

УДК 519.63

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТОКА  
ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА ПРИ ИМПУЛЬСНОМ НАГРЕВЕ  
МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ МИШЕНИ© 2021 Г. Г. Лазарева<sup>1,2a</sup>, В. А. Попов<sup>2b</sup>, А. С. Аракчеев<sup>3,4c</sup>,  
А. В. Бурдаков<sup>3,4d</sup>, И. В. Шваб<sup>2,5e</sup>, В. Л. Васкевич<sup>2,6f</sup>, А. Г. Максимова<sup>2g</sup>,  
Н. Е. Ивашин<sup>2h</sup>, И. П. Оксогова<sup>1i</sup><sup>1</sup>Российский университет дружбы народов,  
ул. Миклухо-Маклая, 6, Москва 117198, Россия,<sup>2</sup>Новосибирский государственный университет,  
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090, Россия,<sup>3</sup>Новосибирский государственный технический университет,  
просп. К. Маркса, 20, корпус 1, Новосибирск 630073, Россия,<sup>4</sup>Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера СО РАН,  
просп. Акад. Лаврентьева, 11, Новосибирск 630090, Россия,<sup>5</sup>Федеральный исследовательский центр информационных  
и вычислительных технологий,  
просп. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск 630090, Россия,<sup>6</sup>Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
просп. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск 630090, РоссияE-mails: <sup>a</sup>lazareva-gg@rudn.ru, <sup>b</sup>v.a.popov94@gmail.com, <sup>c</sup>asarakcheev@gmail.com,  
<sup>d</sup>a.v.burdakov@mail.ru, <sup>e</sup>schwab\_irina@mail.ru, <sup>f</sup>vask@math.nsc.ru,  
<sup>g</sup>maksimova@oapmg.sccc.ru, <sup>h</sup>n.ivashin@yandex.ru, <sup>i</sup>oksogi@mail.ruПоступила в редакцию 16.02.2021 г.; после доработки 28.02.2021 г.;  
принята к публикации 15.04.2021 г.

Рассмотрена модель распределения тока при нагреве поверхности вольфрамового образца при импульсном воздействии электронным пучком. Модель основана на решении уравнений электродинамики и двухфазной задачи Стефана для расчёта температуры в области образца в цилиндрической системе координат. Параметры модели взяты из экспериментов на стенде Beam of Electrons for materials Test Applications (BETA), созданного в ИЯФ СО РАН. Рассмотрен частный случай аксиальной симметрии без учёта электродвижущих сил. Ток рассматривается как возможный источник вращения вещества, который наблюдается в эксперименте. Получены расчётные значения тока и ускорение вещества при температуре поверхности свыше 6000 К. Результаты проведённого моделирования показывают, что для получения ускорения, способного инициировать наблюдаемое в эксперименте вращение расплава, нужно учесть альтернативные механизмы создания тока в системе с учётом испарений вольфрама над пластинкой.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, потенциал тока, распределение тока электронного пучка, вращение расплава вольфрама, метод верхней релаксации.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.207

## ВВЕДЕНИЕ

На экспериментальном стенде Beam of Electrons for materials Test Applications (ВЕТА), созданном в ИЯФ СО РАН [1], получены новые экспериментальные данные об эрозии поверхности вольфрамового образца при импульсном воздействии электронным пучком. Натурный эксперимент постоянно сопровождается численным [2]. Модель нагрева вольфрама основана на решении в области образца уравнений электродинамики и двухфазной задачи Стефана для температуры. Работа посвящена расчёту тока в образце, который рассматривается как возможный источник вращения вещества, который наблюдается в эксперименте. Расчёт проведён для анализа и планирования натуральных экспериментов с целью определения влияния сил Ампера на динамику вещества. Планируется исследовать предполагаемое влияние неоднородности температуры на движение заряда, расплава и газа. Неоднородность температуры в расплаве приводит к возникновению течения тока. В областях с перепадами температуры возникает электродвижущая сила. Важно, что в газе и в расплаве электродвижущая сила отличается. Поэтому может возникнуть ненулевое ускоряющее напряжение на замкнутом контуре через газ и расплав, которое порождает ток по этому контуру. Величина проводимости нелинейно зависит от температуры. Можно дать оценки, в каких областях газа и расплава будет хорошая проводимость и высокое напряжение, но без использования математического моделирования сложно предсказать, в каких областях может наблюдаться наибольший ток. Ток, взаимодействуя с магнитным полем, приводит к движению вещества в целом.

В данной работе рассматривается частный случай, когда уравнения для полей и токов выписаны для образца вольфрама в цилиндрической системе координат без учёта электродвижущих сил. Это обусловлено необходимостью сравнения в дальнейшем ходе исследований расчётного влияния термотоков с влиянием тока пучка. Предполагается, что характерное время изменения велико по сравнению с временем установления равновесия уравнений электродинамики на масштабе задачи. Дальнейшее развитие модели предполагает включение расчёта электродвижущей силы в газе и расплаве.

Для определения удельной проводимости проводится расчёт распределения температуры в образце на основе решения задачи Стефана. Положение и скорость движения границы раздела фаз зависят от нелинейных коэффициентов. Условие на границе свободный расплав-твёрдое тело состоит в непрерывности температуры и разрывности теплового потока за счёт поглощения или выделения известного количества тепла. Известные результаты не могут быть использованы из-за специфичности постановки задачи (диапазон температур и давлений, пространственная и временная шкалы). Новизна и сложность решения задачи обусловлены в основном необходимостью верного описания нелинейных граничных условий, описывающих нагрев и испарение материала на его поверхности. Практическая направленность работы требует, чтобы постановка модельной задачи как можно точно соответствовала условиям эксперимента. Результаты расчётов итоговой модели используются для сравнения с экспериментальными данными, полученными на экспериментальном стенде ВЕТА в ИЯФ СО РАН.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Численная модель распределения тока пучка в нагреваемом образце вольфрама в упрощённом виде сводится к совместному решению системы уравнений Максвелла и задачи Стефана. Для расчёта распространения температуры с нагреваемой поверхности вглубь образца

решается задача Стефана:

$$\begin{aligned}
 c(T)\rho^*(T)\frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z}\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial z}, \\
 (\mathbf{n}, \nabla T)|_\gamma &= \frac{W(t,r) - N(t,r)}{\lambda(T)}, \\
 (\mathbf{n}, \nabla T) &= 0 \quad \text{на других границах,} \\
 T &= T_0 \quad \text{при } t = 0,
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

где  $T(r, z, t)$  — температура,  $c(T)$  — удельная теплоёмкость,  $\rho^*(T)$  — плотность,  $\lambda(T)$  — теплопроводность,  $W(t, r)$  — сила теплового потока на поверхность  $\gamma$ ,  $N(t, r)$  — испарение на поверхности,  $\mathbf{n}$  — нормаль к поверхности,  $T_0$  — начальная температура. Условия на свободной границе имеют вид  $[T]|_S = 0$  и  $\left[\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial t}\right]_S = L_m\nu_n$ , где  $L_m$  — энтальпия фазового перехода,  $\nu_n$  — скорость границы фазового перехода. Температура плавления  $T_m = 3695$  К. В экспериментах на установке ВЕТА образцы прокатанного вольфрама подвергались воздействию осесимметричного электронного пучка [3]. Электроны с энергией 80–90 кэВ нагревают материал в слое, который является тонким по сравнению с характерной глубиной нагрева материала. Распределение мощности по поверхности теплового потока задаётся следующей формулой:

$$W(t, r) = W_{\max}(t) \cdot \exp(-A \cdot r^2).$$

Здесь  $A = 0,03088523$  (1/мм<sup>2</sup>) — постоянная, характеризующая радиус пучка и полученная из эксперимента. На каждом временном шаге численного моделирования значение переменной  $W_{\max}(t)$  берётся из файла экспериментальных данных, индивидуального для каждого эксперимента. Распределение плотности мощности нагрева по поверхности измеряли с помощью рентгеновской визуализации [4]. Тепло, поглощённое поверхностью, распространяется в материал. Образец имеет размеры 25 × 25 мм и типичную толщину 4 мм. Поскольку за такое короткое время образец нагревается на глубину нескольких сотен микрон, область моделирования представляла собой поперечное сечение образца размером 12 × 3 мм. Что касается времени, то численное моделирование продолжалось до того момента, когда было произведено последнее измерение температуры поверхности. Удобнее проводить вычисления в безразмерных переменных, например, следующим образом:

$$r^* = \frac{r}{r_0}, \quad \lambda^* = \frac{\lambda}{\lambda_0}, \quad \rho^* = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad c^* = \frac{c}{c_0}, \quad t^* = \frac{\lambda_0 t}{\rho_0 c_0 r_0^2}, \quad T^* = \frac{T}{T_0}, \quad W^* = \frac{\lambda_0 T_0 W}{r_0}.$$

Характерные значения параметров приведены в табл. 1.

Таблица 1

Параметр	Характерное значение	Единицы измерения
$r_0$	$10^{-1}$	мм
$t_0$	$10^2$	мкс
$\lambda_0$	$10^{-1}$	Вт/(мм·К)
$\rho_0$	$10^{-5}$	кг/мм <sup>3</sup>
$c_0$	$10^8$	Вт·мкс/(кг·К)
$T_0$	$10^3$	К
$W_0$	$10^3$	Вт/мм <sup>2</sup>

Постановка задачи для нахождения температуры в образце, метод решения, тестирование, результаты моделирования и сравнение с экспериментальными данными подробно описаны в работах [2–5].

Полученное распределение температуры позволяет рассчитать удельную проводимость  $\rho_e$  в образце [6] (см. рис. 1):

$$\rho_e(T(t, r, z)) = \begin{cases} -0,968 + 1,9274 \cdot 10^{-2}T + 7,826 \cdot 10^{-6}T^2 - 1,8517 \cdot 10^{-9}T^3 + 2,079 \cdot 10^{-13}T^4, & 100 \text{ K} \leq T < T_m, \\ 135 - 1,855 \cdot 10^{-3}(T - T_m) + 4,42 \cdot 10^{-6}(T - T_m)^2, & T_m \leq T. \end{cases}$$

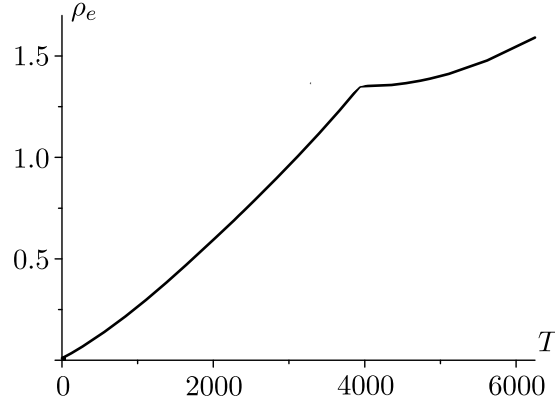


Рис. 1. График зависимости электрического сопротивления  $\rho_e$  (1/Ом·мм) от температуры  $T$  (К)

Процесс распространения тока в образце можно считать стационарным, так как характерное время изменения велико по сравнению с временем установления равновесия уравнений электродинамики на масштабе задачи [7]. Распределение тока рассчитывается в момент времени, когда образец максимально разогрет. Учёт процесса испарения гарантирует ограничение роста температуры в образце, что соответствует экспериментальным данным [2]. Система уравнений Максвелла для расчёта тока в образце модифицирована для стационарного случая в цилиндрической системе координат без учёта электродвижущих сил:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{E} = \rho_e \mathbf{j}, \quad (2)$$

где  $\rho_e$  — удельная проводимость,  $\mathbf{B}$  — магнитное поле,  $\mathbf{E} = (E_r, E_\varphi, E_z)$  — электрическое поле,  $\mathbf{j} = (j_r, j_\varphi, j_z)$  — ток.

Введём векторный потенциал тока  $\mathbf{F} = (F_r, F_\varphi, F_z)$ :

$$\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{F} \quad (3)$$

и запишем систему уравнений (2) в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$ . Заметим, что производные по углу  $\varphi$  будут равны нулю в силу симметрии задачи относительно поворота [8, 9]. Выразим ток через векторный потенциал тока, учитывая нулевую производную по углу. Так как отсутствует вихревое электрическое поле, то ток течёт только по осевому и радиальному направлениям и  $E_\varphi = 0$ . Отсюда следует, что  $j_\varphi = 0$ :

$$\mathbf{j} = \begin{pmatrix} j_r \\ j_\varphi \\ j_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial F_\varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial r F_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial F_\varphi}{\partial z} \\ 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial r F_\varphi}{\partial r} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Таким образом, для описания тока достаточно только одной функции  $F_\varphi$ , описывающей «завихрённость» тока. Уравнение на «завихрённость», полученное как следствие системы (2), имеет вид

$$\nabla \times (\rho_e \mathbf{j}) = \nabla \rho_e \times \mathbf{j} + \rho_e \nabla \times \mathbf{j} = \nabla \rho_e \times (\nabla F_\varphi \nabla \mathbf{e}_\varphi) - \rho_e \Delta F_\varphi \mathbf{e}_\varphi = 0. \quad (5)$$

В (5) последнее равенство следует из того, что производные по  $\varphi$  нулевые и  $j_\varphi = 0$ . В таком случае у векторного уравнения (5) остаётся только одна нетривиальная компонента:

$$\frac{\partial^2 F_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 F_\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial F_\varphi}{\partial r} \left( \frac{1}{\rho_e} \frac{\partial \rho_e}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) + \frac{\partial F_\varphi}{\partial z} \frac{1}{\rho_e} \frac{\partial \rho_e}{\partial z} + F_\varphi \left( \frac{1}{r \rho_e} \frac{\partial \rho_e}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \right) = 0. \quad (6)$$

Сделаем замену переменной  $G = rF_\varphi$ , тогда

$$\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} + \frac{\partial G}{\partial r} \frac{\partial \ln(\rho_e/r)}{\partial r} + \frac{\partial G}{\partial z} \frac{\partial \ln(\rho_e/r)}{\partial z} = 0. \quad (7)$$

Новая переменная  $G(r, z)$  определяет ток внутри кольца заданного радиуса  $r$  и высоты  $z$ .

В качестве новой функции, описывающей внешние для задачи данные, удобно взять  $\Phi = \ln(\rho_e/r)$ . Тогда для  $\nabla$  — оператора дифференцирования в ортогональной системе координат  $(r, z)$  — можно записать исходную задачу (2) в виде

$$\nabla^2 G + \nabla G \nabla \Phi = 0. \quad (8)$$

Плотность тока можно восстановить по формуле

$$\mathbf{j} = (j_r, 0, j_z) = \left( -\frac{\partial F_\varphi}{\partial z}, 0, \frac{1}{r} \frac{\partial (rF_\varphi)}{\partial r} \right) = \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial z}, 0, \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial r} \right).$$

Ускорение расплава определяется по формуле

$$g_\varphi = j_r B_z / \rho_1, \quad (9)$$

где  $\rho_1 = 1,6 \cdot 10^4$  кг/м<sup>3</sup> — плотность расплава и магнитное поле  $B_z = 0,3$  Тл известно из экспериментальных данных.

Граничные условия являются определяющей характеристикой для задачи, так как рассматриваемая область не содержит источников тока на этапе моделирования тока пучка без учёта термоэмиссии. Решение задачи зависит только от граничных условий для тока и температуры в образце.

Важно верно определить ток на границе, нагреваемой импульсным воздействием. Пучок электронов падает на поверхность, не только её заряжая, но и повышая температуру поверхности, отдавая энергию электронов. В натурном эксперименте измеряется ток, генерируемый в диоде. Часть электронов отражается от мишени, поэтому, основываясь на анализе натуральных экспериментов, можно полагать, что ток на поверхности равен половине тока пучка.

На оси симметрии надо поставить условие Дирихле:

$$G|_{(0,z)} = 0, \quad (10)$$

т. е. азимутальная компонента потенциала на оси нулевая, так как на оси нет особенности тока. В случае ненулевой проводимости в образце плотность тока ограничена, так как электрическое поле не может быть бесконечным. Известно, что в проводниках электрическое поле мало. Можно заметить, что выражение (10) является прямым следствием определения  $G(r, z)$  как тока внутри кольца для случая кольца нулевого радиуса. Так как через дальнюю стенку  $(r, z_{\max})$  от поверхности нагрева не протекает ток, то выполняется условие

$$j_z|_{(r,z_{\max})} = \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial r} \Big|_{(r,z_{\max})} = 0. \quad (11)$$

Это означает, что потенциал постоянен по радиусу по всей дальней стенке. С учётом того, что на оси потенциал равен нулю (10), на всей дальней стенке согласно (10) можно поставить граничное условие Дирихле:

$$G|_{(r,z_{\max})} = 0. \quad (12)$$

Граничное условие точно описывает процесс, натурный эксперимент и результаты математического моделирования [2] показали, что разогрев пластинки происходит на глубину не более 0,5 мм при толщине пластинки более 3 мм. Ввиду того, что на нагреваемой поверхности ток считается заданным:  $j_z|_{(r,0)} = \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial r}|_{(r,0)} = j_0(r)$ , то на границе  $(r, 0)$  задаётся граничное условие вида

$$G|_{(r,0)} = \int_0^r r' j_0(r') dr'.$$

По условиям задачи ток по радиусу пластинки имеет гауссово распределение и

$$G|_{(r,0)} = j_g a^2 (1 - \exp(-r^2/a^2)), \quad (13)$$

где  $j_g$  — величина плотности тока в центре пучка,  $a^2$  — «ширина гаусса», известные для каждого выстрела в эксперименте.

Так как в силу равномерности потока  $\frac{\partial j_r}{\partial z} = 0$ , то граничные условия на краях пластинки имеют вид

$$\frac{\partial G}{\partial r}|_{(r_{\max},z)} = 0. \quad (14)$$

Итоговая система уравнений, состоящая из уравнения (8) и граничных условий (10), (12)–(14), имеет вид

$$\begin{aligned} \nabla^2 G + \nabla G \nabla \Phi &= 0, \quad \Phi = \ln(\rho_e/r), \\ G|_{(0,z)} &= 0, \quad \frac{\partial G}{\partial r}|_{(r_{\max},z)} = 0, \\ G|_{(r,z_{\max})} &= 0, \quad G|_{(r,0)} = j_g a^2 (1 - \exp(-r^2/a^2)). \end{aligned} \quad (15)$$

Для получения уравнения в безразмерном виде использованы характерные величины (табл. 2).

Таблица 2

Параметр	Характерное значение	Единицы измерения
$r_0$	1	мм
$j_0$	$10^{-1}$	А/мм <sup>2</sup>
$F_{\varphi 0}$	$10^3$	А/мм
$G_0$	$10^3$	А
$g_{\varphi 0}$	$10^8$	м/с <sup>2</sup>
$\rho_{\varphi 0}$	$10^{-2}$	1/(Ом·мм)
$a_0^2$	$10^2$	мм <sup>2</sup>

## 2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

В двумерной области

$$\{(r, z) \mid r \in [r_0, r_{\max}], z \in [z_0, z_{\max}], r_0 = z_0 = 0, r_{\max} = 12 \text{ мм}, z_0 = 3 \text{ мм}\}$$

введена равномерная прямоугольная сетка с узлами  $(i, k)$ ,  $i = 1 \dots N_r$ ,  $k = 1 \dots N_z$ . Уравнение (1) реализовано с использованием схемы стабилизирующей поправки и метода прогонки [10]. Метод решения (1) подробно описан в работах [3, 5]. Для решения полной системы уравнений Максвелла в многомерном случае известны [11, 12] численные методы решения задач электродинамики с учётом нелинейных эффектов, приводящих к значительному изменению характеристик электромагнитного поля. Решение уравнения (15) методом верхней релаксации [13, 14] на каждом шаге по времени позволяет построить экономичный алгоритм при параметре релаксации  $\omega = 2 - O(h)$  [15]:

$$\begin{aligned} \Phi_{i,k} &= \ln(\rho_e(T_{i,k})/r), \quad i = 1 \dots N_r, \quad k = 1 \dots N_z, \\ ar_{ik} &= \frac{h}{2}(\Phi_{i+1,k} - \Phi_{i-1,k}), \quad az_{i,k} = \frac{h}{2}(\Phi_{i,k+1} - \Phi_{i,k-1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{i,k}^{m+1} &= (1 - \omega)G_{i,k}^m + \frac{\omega}{4} \left[ G_{i-1,k}^{m+1}(1 - ar_{i,k}) + G_{i,k-1}^{m+1}(1 - az_{i,k}) + G_{i+1,k}^m(1 - ar_{i,k}) \right. \\ &\quad \left. + G_{i,k+1}^m(1 - az_{i,k}) \right], \quad i = 2 \dots N_r - 1, \quad k = 2 \dots N_z - 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{1,k} &= 0, \quad G_{N_r,k} = (4G_{N_r-1,k} - G_{N_r-1,k})/3, \\ G_{i,N_z} &= 0, \quad G_{i,1} = j_g a^2 (1 - \exp[-((i-1/2)h/a)^2]). \end{aligned}$$

Наряду с другими преимуществами метод верхней релаксации интересен удобством использования в цилиндрических координатах. Принцип выражения искомого элемента через соседние по схеме точек вида «крест» универсально и не зависит от выбора системы координат. Можно заметить, что уравнение (7) и алгоритм решения содержат деление на радиус только в аргументе функции логарифма в расчёте коэффициента  $\Phi_{i,k}$ . Так как функция логарифма при росте аргумента возрастает довольно медленно, то деление на величины порядка  $h/2$  при расчётах в окрестности оси симметрии не приводит к возникновению особенностей решения.

Для получения ускорения расплава как окончательного результата работы необходимо плотность тока восстановить по формуле

$$\mathbf{j} = (j_r, 0, j_z) = \left( -\frac{\partial F}{\partial z}, 0, \frac{1}{r} \frac{\partial r F}{\partial r} \right) = \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial z}, 0, \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial r} \right).$$

Эти соотношения можно аппроксимировать со вторым порядком точности:

$$\begin{aligned} (j_r)_{i,k}^n &= -\frac{1}{r_i} \frac{G_{i,k+1}^n - G_{i,k-1}^n}{2h}, \quad i = 1 \dots N_r, \quad k = 2 \dots N_z - 1, \\ (j_r)_{i,1}^n &= \frac{1}{r_i} \frac{G_{i,3}^n - 4G_{i,2}^n + 3G_{i,1}^n}{2h}, \quad (j_r)_{i,N_z}^n = \frac{1}{r_i} \frac{G_{i,N_z-2}^n - 4G_{i,N_z-1}^n + 3G_{i,N_z-1}^n}{2h}, \\ (j_z)_{i,k}^n &= \frac{1}{r_i} \frac{G_{i+1,k}^n - G_{i-1,k}^n}{2h}, \quad i = 2 \dots N_r - 1, \quad k = 1 \dots N_z, \\ (j_z)_{1,k}^n &= \frac{G_{3,k}^n - 4G_{2,k}^n + 3G_{1,k}^n}{h^2}, \quad (j_z)_{N_r,k}^n = \frac{G_{N_r-2,k}^n - 4G_{N_r,k}^n + 3G_{N_r-1,k}^n}{2(N_r - 1/2)h^2}. \end{aligned}$$

Ускорение расплава находятся из соотношения  $(g_\varphi)_{i,k}^n = (j_r)_{i,k}^n B_z / \rho_1$ .

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Моделируется эксперимент, который состоит в воздействии электронным пучком высокой мощности плотности на пластинку вольфрама в течение 150 мкс. Электроны приносят на поверхность пластинки заряд и энергию, которая уходит на нагрев материала. Диффузия тепла с поверхности в глубину образца рассчитывается с использованием начально-краевой задачи (1). Полученное распределение температуры служит основой для расчёта коэффициентов уравнения (15). Полученный потенциал тока используется для определения тока и ускорения вращения расплава. Для иллюстрации рассмотрен расчёт для выстрела № 684, который является характерным для моделируемой серии экспериментов. Рассматриваемая серия экспериментов отличается длительностью воздействия и в результате высокой температурой разогрева образца вольфрама.

Согласно рассчитанному распределению температуры на поверхности образца в момент времени 150 мкс (рис. 2, а) получено распределение электрического сопротивления (рис. 2, б) для выстрела № 684. Нарушения гладкости графика температуры на поверхности обусловлены влиянием нелинейных коэффициентов (1) и соответствуют температурам, измеряемым в ходе экспериментов [2]. Наибольшее влияние на вид решения оказывает коэффициент теплопроводности  $\lambda(T)$ , который входит в диффузионный член уравнения (1) и в краевое условие на нагреваемой поверхности. Температура и электрическое сопротивление имеют наибольшие значения на нагреваемой поверхности. Вглубь пластинка за столь короткое время прогревается не более, чем на 1 мм.

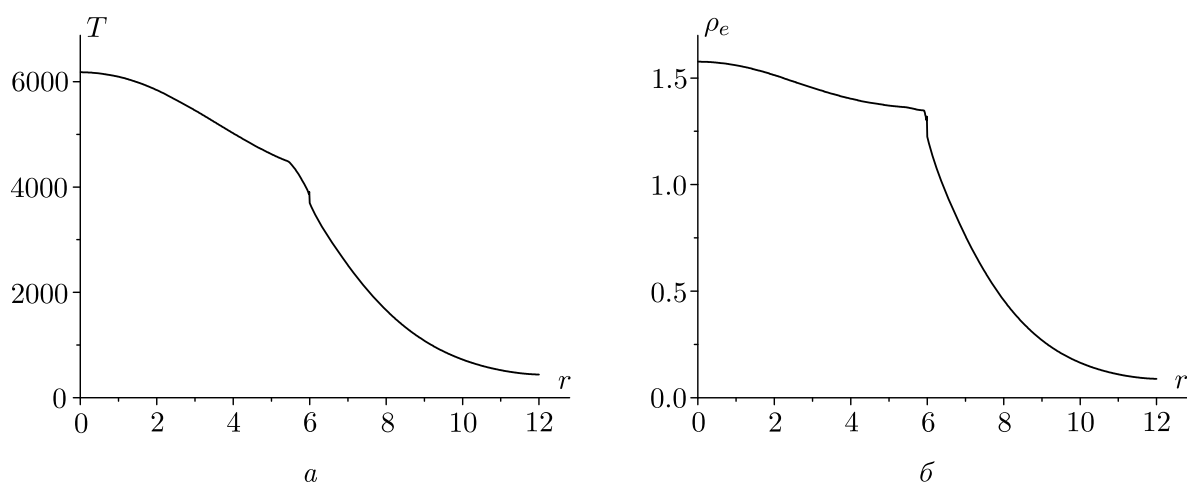


Рис. 2. Распределение температуры  $T$  (К) (а) и электрического сопротивления  $\rho_e$  (1/Ом·мм) (б) на нагреваемой поверхности в момент времени  $t = 150$  мкс для выстрела № 684

Характер графика электрического сопротивления обусловлен различными зависимостями от температуры для расплава и твёрдой фазы вещества. Перепад электрического сопротивления порождает радиальную и осевую компоненты тока (рис. 3). При температуре около 6200 К ток принимает значения не более  $0,6$  А/мм<sup>2</sup>.

В результате расчётов на основе распределения тока  $G$  (рис. 4, а) получено ускорение расплава не более  $3,4$  м/с<sup>2</sup> (см. рис. 4, б). Это результат согласуется с оценкой  $j_0 B_z / \rho^*(T)$ . Ускорение вычисляется в соответствии с законом Ампера (9). Известно, что для инициирования наблюдаемого в эксперименте вращения расплава необходимо ускорение не менее  $1000$  м/с<sup>2</sup> [16]. Результаты проведённого моделирования показывают, что для получения ускорения, способного инициировать вращение расплава, нужно учесть альтернативные механизмы создания тока в системе с учётом испарений вольфрама над пластинкой. Дальнейшее развитие модели



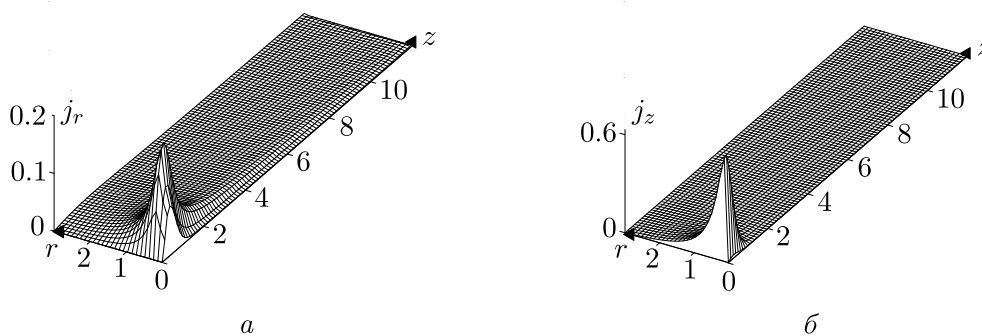


Рис. 3. Распределение радиальной  $j_r$  (А/мм<sup>2</sup>) (а) и осевой компоненты тока  $j_z$  (А/мм<sup>2</sup>) (б) на поперечном срезе пластинки в момент времени  $t = 150$  мкс для выстрела № 684

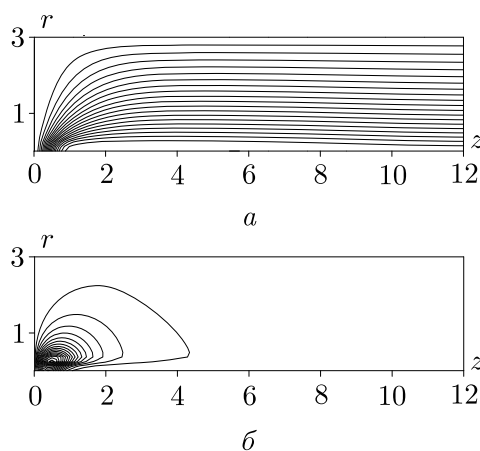


Рис. 4. Изолинии тока  $G$  (а) и ускорения (б) на поперечном срезе пластинки в момент времени  $t = 150$  мкс для выстрела № 684

предполагает расчёт температуры паров вольфрама для определения электрических параметров в газе и пластинке и исследовании альтернативных механизмов создания тока. После чего аналог задачи (14) с новыми правой частью и граничными условиями можно будет решить во всей области, занятой веществом (газом, расплавом и твёрдой фазой).

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено моделирование нагрева вольфрама, основанное на решении уравнений электродинамики и двухфазной задачи Стефана для расчёта температуры в области образца в цилиндрической системе координат. Рассмотрен частный случай аксиальной симметрии без учёта электродвижущих сил. Ток рассматривается как возможный источник вращения вещества, который наблюдается в эксперименте. В результате расчётов получено ускорение расплава не более  $3,5 \text{ м/с}^2$ , что согласуется с оценкой  $j_0 B_z / \rho^*(T)$ , но существенно ниже ускорения, необходимого для инициирования наблюдаемого в эксперименте вращения расплава. Результаты проведённого моделирования показывают, что для получения ускорения, способного инициировать вращение расплава, нужно учесть другие механизмы создания тока в системе с учётом испарений вольфрама над пластинкой. Дальнейшее развитие модели предполагает включение расчёта электродвижущей силы в газе и расплаве.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Vyacheslavov L., Arakcheev A., Burdakov A., Kandaurov I., Kasatov A., Kurkuchekov V., Mekler K., Popov V., Shoshin A., Skovorodin D., Trunев Y., Vasilyev A. Novel electron beam based test facility for

- observation of dynamics of tungsten erosion under intense ELM-like heat loads // AIP Conf. Proc. 2016. V. 1771, N 060004.
2. Arakcheev A. S., Apushkinskaya D. E., Kandaurov I. V., Kasatov A. A., Kurkuchekov V. V., Lazareva G. G., Maksimova A. G., Popov V. A., Snytnikov A. V., Trunev Yu. A., Vasilyev A. A., Vyacheslavov L. N. Two-dimensional numerical simulation of tungsten melting under pulsed electron beam // Fusion Engineering and Design. 2018. V. 132. P. 13–17.
  3. Lazareva G. G., Arakcheev A. S., Vasilyev A. A., Maksimova A. G. Numerical simulation of tungsten melting under fusion reactor-relevant high-power pulsed heating // Smart Innovation, Systems and Technologies. 2019. V. 133. P. 41–51.
  4. Lazareva G. G., Arakcheev A. S., Burdakov A. V., Kandaurov I. V., Kasatov A. A., Kurkuchekov V. V., Maksimova A. G., Popov V. A., Shoshin A. A., Snytnikov A. V., Trunev Yu. A., Vasilyev A. A., Vyacheslavov L. N. Numerical model of high-power transient heating of tungsten with considering of various erosion effects // J. Phys.: Conf. Series. 2018. V. 1103, N 012001.
  5. Lazareva G. G., Arakcheev A. S., Kandaurov I. V., Kasatov A. A., Kurkuchekov V. V., Maksimova A. G., Popov V. A., Snytnikov A. V., Trunev Yu. A., Vasilyev A. A., Vyacheslavov L. N. Computational experiment for solution of the Stefan problem with nonlinear coefficients // AIP Conf. Proc. 2018. V. 2025, N 080005.
  6. Tolias P. Analytical expressions for thermophysical properties of solid and liquid tungsten relevant for fusion applications // Nuclear Materials and Energy. 2017. V. 13. P. 42–57.
  7. Джексон Дж. Классическая электродинамика. М.: Мир, 1965.
  8. Бухгольц Г. Расчёт электрических и магнитных полей. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.
  9. Смайт В. Электростатика и электродинамика. М.: Изд-во иностр. лит., 1954.
  10. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.
  11. Загонов В. П. Математическое моделирование электромагнитного воздействия импульсных полей на сложные технические системы // Функционирование и развитие сложных народнохозяйственных, технических, энергетических, транспортных систем, систем связи и коммуникаций. М.: Знание, 1998. С. 392–394.
  12. Жуковский М. Е. Самосогласованная квазитрёхмерная модель радиационного возбуждения электромагнитных полей // Мат. моделирование. 1996. Т. 8, № 4. С. 3–20.
  13. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Физматгиз, 1978.
  14. Ильин В. П. Численные методы решения задач электрофизики. М.: Наука, 1985.
  15. Стронгин Р. Г., Гергель В. П., Гришагин В. А., Баркалов К. А. Параллельные вычисления в задачах глобальной оптимизации. М.: Изд-во МГУ, 2013.
  16. Vasilyev A. A., Arakcheev A. S., Bataev I. A., Bataev V. A., Burdakov A. V., Kandaurov I. V., Kasatov A. A., Kurkuchekov V. V., Mekler K. I., Popov V. A., Shoshin A. A., Skovorodin D. I., Trunev Yu. A., Vyacheslavov L. N. Observation of the tungsten surface damage under ITER-relevant transient heat loads during and after electron beam pulse // AIP Conf. Proc. 2016. V. 1771, N 060013.

UDC 519.63

**MATHEMATICAL SIMULATION OF THE DISTRIBUTION  
OF THE ELECTRON BEAM CURRENT DURING PULSED HEATING  
OF A METAL TARGET**

© 2021 G. G. Lazareva<sup>1,2a</sup>, V. A. Popov<sup>2b</sup>, A. S. Arakcheev<sup>3,4c</sup>,  
A. V. Burdakov<sup>3,4d</sup>, I. V. Schwab<sup>2,5e</sup>, V. L. Vaskevich<sup>2,6f</sup>, A. G. Maksimova<sup>2g</sup>,  
N. E. Ivashin<sup>2h</sup>, I. P. Oksogoeva<sup>1i</sup>

<sup>1</sup>*People's Friendship University of Russia,*

*ul. Miklukho-Maklaya 6, Moscow 117198, Russia,*

<sup>2</sup>*Novosibirsk State University, ul. Pirogova 1, Novosibirsk 630090, Russia,*

<sup>3</sup>*Novosibirsk State Technical University,*

*pr. Karla Marksa, 20, korp. 1, Novosibirsk 630073, Russia,*

<sup>4</sup>*Budker Institute of Nuclear Physics SB RAS,*

*pr. Akad. Lavrentyeva 11, Novosibirsk 630090, Russia,*

<sup>5</sup>*Federal Research Center for Information and Computational Technologies,*

*pr. Akad. Lavrentyeva 6, Novosibirsk 630090, Russia,*

<sup>6</sup>*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,*

*pr. Acad. Koptiyuga 4, Novosibirsk 630090, Russia*

E-mails: <sup>a</sup>lazareva-gg@rudn.ru, <sup>b</sup>v.a.popov94@gmail.com, <sup>c</sup>asarakcheev@gmail.com,  
<sup>d</sup>a.v.burdakov@mail.ru, <sup>e</sup>schwab\_irina@mail.ru, <sup>f</sup>vask@math.nsc.ru,  
<sup>g</sup>maksimova@oapmg.sccc.ru, <sup>h</sup>n.ivashin@yandex.ru, <sup>i</sup>oksogi@mail.ru

Received 16.02.2021, revised 28.02.2021, accepted 15.04.2021

**Abstract.** We study a model of the current distribution during heating of the surface of a tungsten sample under pulsed exposure to an electron beam. The model is based on solving the equations of electrodynamics and the two-phase Stefan problem for calculating the temperature in the sample region using a cylindrical coordinate system. The model parameters were taken from experiments at the “Beam of Electrons for materials Test Applications” (BETA) stand created at the Budker Institute of Nuclear Physics. A particular case of axial symmetry is considered without taking the electromotive forces into account. The current is considered as a possible source of rotation of the substance which is observed in the experiment. The values of the current and the acceleration of matter at a surface temperature of over 6000 K were obtained. The results of the performed simulation show that, to obtain an acceleration capable of initiating the experimentally observed rotation of the melt, it is necessary to take into account some alternative mechanisms of creating a current in the system with consideration of the evaporation of tungsten above the plate.

**Keywords:** mathematical simulation, potential of current, distribution of electron beam current, rotation of tungsten melt, method of upper relaxation.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.207

## REFERENCES

1. Vyacheslavov L., Arakcheev A., Burdakov A., Kandaurov I., Kasatov A., Kurkuchekov V., Mekler K., Popov V., Shoshin A., Skovorodin D., Trunev Y., Vasilyev A. Novel electron beam based test facility for observation of dynamics of tungsten erosion under intense ELM-like heat loads. *AIP Conf. Proc.*, 2016, Vol. 1771, No. 060004.
2. Arakcheev A.S., Apushkinskaya D.E., Kandaurov I.V., Kasatov A.A., Kurkuchekov V. V., Lazareva G. G., Maksimova A. G., Popov V. A., Snytnikov A. V., Trunev Yu. A., Vasilyev A. A., Vyacheslavov L. N. Two-dimensional numerical simulation of tungsten melting under pulsed electron beam. *Fusion Engineering and Design*, 2018, Vol. 132, pp. 13–17.
3. Lazareva G.G., Arakcheev A.S., Vasilyev A.A., Maksimova A.G. Numerical simulation of tungsten melting under fusion reactor-relevant high-power pulsed heating. *Smart Innovation, Systems and Technologies*, 2019, Vol. 133, pp. 41–51.
4. Lazareva G.G., Arakcheev A.S., Burdakov A.V., Kandaurov I.V., Kasatov A.A., Kurkuchekov V.V., Maksimova A.G., Popov V.A., Shoshin A.A., Snytnikov A.V., Trunev Yu.A., Vasilyev A.A., Vyacheslavov L.N. Numerical model of high-power transient heating of tungsten with considering of various erosion effects. *J. Phys.: Conf. Series*, 2018, Vol. 1103, No. 012001.
5. Lazareva G.G., Arakcheev A.S., Kandaurov I.V., Kasatov A.A., Kurkuchekov V.V., Maksimova A.G., Popov V.A., Snytnikov A.V., Trunev Yu.A., Vasilyev A.A., Vyacheslavov L.N. Computational experiment for solution of the Stefan problem with nonlinear coefficients. *AIP Conf. Proc.*, 2018, Vol. 2025, No. 080005.
6. Tolias P. Analytical expressions for thermophysical properties of solid and liquid tungsten relevant for fusion applications. *Nuclear Materials and Energy*, 2017, Vol. 13, pp. 42–57.
7. Dzhekson Dzh. Classical Electrodynamics. N. Y.: Wiley, 1998.
8. Bukhgoľts G. Calculation of electric and magnetic fields. Moscow: Izd. Inostr. Literatury, 1961 (in Russian).
9. Smit V. Static and Dynamic Electricity. Ann Arbor: Edwards Brothers, 1936.
10. Yanenko N.N. Subincremental Method for Solution of Multidimensional Problems of Mathematical Physics. Novosibirsk: Nauka, 1967 (in Russian).
11. Zagonov V.P. Mathematical modeling of the electromagnetic effect of pulsed fields to complex technical systems. *Functioning and Development of Complex National Economic, Technical, Energy, Transport Systems, Communication Systems, and Communications*. Moscow: Znanie, 1998, pp. 392–394 (in Russian).
12. Zhukovskii M.E. Self-consistent quasi-3d model of radiation excitation of electromagnetic fields. *Mat. Modelir.*, 1996, Vol. 8, No. 4, pp. 3–20.
13. Samarskii A.A., Nikolaev E.S. Methods of solution of grid equations. Moscow: Fizmatgiz, 1978 (in Russian).
14. Il'in V.P. Numerical methods for solution of the electrophysics problems. Moscow: Nauka, 1985 (in Russian).
15. Strongin R.G., Gergel' V.P., Grishagin V.A., Barkalov K.A. Parallel computing in problems of global optimization. Moscow: Izd. Moskov. Gos. Univ., 2013 (in Russian).
16. Vasilyev A.A., Arakcheev A.S., Bataev I.A., Bataev V.A., Burdakov A.V., Kandaurov I.V., Kasatov A.A., Kurkuchekov V.V., Mekler K.I., Popov V.A., Shoshin A.A., Skovorodin D.I., Trunev Yu.A., Vyacheslavov L.N. Observation of the tungsten surface damage under ITER-relevant transient heat loads during and after electron beam pulse. *AIP Conf. Proc.*, 2016, Vol. 1771, No. 060013.