скорости и давления с использованием  $\min$  мод ограничителей для разности значений между соседними ячейками и между ячейкой и противоположным узлом. Подробности такого подхода для регулярных сеток подробно изложены в работе [10].

Для определения шага по времени  $\tau$  определим для каждой ячейки диаметры вписанных сфер  $d_i$ . Тогда шаг по времени можно вычислить по формуле

$$\tau = \min_i \left( \frac{d_i}{\max \left( \frac{\partial F(u_i)}{\partial u}, \frac{\partial G(u_i)}{\partial u}, \frac{\partial H(u_i)}{\partial u} \right)} \right) \times CFL,$$

где  $CFL < 1$  — число Куранта.

Для решения уравнения Пуассона будем рассматривать потенциал, определенный в узлах расчетной сетки, и метод конечных элементов в слабой постановке для дискретизации оператора Лапласа. Для этого функции потенциала и плотности рассмотрим в виде суперпозиции по базисным линейным функциям, привязанных к узлам расчетной сетки. Здесь мы сделаем важное пояснение, что функция плотности рассматривается нами в ячейках расчетной области, однако проецируется в узлы для достижения высокого порядка точности в гладкой области и малой диссипации на разрывах численного метода решения уравнений гидродинамики. Домножая обе части уравнения Пуассона на базисную функцию  $\psi_i$ , получим

$$\int_V \Delta \Phi \psi_i dV = 4\pi G \int_V \rho \psi_i dV.$$

Используем разложение функций потенциала и плотности по базисным функциям:

$$\int_V \nabla \cdot \left( \nabla \sum \Phi_j \psi_j \right) \psi_i dV = 4\pi G \int_V \sum \rho_j \psi_j \psi_i dV.$$

Интегрируя по частям и учитывая, что для потенциала зафиксированы граничные условия первого рода, получим

$$- \int_V \sum \Phi_j \nabla \psi_j \nabla \psi_i dV = 4\pi G \int_V \sum \rho_j \psi_j \psi_i dV$$

или в терминологии матриц жесткости и масс соответственно:

$$- \sum \Phi_j \int_V \nabla \psi_j \nabla \psi_i dV = 4\pi G \sum \rho_j \int_V \psi_j \psi_i dV.$$

Для определенности рассмотрим произвольный тетраэдр  $ABCD$ , вершины которого

$$A = (A_x, A_y, A_z), \quad B = (B_x, B_y, B_z), \quad C = (C_x, C_y, C_z), \quad D = (D_x, D_y, D_z)$$

соответственно. Определим четыре базисных функции, каждая из которых единична только в одном узле, а в остальных принимает значение нуль:  $\psi_i(x, y, z) = a_i x + b_i y + c_i z + d_i$ , где  $i = A, B, C, D$ . Для определения коэффициентов  $a_i, b_i, c_i, d_i$  необходимо разрешить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} A_x & A_y & A_z & 1 \\ B_x & B_y & B_z & 1 \\ C_x & C_y & C_z & 1 \\ D_x & D_y & D_z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_A & a_B & a_C & a_D \\ b_A & b_B & b_C & b_D \\ c_A & c_B & c_C & c_D \\ d_A & d_B & d_C & d_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Последняя система аналитически может быть разрешена методом Крамера. В этом случае градиент каждой базисной функции в тетраэдре имеет простой аналитический вид  $\nabla\psi_i = (a_i, b_i, c_i)$ , сумма которых позволяет построить градиент потенциала в тетраэдральной ячейке:

$$\nabla\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_A a_A + \Phi_B a_B + \Phi_C a_C + \Phi_D a_D \\ \Phi_A b_A + \Phi_B b_B + \Phi_C b_C + \Phi_D b_D \\ \Phi_A c_A + \Phi_B c_B + \Phi_C c_C + \Phi_D c_D \end{pmatrix},$$

где  $\Phi_i$  — значения потенциала в соответствующих узлах. Последнюю формулу мы и будем использовать для определения градиента потенциала при разрешении правых частей уравнений для моментов импульса и полной энергии. Как уже было сказано, при конструкции схемы высокого порядка точности для решения уравнений гидродинамики мы спроецировали функцию плотности в узлы, поэтому, как и потенциал, плотность также рассматривается в узлах тетраэдра. Приведем в заключение формулы для матрицы жесткости  $S$  и матрицы масс  $M$  для конечно-элементной постановки для рассматриваемого тетраэдра:

$$S = \int_V \nabla\psi_j \nabla\psi_i dV = -V_{ABCD} \begin{pmatrix} (\nabla\psi_A, \nabla\psi_A) & (\nabla\psi_A, \nabla\psi_B) & (\nabla\psi_A, \nabla\psi_C) & (\nabla\psi_A, \nabla\psi_D) \\ (\nabla\psi_B, \nabla\psi_A) & (\nabla\psi_B, \nabla\psi_B) & (\nabla\psi_B, \nabla\psi_C) & (\nabla\psi_B, \nabla\psi_D) \\ (\nabla\psi_C, \nabla\psi_A) & (\nabla\psi_C, \nabla\psi_B) & (\nabla\psi_C, \nabla\psi_C) & (\nabla\psi_C, \nabla\psi_D) \\ (\nabla\psi_D, \nabla\psi_A) & (\nabla\psi_D, \nabla\psi_B) & (\nabla\psi_D, \nabla\psi_C) & (\nabla\psi_D, \nabla\psi_D) \end{pmatrix},$$

$$M = \int_V \psi_j \psi_i dV = \frac{V_{ABCD}}{20} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

где  $(\nabla\psi_i, \nabla\psi_j) = a_i a_j + b_i b_j + c_i c_j$ .

На границе области используется фундаментальное решение уравнений Лапласа в виде граничных условий первого рода. Для разрешения полученной разреженной системы уравнений используется метод сопряженных градиентов.

Для разрешения уравнения теплопроводности мы будем использовать двухслойную неявную схему и схему простой итерации для определения функции температуры. Для этого на каждом итерационном шаге с использованием метода конечных элементов (основные элементы которого мы описали ранее)

$$\frac{T^{n+1} - T^n}{\tau} = \nabla \cdot (4kT^3 \nabla T).$$

. В этом случае матрицу системы линейных алгебраических уравнений на каждом итерационном шаге по времени будем формировать из слабой постановки:

$$-4kT^n \sum T_j^{n+1} \int_V \nabla\psi_j \nabla\psi_i dV = \frac{\sum T_j^{n+1} \int_V \psi_j \psi_i dV - \sum T_j^n \int_V \psi_j \psi_i dV}{\tau}.$$

Полученное решение на шаге  $(n + 1)$  используем для аппроксимации правой части уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon \right) = \nabla \cdot \left( \frac{4}{3\kappa\rho} \nabla(\sigma T^4) \right).$$

Для произвольной ячейки  $ABCD$  правая часть последнего уравнения записывается в следующем аналитическом виде:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left( \frac{4}{3\kappa\rho} \nabla(\sigma T^4) \right)_{ABCD} &= 12T^2(M) [(T_A^{n+1}a_A + T_B^{n+1}a_B + T_C^{n+1}a_C + T_D^{n+1}a_D)^2 \\ &+ (T_A^{n+1}b_A + T_B^{n+1}b_B + T_C^{n+1}b_C + T_D^{n+1}b_D)^2 + (T_A^{n+1}c_A + T_B^{n+1}c_B + T_C^{n+1}c_C + T_D^{n+1}c_D)^2], \end{aligned}$$

где  $T(M)$  — значение температуры в центре  $M = (M_x, M_y, M_z)$  вписанной в тетраэдр сферы, которое можно вычислить аналитически по формуле

$$\begin{aligned} T(M) &= T_A^{n+1}(a_A M_x + b_A M_y + c_A M_z + d_A) + T_B^{n+1}(a_B M_x + b_B M_y + c_B M_z + d_B) \\ &+ T_C^{n+1}(a_C M_x + b_C M_y + c_C M_z + d_C) + T_D^{n+1}(a_D M_x + b_D M_y + c_D M_z + d_D). \end{aligned}$$

Для решения системы линейных алгебраических уравнений с разреженной матрицей нами была реализована библиотека IMVL (Iterative Methods Vector Library). Такая библиотека была нам необходима в связи со сложностью использования ряда коммерческих библиотек и библиотек с открытым кодом, а также в связи с будущим переходом на архитектуры с общей или распределенной памятью и графические ускорители. Библиотека включает в себя следующие процедуры:

- *CreateMatrix* — создание разреженной матрицы (конструктор),
- *CreateVector* — создание вектора заданной длины,
- *DestroyMatrix* — удаление разреженной матрицы (деструктор),
- *Reset* — сброс значение матрицы,
- *CreateElement* — создание ненулевого элемента в портрете матрицы,
- *CreatePortrait* — создание портрета матрицы,
- *AddElement* — добавление значения в матрицу,
- *AddElementVector* — добавление значения в вектор,
- *MultMatrixVector* — умножение разреженной матрицы на вектор,
- *MultDiagMatrixVector* — умножение диагональной матрицы на вектор,
- *SummVectorMultConstant* — сложение векторов с умножением на скаляр,
- *CopyVector* — копирование векторов,
- *ScalarMultiply* — скалярное произведение векторов,
- *SetStartVector* — установка начального приближения,
- *ConjGradientMethod* — решение системы линейных алгебраических уравнений методом сопряженных градиентов,
- *Save* — сохранение матрицы в разреженном строчном формате.

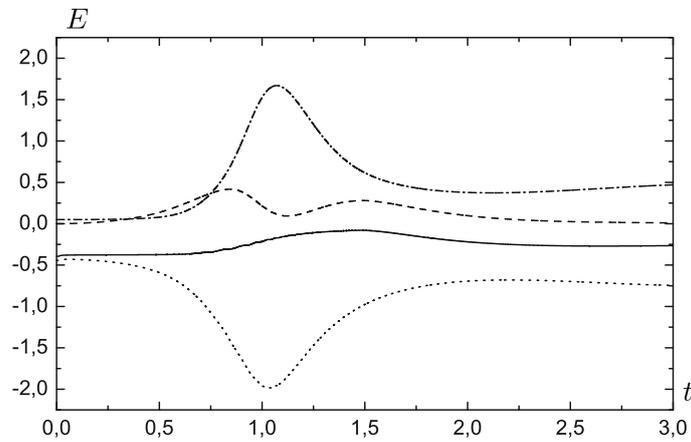
Пример работы с данной библиотекой на языке C++ приведен на ресурсе GitHub по интернет-адресу: [https://github.com/IgorKulikov/FEM\\_Poisson3D](https://github.com/IgorKulikov/FEM_Poisson3D)

### 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЛАПСА ОБЛАКА СОЛНЕЧНОЙ МАССЫ

Будем моделировать газовое облако, ограниченное сферой радиуса  $R_0 = 3,81 \cdot 10^{14}$  м, с массой  $M_g = 3,457 \cdot 10^{30}$  кг, с равномерным распределением плотности  $\rho = 1,492 \cdot 10^{-14}$  кг/м<sup>3</sup> и давления  $p = 0,1548 \cdot 10^{-10}$  Н/м<sup>2</sup>. Показатель адиабаты соответствует водороду  $\gamma=5/3$ . В качестве размерных величин выберем следующие значения:

$$L_0 = 3,81 \cdot 10^{14} \text{ м}, \rho_0 = 1,492 \cdot 10^{-14} \text{ кг/м}^3, p = 0,1548 \cdot 10^{-7} \text{ Н/м}^2, v_0 = 1010 \text{ м/с}, t = 3,7 \cdot 10^{11} \text{ с}.$$

Тогда в безразмерных величинах задача ставится следующим образом:  $\rho = 1,0$  — плотность газового облака,  $p = 10^{-3}$  — давление в газовом облаке,  $m_{\odot} = 2,42$  — масса центрального тела,  $\gamma = 5/3$  — показатель адиабаты,  $[0; 6,4]^3$  — расчётная область. На рисунке показано поведение различных видов энергий.



Поведение различных видов энергий:  
 кинетическая энергия ( $\cdot\cdot\cdot$ ), потенциальная энергия ( $- - -$ ), внутренняя энергия ( $- \cdot - \cdot -$ ),  
 общая энергия самогравитирующего радиационного газового облака ( $-$ )

Основной процесс коллапса происходит до безразмерного единичного момента времени, когда минимума достигает гравитационная энергия системы. Отметим, что скорость сжатия и дальнейшего расширения является дозвуковой, что характеризуется малым абсолютным значением кинетической энергии. Заметим значительное замедление газа до момента формирования пика плотности, что эквивалентно минимуму потенциальной энергии. Максимум внутренней энергии достигается немного позже минимума потенциальной энергии, после чего значительный вклад дает теплопроводный член. Этот факт характеризуется более быстрым спадом потенциальной энергии, чем внутренней энергии, что, в свою очередь, видно по увеличению суммарной энергии газа. При отсутствии теплопроводного члена график внутренней энергии после момента коллапса снижается более резко, сохраняя постоянное значение суммарной энергии системы.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Описан численный метод для разрешения модели гравитационной гидродинамики с учетом переноса излучения в диффузионном приближении на тетраэдральных сетках. Разработанный в статье численный метод и подход с использованием тетраэдральных сеток позволяет получить инвариантное относительно поворота численное решение в декартовых координатах, что особенно важно в задачах звездообразования и эволюции протопланетного диска. На задаче коллапса облака солнечной массы была верифицирована построенная численная модель. В дальнейшем разработанные численные методы планируется довести до астрофизического кода уровня «state-of-the-art» для решения задач звездообразования на классических и гибридных суперЭВМ, где такой подход наиболее востребован.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Boss A. Testing disk instability models for giant planet formation // *Astrophys. J. Letters*. 2007. V. 661. P. L73–L76.
2. Mayer L., Lufkin G., Quinn T., Wadsley J. Fragmentation of gravitationally unstable gaseous protoplanetary disks with radiative transfer // *Astrophys. J. Letters*. 2007. V. 661. P. L77–L80.

3. *Boss A.* Flux-limited diffusion approximation models of giant planet formation by disk instability // *Astrophys. J.* 2008. V. 677. P. 607–615.
4. *Kulikov I. M., Vorobyov E. I., Chernykh I. G., Elbakyan V. G.* Application of geodesic grids for modeling the hydrodynamic processes in spherical objects // *J. Appl. Indust. Math.* 2020. V. 14, N 4. P. 672–680.
5. *Kulikov I., Vorobyov E., Chernykh I., Elbakyan V.* Hydrodynamic modeling of self-gravitating astrophysical objects on tetrahedral meshes // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2020. V. 1640. Article Number 012003.
6. *Lukin V. V., Shakura N. I., Postnov K. A.* Mathematical modeling of inclined accretion disks in cataclysmic variables // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2020. V. 1640. Article Number 012024.
7. *Boley A., Durisen R., Nordlund A., Lord J.* Three-dimensional radiative hydrodynamics for disk stability simulations: a proposed testing standard and new results // *Astrophys. J.* 2007. V. 665. P. 1254–1267.
8. *Kulikov I. M., Chernykh I. G., Glinskiy B. M., Protasov V. A.* An efficient optimization of HLL method for the second generation of Intel Xeon Phi Processor // *Lobachevskii J. Math.* 2018. V. 39, N 4. P. 543–551.
9. *Kulikov I. M., Chernykh I. G., Tutukov A. V.* A new parallel intel xeon phi hydrodynamics code for massively parallel supercomputers // *Lobachevskii J. Math.* 2018. V. 39, N 9. P. 1207–1216.
10. *Kulikov I. M., Chernykh I. G., Sapetina A. F., Lomakin S. V., Tutukov A. V.* A new Rusanov-type solver with a local linear solution reconstruction for numerical modeling of white dwarf mergers by means massive parallel supercomputers // *Lobachevskii J. Math.* 2020. V. 41, N 8. P. 1485–1491.
11. *Chen G., Tang H., Zhang P.* Second-order accurate godunov scheme for multicomponent flows on moving triangular meshes // *J. Sci. Comput.* 2008. V. 34. P. 64–86.

UDC 519.4

**ON A COMPUTATIONAL MODEL OF GRAVITATIONAL  
HYDRODYNAMICS WITH CONSIDERATION OF THE RADIATION  
TRANSFER IN THE DIFFUSION APPROXIMATION USING  
TETRAHEDRAL MESHES**

© 2021 I. M. Kulikov

*Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS,  
pr. Acad. Lavrentyeva 6, Novosibirsk 630090, Russia*

E-mail: kulikov@ssd.scc.ru

Received 16.02.2021, revised 21.03.2021, accepted 15.04.2021

**Abstract.** A new computational model of gravitational hydrodynamics with consideration of the radiation transfer in the diffusion approximation on tetrahedral meshes is proposed. This model is a qualitative extension of the classical gravitational hydrodynamics model adapted to simulation of star formation and evolution of protoplanetary disks. Some computational methods of solving this problem are described, and the results of numerical simulation of the solar mass cloud collapse are given.

**Keywords:** mathematical modeling, computational astrophysics, radiation transfer.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.206

REFERENCES

1. Boss A. Testing disk instability models for giant planet formation. *Astrophys. J. Letters*, 2007, Vol. 661, pp. L73–L76.
2. Mayer L., Lufkin G., Quinn T., Wadsley J. Fragmentation of gravitationally unstable gaseous protoplanetary disks with radiative transfer. *Astrophys. J. Letters*, 2007, Vol. 661, pp. L77–L80.
3. Boss A. Flux-limited diffusion approximation models of giant planet formation by disk instability. *Astrophys. J.*, 2008, Vol. 677, pp. 607–615.
4. Kulikov I.M., Vorobyov E.I., Chernykh I.G., Elbakyan V.G. Application of geodesic grids for modeling the hydrodynamic processes in spherical objects. *J. Appl. Indust. Math.*, 2020, Vol. 14, No. 4, pp. 672–680.
5. Kulikov I., Vorobyov E., Chernykh I., Elbakyan V. Hydrodynamic modeling of self-gravitating astrophysical objects on tetrahedral meshes. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2020, Vol. 1640. Art. No. 012003.
6. Lukin V.V., Shakura N.I., Postnov K.A. Mathematical modeling of inclined accretion disks in cataclysmic variables. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2020, Vol. 1640. Art. No. 012024.
7. Boley A., Durisen R., Nordlund A., Lord J. Three-dimensional radiative hydrodynamics for disk stability simulations: a proposed testing standard and new results. *Astrophys. J.*, 2007, Vol. 665, pp. 1254–1267.
8. Kulikov I.M., Chernykh I.G., Glinskiy B.M., Protasov V.A. An efficient optimization of Hll method for the second generation of Intel Xeon Phi Processor. *Lobachevskii J. Math.*, 2018, Vol. 39, No. 4, pp. 543–551.
9. Kulikov I.M., Chernykh I.G., Tutukov A.V. A new parallel intel xeon phi hydrodynamics code for massively parallel supercomputers. *Lobachevskii J. Math.*, 2018, Vol. 39, No. 9, pp. 1207–1216.

10. Kulikov I.M., Chernykh I.G., Sapetina A.F., Lomakin S.V., Tutukov A.V. A new Rusanov-type solver with a local linear solution reconstruction for numerical modeling of white dwarf mergers by means massive parallel supercomputers. *Lobachevskii J. Math.*, 2020, Vol. 41, No. 8, pp. 1485–1491.
11. Chen G., Tang H., Zhang P. Second-order accurate godunov scheme for multicomponent flows on moving triangular meshes. *J. Sci. Comput.*, 2008, Vol. 34, pp. 64–86.