

УДК 519.8

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СПОСОБ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КВОТ ВРЕДНЫХ ВЫБРОСОВ МЕЖДУ ИХ ИСТОЧНИКАМИ В МЕГАПОЛИСЕ

© 2021 Л. С. Маергойз

*Федеральный исследовательский центр
Красноярский научный центр СО РАН (ФИЦ КНЦ СО РАН)
Институт леса им. В. Н. Сукачева СО РАН,
Академгородок, 50, Красноярск 660036, Россия*

E-mail: bear.lion@mail.ru

Поступила в редакцию 15.06.2020 г.; после доработки 17.03.2021 г.;
принята к публикации 15.04.2021 г.

В связи с актуальной проблемой создания комфортного состояния атмосферы в городской среде представлен математический алгоритм распределения квот выбросов вредных веществ между их источниками в мегаполисе. Его конструкция опирается на недавно разработанный способ оптимального распределения ограниченного ресурса между группами людей, находящимися в дифференцируемых условиях.

Ключевые слова: математический алгоритм, экстремальная задача, принципы распределения.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.208

Применение математических методов для решения экологических проблем — нередкое явление в научной и инженерной практике. Например, в работах [1, 2] эти методы использовались для исследования вопросов эффективного замещения традиционных ископаемых видов топлива местными возобновляемыми экологически более чистыми источниками энергии.

Данная работа примыкает к статье [3] (см. также [4, гл. 5]), где рассматривался математический алгоритм распределения квот выбросов парниковых газов между различными странами — эмитентами газов с целью достижения соглашения о сокращении объёмов их выбросов. Распределение квот выбросов вредных веществ между их источниками в мегаполисе имеет свою специфику. Предлагается модифицированный алгоритм их оптимального распределения. В его основе лежит решение экстремальной задачи с указанием условий не только его существования (как это было в [3]), но и единственности. Конструкция алгоритма опирается на способ оптимального распределения ограниченного ресурса между его потребителями, находящимися в дифференцируемых условиях [4, гл. 1; 5].

1. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ПРОБЛЕМЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КВОТ ВЫБРОСОВ ВРЕДНЫХ ВЕЩЕСТВ В ГОРОДСКОЙ СРЕДЕ

Формирование качественной экологической среды в городах, особенно в городах с достаточно большим населением — мегаполисах, одна из актуальных проблем современного общества. Обычно городские органы надзора используют экономические санкции при нарушении норм экологической ситуации участниками хозяйственной деятельности (см., например, [6]). Но этих мер явно недостаточно для сохранения комфортной экологической обстановки в городах.

В каждом достаточно большом городе имеются источники выбросов вредных для здоровья жителей газов (заводы, ТЭЦ, котельные и т. п.). Оставляя в стороне вопросы о принятии мер для уменьшения объёма выбросов этих газов на каждом источнике, выполнение которых требует принятия сложных технологических решений, остановимся на проблеме оптимального управления режимом действия этих источников с целью создания более комфортного состояния атмосферы в городской среде. Основные факторы, которые при этом будем учитывать — степень вредности выбросов газов любого источника и либо площадь его «санитарной зоны», либо количество проживающих в ней жителей. Последний фактор является более предпочтительным, если плотности населения зон существенно отличаются друг от друга.

Вблизи каждого источника загрязнений атмосферы города расположены жилые микрорайоны, образующие зону наибольшего риска для здоровья, причиняемого вредными выбросами этого источника. *Его санитарной зоной контроля* (в дальнейшем для простоты изложения используем более короткое название «зона источника») назовём максимально возможную часть микрорайонов из упомянутой зоны риска с относительно однородным составом воздуха, в которой состояние атмосферы подвержено минимальному влиянию других источников загрязнения. Состав воздуха в зоне источника является индикатором его влияния на атмосферу городской среды. Он зависит от мощности источника и прочих факторов, в частности от погодных условий в этой зоне. В различных районах мегаполиса эти условия могут отличаться друг от друга. Излагаемый алгоритм предполагает наличие непересекающихся зон источников, которые считаются заданными априори.

В различных местах города обычно устанавливают контрольные приборы для измерения того или иного вредного для здоровья ингредиента выбросов. Это может быть, например, количество веществ в весовых единицах в единице объёма воздуха (масса «пыли») или концентрация вредного для здоровья газа (фтор, диоксид серы и т. п.). В каждом городе определяются ПДУ (предельно допустимые уровни) значений этих показателей. Совокупный объём (или вес) V выбросов в единицу времени в атмосферу части города, где расположены все зоны источников, выбросы которых содержат исходный вредный ингредиент, назовём *допустимым (предельно допустимым)*, если таким же является уровень значения этой компоненты выбросов в единице объёма воздуха городской среды (т. е. допустимым, соответственно предельно допустимым). Такой подход к определению ДУ и ПДУ выбросов объясняется тем, что зоны источников представляют собой «ворота», через которые их выбросы попадают в атмосферу города. Предлагаемый алгоритм даёт математический способ распределения упомянутого объёма V вредных выбросов между источниками (разбиение на «квоты») с целью создания более комфортного состояния атмосферы в мегаполисе. При этом не используется какая-либо зависимость квот от мощности соответствующих источников.

Для контроля за влиянием источников используют и приземной материал, например массу снега, выпавшего за сезон на единицу площади. В частности, в [7] на базе анализа состава пыли, накопившейся в снежном покрове за сезон, построены карты загрязнения г. Красноярска алюминием.

Объект исследования — группа источников загрязнения, в состав выбросов каждого из которых входит одна и та же вредная для здоровья человека компонента, но с различным уровнем содержания. Цель рассматриваемой задачи управления режимом действия источников упомянутой группы: найти математический подход к нахождению ПДУ количества выбросов за единицу времени для каждого источника группы по заданному совокупному значению ПДУ количества выбросов за тот же период времени для всех источников этой группы.

Квотой вредных выбросов источника назовём количество этих выбросов (в весовых или объёмных единицах), попадающих в его зону за единицу времени (например, сутки). В общем случае это переменная величина, значение которой зависит от режима работы источника (он может работать не на полную мощность), от погодных условий и прочих факторов. Задача управления режимом работы этих источников сводится к задаче распределения квот выбросов

между ними. При её решении будем исходить из принципа: чем «вреднее» выбросы источника, тем должна быть меньше их плотность либо на душу населения зоны источника, либо на единицу площади этой зоны (наличие рейтинга источников).

Как и в [3], остановимся сначала на математическом способе распределения квот вредных выбросов между источниками, демонстрирующем любой возможный способ их распределения.

Для простоты изложения предположим, что в упомянутую группу источников входят все источники, расположенные в городе. Введём обозначения: $N > 2$ — число этих источников вредных выбросов; V — предельно допустимое количество их выбросов за единицу времени в атмосферу части города, где расположены все зоны источников (V является индикатором влияния этих источников на атмосферу городской среды).

Математический подход к распределению квот означает разбиение на сумму величины

$$V = \sum_{k=1}^N V_k, \quad (1)$$

где V_k — количество выбросов для источника с номером k , попадающих в его зону за ту же единицу времени.

Пусть S_k — количество жителей, проживающих в зоне источника с номером k , где $k = 1, 2, \dots, N$;

$$S = \sum_{k=1}^N S_k \quad (2)$$

— общее количество населения всех зон источников. Введём обозначения

$$c = V/S, \quad c_k = V_k/S_k, \quad (3)$$

здесь c — среднее количество (плотность) выбросов на душу населения всех зон, c_k — плотность выбросов для зоны с номером k , где $k = 1, 2, \dots, N$. Для дальнейшего изложения удобно использовать (см. (1)–(3)) безразмерные величины (безразмерные плотности выбросов на душу населения для всех зон):

$$\lambda_k = c_k/c, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (4)$$

Множество их допустимых значений определяется соотношением (см. (2), [3])

$$\sum_{k=1}^N \lambda_k s_k = 1, \quad (5)$$

где $s_k = S_k/S$ — доля населения в зоне с номером k , причём $\sum_{k=1}^N s_k = 1$. В предыдущих обозначениях справедлива формула (см. [3])

$$V_k = c\lambda_k S_k = \lambda_k s_k V, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (6)$$

при любом способе распределения квот вредных выбросов.

2. АЛГОРИТМ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КВОТ ВРЕДНЫХ ВЫБРОСОВ МЕЖДУ ИСТОЧНИКАМИ

Перейдём теперь к описанию алгоритма оптимального распределения квот выбросов, демонстрирующего возможный способ минимизации объёма наиболее вредных веществ в атмосфере города.

Охарактеризуем основные свойства этого алгоритма. Напоминаем (см. разд. 1), что в состав выбросов рассматриваемых источники загрязнения входит одна и та же вредная для здоровья человека компонента (вредная примесь), но с различным уровнем содержания (например, «пыль» или концентрация некоторого вредного для здоровья газа).

Для описания алгоритма оптимального распределения квот выбросов между источниками предлагается руководствоваться следующими принципами, введёнными в [4, гл. 1; 5].

1. Принцип пропорциональности внутри однородной группы. Если имеются источники с приблизительно одинаковым уровнем содержания вредных примесей в выбросах, то их можно объединить в одну группу. Распределение квот выбросов между ними происходит пропорционально количеству населения в зоне каждого источника группы.

Как отмечалось в разд. 1, алгоритм предполагает наличие рейтинга вредности выбросов источников в направлении уменьшения вредности для здоровья жителей их состава (см. (3)). Это означает, что чем вреднее состав выбросов источника в единицу времени, тем меньше должна быть их плотность на душу населения зоны этого источника:

$$0 < c_1 < c_2 < \dots < c_N. \quad (7)$$

С этой системой неравенств ассоциируется и нумерация источников, в частности номер 1 у источника с наиболее вредным для здоровья содержанием выбросов, а номер N у источника с наиболее комфортным их содержанием. Из (7) в обозначениях формулы (4) находим

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N. \quad (8)$$

В [3] рассматривался усложнённый вариант этой системы неравенств.

Неравенства вида (7), (8) возникали и при описании математического алгоритма распределения квот выбросов парниковых газов между различными странами [3; 4, гл. 5], но при наличии рейтинга совсем иного содержания.

2. Принцип минимизации квадратичного функционала, зависящего от разностей плотностей выбросов на душу населения в зонах смежных по рейтингу источников. Квадратичный функционал — модификация среднеквадратичного функционала, широко применяемого в прикладной математике.

Исходя из этого принципа рассмотрим целевой функционал

$$\Phi(\lambda) = \sum_{k=1}^{N-1} (\lambda_{k+1} - \lambda_k)^2 = \sum_{i=1}^{N-1} c^{-2} (c_{k+1} - c_k)^2, \quad (9)$$

зависящий от безразмерных плотностей выбросов на единицу площади для всех зон (см. (3), (4), (7), (8)). Использование принципа минимизации этого функционала позволит свести к минимуму возможную неудовлетворённость жителей зон смежных по рейтингу источников. Как и в [5], такой подход к выбору значений $\{\lambda_k\}$ согласуется с принципом «чтобы не было обидно соседу».

Минимум функционала Φ (см. (9)) при условии (5) равен нулю и достигается при $\lambda_k = 1$, $k = 1, 2, \dots, N$, т. е. распределение квот выбросов между источниками происходит пропорционально населению их санитарных зон. Это неприемлемо при наличии рейтинга между источниками (см. (7), (8)). Чтобы этого избежать, для оптимизации параметров математической модели распределения выбросов при условии (8) вводится

3. Принцип управления. Это линейное соотношение между плотностями выбросов источников на душу населения в их зонах, удовлетворяющее условию совместности с уравнением (5), но не дублирующее его (см. [4, гл. 1; 5]). Например, это может быть (см. (7), (8)) отношение плотности выбросов наиболее неблагоприятного источника к плотности выбросов источника с самым комфортным их содержанием, выражаемое с помощью равенства

$$\lambda_1/\lambda_N = c_1/c_N = \gamma. \quad (10)$$

Здесь γ — фиксированное число из интервала $(0, 1)$, имеющее явно выраженный медицинский смысл: его обратная величина $1/\gamma$ показывает степень «комфортности» плотности выбросов источника с номером N по отношению к аналогичному параметру источника с номером 1. В конкретном городе это число может быть предложено специалистами после анализа содержания выбросов, источники которых расположены в этом городе.

Оптимальный выбор значений безразмерных плотностей выбросов для всех источников определяется с помощью решения следующей экстремальной задачи (см. задачу А в [4, гл. 1; 5]).

Задача. Найти значения параметров $\lambda_k = \lambda_k^*$, $k = 1, \dots, N$, при которых достигается минимум функционала Φ (см. (9)), если выполняются соотношения (5), (8) и дополнительное равенство (10).

Утверждение. Пусть в обозначениях формулы (5)

$$P_j = \sum_{k=j+1}^N s_k, \quad Q_j = \sum_{k=1}^j s_k, \quad j = 1, \dots, N-1; \quad \|X\|^2 = \sum_{k=1}^N X_k.$$

Тогда следующие равенства дают единственное решение задачи:

$$\lambda_1^* = \gamma \sum_{j=1}^{N-1} \frac{K_j}{\|K\|^2}; \quad \lambda_j^* = \lambda_{j-1}^* + (1 - \gamma) \frac{K_{j-1}}{\|K\|^2}, \quad j = 2, \dots, N, \quad (11)$$

где $K_j = P_j + \gamma Q_j$, $j = 1, \dots, N-1$ (см. следствие 2 в [4, гл. 1; 5]).

Это утверждение позволяет сформулировать

Алгоритм оптимального распределения квот выбросов (см. следствие 1 в [4, гл. 1; 5]). *Оптимальные квоты выбросов $\{V_k\}$ (см. (1)), рекомендуемые для источников с номерами $k = 1, 2, \dots, N$, определяются равенством (6), где параметры $\{\lambda_k = \lambda_k^*\}$ представляются формулой (11).*

Найденное значение V_k , где $k \in \{1, 2, \dots, N\}$, назовём (см. (1)) *предельно допустимым* количеством выбросов за единицу времени для источника с номером k .

Аналогичный алгоритм распределения вредных выбросов справедлив и при другой числовой шкале, состоящей из данных о площади для зоны любого источника (см. [3]).

С целью создания комфортного состояния атмосферы в городской среде представлен возможный математический способ управления режимом действия источников её загрязнения, расположенных в мегаполисе. Его описание базируется на конструкции алгоритма оптимального распределения ограниченного ресурса между группами людей, находящимися в дифференцируемых условиях.

Автор искренне признателен рецензенту за конструктивные замечания, которые способствовали уточнению содержания экологических понятий, использованных в данной работе. За полезные обсуждения, связанные с темой работы, автор также благодарен О. Н. Зубаревой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Губий Е. В., Зоркальцев В. И. Создание математической модели для анализа эффективности энергетических лесов // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2012. Т. 34, № 2. С. 80–83.
2. Губий Е. В., Зоркальцев В. И. Эффективность энергетических плантаций. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2018; DOI: 10.15372/Efficiency2018GEV
3. Маергойз Л. С., Сидорова Т. Ю., Хлебопрос Р. Г. Математический алгоритм распределения выбросов парниковых газов // Сиб. журн. индустр. математики. 2011. Т. 14, № 2. С. 78–83.

4. *Маергойз Л. С., Хлебопрос Р. Г.* Индикатор «счастья» в ресурсной экономике: экстремальный подход. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2020; DOI: 10.15372/INDICATOR2020MLS
5. *Галькова Е. А., Маергойз Л. С.* Оптимизационная математическая модель двухуровневого распределения ограниченного ресурса между группами людей // Экономика и мат. методы. 2015. Т. 51, № 3. С. 109–116.
6. *Петросян Л. А., Захаров В. В.* Введение в математическую экологию. Л.: Изд-во ЛГУ, 1986.
7. *Onuchin A., Kofman G., Zubareva O., Danilova I.* Using an urban snow cover composition-based cluster analysis to zone Krasnoyarsk Town (Russia) by pollution level // Pol. J. Environ. Stud. 2020. V. 29, N 6. P. 1–11.

UDC 519.8

**MATHEMATICAL METHOD OF ALLOCATING QUOTAS
OF THE HARMFUL EMISSION BETWEEN ITS SOURCES
IN A MEGACITY**

© 2021 L. S. Maergoiz

*Federal Research Center Krasnoyarsk Science Center SB RAS,
Sukachev Institute of Forest SB RAS,
Academgorodok 50, Krasnoyarsk 660036, Russia,*

E-mail: bear.lion@mail.ru

Received 15.06.2020, revised 17.03.2021, accepted 15.04.2021

Abstract. In connection with the topical problem of creating comfortable atmosphere in urban habitat, we present a mathematical algorithm for allocating quotas of harmful emissions between its sources in a megacity. Our construction is based on some recently developed method of optimal distribution of limited resources between differentiated groups of people.

Keywords: mathematical algorithm, extremal problem, principles of distribution.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.208

REFERENCES

1. Gubii E.V., Zorkal'tsev V.I. Sozdanie matematicheskoi modeli dlya analiza effektivnosti energeticheskikh lesov [Creation of a mathematical model for efficiency analysis of energetic forests]. *Sovrem. Tekhnol. Sistemn. Anal. Model.*, 2012, Vol. 34, No. 2, pp. 80–83 (in Russian).
2. Gubii E.V., Zorkal'tsev V.I. Effektivnost' energeticheskikh plantatsii [The efficiency of energy plantations]. Novosibirsk: Izd. Sibir. Otdel. Ross. Akad. Nauk, 2018 (in Russian); DOI: 10.15372/Efficiency2018GEV
3. Maergoiz L.S., Sidorova T.Yu., Khlebopros R.G. A mathematical algorithm of distributing the greenhouse gas emissions. *J. Appl. Indust. Math.*, 2011, Vol. 6, No. 2, pp. 210–215.
4. Maergoiz L.S., Khlebopros R.G. Indikator «schast'ya» v resursnoi ekonomike: ekstremal'nyi podkhod [«Happiness» indicator in resource economics: extremal approach]. Novosibirsk: Izd. Sibir. Otdel. Ross. Akad. Nauk, 2020 (in Russian); DOI: 10.15372/INDICATOR2020MLS
5. Gal'kova E.A., Maergoiz L.S. Optimizatsionnaya matematicheskaya model' dvukhurovneвого raspredeleniya ogranichennogo resursa mezhdru gruppami lyudei [An optimization mathematical model of two-level distribution of a limited resource between the groups of people]. *Ekonomika i Mat. Metody*, 2015, Vol. 51, No. 3, pp. 109–116 (in Russian).
6. Petrosyan L.A., Zakharov V.V. Vvedenie v matematicheskuyu ekologiyu [Introduction to mathematical ecology]. Leningrad: Izd. Leningrad. Gos. Univ., 1986 (in Russian).
7. Onuchin A., Kofman G., Zubareva O., Danilova I. Using an urban snow cover compostion-based cluster analysis to zone Krasnoyarsk Town (Russia) by pollution level. *Pol. J. Environ. Stud.*, 2020, Vol. 29, No. 6, pp. 1–11.