УДК 517.95

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БЭКЛУНДА ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА

© 2021 **М. В. Нещадим**[1,2a]

[1]*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, просп. Акад. Коптюга, 4, г. Новосибирск 630090, Россия,*
[2]*Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 1, г. Новосибирск 630090, Россия*

E-mail: neshch@math.nsc.ru

Поступила в редакцию 05.02.2021 г.; после доработки 11.02.2021 г.; принята к публикации 15.04.2021 г.

Исследуется система уравнений, которая получена на основе одномерного уравнения Шрёдингера и связывает функции потенциала, амплитуды и фазы. Методами теории совместности систем дифференциальных уравнений в частных производных находятся вполне интегрируемые системы, связывающие только две функции из указанных трёх. В качестве следствия строятся некоторые точные решения уравнения Шрёдингера.

Ключевые слова: уравнение Шрёдингера, преобразования Бэклунда, условия совместности.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.209

ВВЕДЕНИЕ

Для построения точных решений дифференциальных уравнений, исследования их симметрийных свойств, поисков законов сохранения используются методы группового анализа дифференциальных уравнений [1–4], метод дифференциальных подстановок [5] и, более общим образом, метод преобразований Ли — Бэклунда [6, 7] в пространстве джетов продолженного уравнения [8, 9]. На практике, как правило, встречаются более частные случаи преобразований Ли — Бэклунда: дифференциальные соответствия между двумя двумя системами дифференциальных уравнений, получившие название преобразований Бэклунда [10–12]. Такие соответствия представляют собой дифференциальную связь между двумя системами дифференциальных уравнений, позволяющую по известному решению одной системы конструктивно находить решение второй. Преобразования Бэклунда для определённых уравнений имеют как правило именное название: каскадный метод Лапласа, преобразоване Эйлера — Дарбу, преобразование Бианки, преобразование Мутара, метод билинейных уравнений Хироты и т. д. Преобразование Коула — Хопфа связывает уравнение теплопроводности и уравнение Бюргерса [13]. Преобразование Миуры связывает мКдФ и КдФ [14]. Отметим, что прямое и обратное преобразования Бэклунда, как правило, имеют разные качественные свойства. Дифференциальная подстановка Коула — Хопфа $u = 2v_x/v$ переводит уравнение теплопроводности $v_t = v_{xx}$ в уравнения Бюргерса $u_t = uu_x + u_{xx}$, а обратный переход связан с нелокальным разрешением $v = \exp\big(-\frac{1}{2}\int u\,dx\big)$. Преобразования Бэклунда используются при построении солитонных решений нелинейных уравнений, изучении симметрий и законов сохранения, а также для построения и размножения их решений [15]. Нахождение соответствий Бэклунда для актуальных

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект 0314-2019-0011).

уравнений математической физики есть трудоёмкая самостоятельная задача. Примеры преобразований Бэклунда и их применение можно найти в [15–17].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим одномерное уравнение Шрёдингера [18]:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + U\psi. \tag{1}$$

Здесь t — время, x — одномерная пространственная переменная, $\hbar$ — постоянная Планка, m — масса, i — мнимая единица, $i^2 = -1$, $\psi = \psi(t,x)$ — волновая функция, $U = U(t,x)$ — потенциал. Представим волновую функцию $\psi(t,x)$ в виде

$$\psi(t,x) = R(t,x)e^{iS(t,x)}, \tag{2}$$

где $R(t,x)$ и $S(t,x)$ — вещественнозначные функции (амплитуда и фаза соответственно). В работе получены дифференциальные соотношения $C_1[U,S]$, содержащие только функции U, S, и соотношения $C_2[U,R]$, содержащие только функции U, R. При этом мы пользуемся алгоритмом теории совместности [19, 20] приведения в инволюцию переопределённой системы. Переход от соотношения $C_1[U,S]$ к соотношению $C_2[U,R]$ осуществляется введением дифференциальных соотношений для функции R и фактически представляет собой преобразования Бэклунда [10]. Обратный переход от соотношения $C_2[U,R]$ к соотношению $C_1[U,S]$ осуществляется введением дифференциальных соотношений для функции S и представляет собой обратное преобразование Бэклунда.

Замена переменных $t \longmapsto \hbar t$, $x \longmapsto \dfrac{\hbar}{\sqrt{2m}}x$ приводит уравнение (1) к виду

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + U\psi. \tag{3}$$

Подставим (2) в (3) и выделим вещественную и мнимую части этого уравнения

$$R_t + 2R_xS_x + RS_{xx} = 0, \quad RS_t - R_{xx} + UR + RS_x^2 = 0. \tag{4}$$

Нижними буквенными индексами обозначаются соответствующие частные производные. Если считать, что в (4) функции U, R известны, то это будет переопределённая система на функцию S. Если U, S известны, то это будет переопределённая система на функцию R. В каждом из этих случаев система (4) разрешима при дополнительных условиях — условиях совместности на известные функции. Основная цель данной работы найти эти условия совместности. В качестве следствия получаются вполне интегрируемые системы, решение которых даёт точное решение уравнения (1).

Все рассматриваемые функции предполагаются аналитическими.

2. УСЛОВИЯ СОВМЕСТНОСТИ СИСТЕМЫ ДЛЯ ФУНКЦИИ R

Рассмотрим систему

$$R_t = -2R_xS_x - RS_{xx}, \tag{5}$$
$$R_{xx} = RA, \tag{6}$$

здесь

$$A = U + S_t + S_x^2. \tag{7}$$

Отметим, что A выражается только через U, S.

Составим условие совместности системы (5), (6):

$$(R_t)_{xx} = (R_{xx})_t. \tag{8}$$

Имеем

$$(2R_{xx}S_x + 3R_xS_{xx} + RS_{xxx})_x + R_tA + RA_t = 0,$$
$$2R_{xxx}S_x + 5R_{xx}S_{xx} + 4R_xS_{xxx} + RS_{xxxx} + R_tA + RA_t = 0.$$

Заменим R_{xx}, R_t, воспользовавшись (5), (6):

$$2(RA)_xS_x + 5RAS_{xx} + 4R_xS_{xxx} + RS_{xxxx} + A(-2R_xS_x - RS_{xx}) + RA_t = 0,$$
$$4R_xS_{xxx} = -R\left(2A_xS_x + 4AS_{xx} + S_{xxxx} + A_t\right).$$

Предполагая, что $S_{xxx} \neq 0$, обозначим

$$B = -\frac{1}{4S_{xxx}}\left(2A_xS_x + 4AS_{xx} + S_{xxxx} + A_t\right). \tag{9}$$

Отметим, что B выражается только через A, S. Итак, условие совместности (8) приводится к уравнению

$$R_x = RB. \tag{10}$$

Замечание 1. Если $S_{xxx} = 0$, то есть ещё дополнительное соотношение

$$2A_xS_x + 4AS_{xx} + A_t = 0.$$

Преобразуем соотношение (6), используя (10):

$$RA = R_{xx} = (RB)_x = R_xB + RB_x = RB^2 + RB_x.$$

Отсюда получаем

$$B_x = A - B^2. \tag{11}$$

Итак, система (5), (6) равносильна системе

$$R_t = -R(2BS_x + S_{xx}), \tag{12}$$
$$R_x = RB, \tag{13}$$

где B определено формулой (9) и удовлетворяет соотношению (11).

Составим условие совместности системы (12), (13). Так как

$$R_t/R = -(2BS_x + S_{xx}), \quad R_x/R = B,$$

то

$$(2BS_x + S_{xx})_x + B_t = 0, \quad 2B_xS_x + 2BS_{xx} + S_{xxx} + B_t = 0.$$

В силу (11)

$$2(A - B^2)S_x + 2BS_{xx} + S_{xxx} + B_t = 0.$$

Итак, функция B является решением системы

$$B_t = 2B^2S_x - 2AS_x - 2BS_{xx} - S_{xxx}, \tag{14}$$
$$B_x = A - B^2. \tag{15}$$

Составим условия её совместности

$$(2B^2S_x - 2AS_x - 2BS_{xx} - S_{xxx})_x = (A - B^2)_t,$$
$$4BB_xS_x + 2B^2S_{xx} - 2A_xS_x - 2AS_{xx} - 2B_xS_{xx} - 2BS_{xxx} - S_{xxxx} = A_t - 2BB_t.$$

Заменим B_x, B_t, воспользовавшись (14), (15):

$$\begin{aligned}4B(A - B^2)S_x + 2B^2S_{xx} - 2A_xS_x - 2AS_{xx} - 2(A - B^2)S_{xx} - 2BS_{xxx} - S_{xxxx}\\ = A_t - 2B\left(2B^2S_x - 2AS_x - 2BS_{xx} - S_{xxx}\right).\end{aligned}$$

Приводим подобные

$$-2A_xS_x - 4AS_{xx} - 4BS_{xxx} - S_{xxxx} = A_t.$$

В силу (9) это равенство выполняется тождественно. Следовательно, система (14), (15) находится в инволюции. Итак, при условии, что $S_{xxx} \neq 0$ доказана следующая

Теорема 1. *Условиями совместности системы* (5), (6) *являются равенства* (14), (15), (7), (9)*, в которые входят только функции U, S. При их выполнении амплитуда R определяется из вполне интегрируемой системы* (12), (13).

Отметим, что фактически функции R, U, S определяются функцией B. Действительно, пусть B — некоторая заданная функция. Тогда:

1. Функция A определяется формулой (15): $A = B_x + B^2$.
2. Функция S определяется из уравнения (14): $S_{xxx} = -B_t - 2(BS_x)_x$ (нужно в (14) заменить A на $B_x + B^2$).
3. Соотношение (9) выполняется тождественно в силу пп. 1 и 2.
4. Потенциал U находится по формуле (7): $U = B_x + B^2 - S_t - S_x^2$.
5. Амплитуда R определяется из вполне интегрируемой системы (12), (13).

Рассмотрим случай $S_{xxx} = 0$, решение уравнения имеет вид $S = x^2a(t) + xb(t) + c(t)$, где a, b, c — некоторые функции переменной t.

Дополнительное соотношение $A_t + 2A_xS_x = -4AS_{xx}$ и уравнение интегрируются методом характеристик

$$A = e^{-8\int\limits_0^t a(\xi)\,d\xi}p(z), \quad R = e^{-2\int\limits_0^t a(\xi)\,d\xi}q(z),$$

где

$$z = xe^{-4\int\limits_0^t a(\xi)\,d\xi} - 2\int\limits_0^t b(\tau)e^{-4\int\limits_0^\tau a(\xi)\,d\xi}d\tau,$$

$p(z)$, $q(z)$ — произвольные функции переменной z. Подставляя A, R в (7), получаем соотношение $q''(z) = p(z)q(z)$. Отметим, что потенциал U находится из (7). Доказана следующая

Теорема 2. *Пусть $S_{xxx} = 0$. Тогда общее решение системы* (5), (6) *даётся следующими формулами:*

$$S = x^2a(t) + xb(t) + c(t), \quad R = e^{-2\int\limits_0^t a(\xi)d\xi}q(z), \quad U = e^{-8\int\limits_0^t a(\xi)d\xi}q''(z)/q(z),$$

где $q(z)$ — произвольная функция переменной z,

$$z = xe^{-4\int\limits_0^t a(\xi)\,d\xi} - 2\int\limits_0^t b(\tau)e^{-4\int\limits_0^\tau a(\xi)\,d\xi}d\tau,$$

здесь a, b, c — произвольные функции переменной t.

Замечание 2. В условиях теоремы 2 имеем

$$\psi\psi^* = R^2 = e^{-4\int\limits_0^t a(\xi)d\xi} q^2(z).$$

Поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi\psi^*\,dx = e^{-4\int\limits_0^t a(\xi)\,d\xi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} q^2\left(xe^{-4\int\limits_0^t a(\xi)\,d\xi} - 2\int\limits_0^t b(\tau)e^{-4\int\limits_0^\tau a(\xi)\,d\xi}\,d\tau\right) dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} q^2(r)dr.$$

Следовательно, существуют решения из теоремы 2, удовлетворяющие условию нормировки волновой функции $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi\psi^*\,dx = 1$.

Вопрос. Можно ли построить решения уравнения Шрёдингера, аналогичные решениям теоремы 2 в многомерном случае? Взяв, например, S в виде

$$S = \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}(t)x_k x_l + \sum_{k=1}^{n} b_k(t)x_k + c(t),$$

найти соответствующие R, U.

3. УСЛОВИЯ СОВМЕСТНОСТИ СИСТЕМЫ ДЛЯ ФУНКЦИИ S

Рассмотрим систему

$$S_t = \frac{R_{xx}}{R} - U - S_x^2, \tag{16}$$

$$S_{xx} = -\frac{R_t}{R} - 2\frac{R_x}{R}S_x. \tag{17}$$

Положим

$$R = e^W. \tag{18}$$

Тогда система (16), (17) примет вид

$$S_t = A - S_x^2, \tag{19}$$

$$S_{xx} = -W_t - 2W_xS_x, \tag{20}$$

здесь

$$A = W_{xx} + W_x^2 - U. \tag{21}$$

Отметим, что A выражается только через U и R.

Составим условие совместности $(S_t)_{xx} = (S_{xx})_t$:

$$A_{xx} - 2(S_xS_{xx})_x = -W_{tt} - 2W_{tx}S_x - 2W_xS_{tx}.$$

Заменим S_{xx} в силу (20):

$$A_{xx} + 2(S_x(W_t + 2W_xS_x))_x = -W_{tt} - 2W_{tx}S_x - 2W_xS_{tx},$$

$$A_{xx} + 2S_{xx}(W_t + 2W_xS_x) + 2S_x(W_{tx} + 2W_{xx}S_x + 2W_xS_{xx}) = -W_{tt} - 2W_{tx}S_x - 2W_xS_{tx}.$$

Заменим S_{xx} в силу (20), а S_t в силу (19):

$$A_{xx} - 2(W_t + 2W_xS_x)^2 + 2S_xW_{tx} + 4S_x^2W_{xx} - 4S_xW_x(W_t + 2W_xS_x)$$

$$= -W_{tt} - 2W_{tx}S_x - 2W_x(A_x - 2S_{xx}S_x).$$

Заменим S_{xx} в силу (20) и сгруппируем по степеням S_x:

$$4S_x^2\big(W_{xx}-2W_x^2\big)+4S_x(W_{tx}-2W_tW_x)+A_{xx}+2W_xA_x+W_{tt}-2W_t^2=0. \tag{22}$$

Исследуем на совместность систему (20), (22). Введём обозначения

$$a=W_{xx}-2W_x^2,\quad b=W_{tx}-2W_tW_x,\quad 4c=A_{xx}+2W_xA_x+W_{tt}-2W_t^2. \tag{23}$$

Тогда система (20), (22) примет вид

$$S_{xx}=-W_t-2W_xS_x,\quad aS_x^2+bS_x+c=0. \tag{24}$$

Если $a=0$, то $R=e^W=(\beta(t)-2x\alpha(t))^{-1/2}$ для некоторых функций $\beta(t)$, $\alpha(t)$ переменной t. В этом случае

$$A=\frac{3\alpha^2(t)}{(\beta(t)-2x\alpha(t))^2}-U,\quad W=-\frac{1}{2}\ln(\beta(t)-2x\alpha(t)),$$

система (19), (20) принимает вид

$$S_t=\frac{3\alpha^2(t)}{(\beta(t)-2x\alpha(t))^2}-U-S_x^2,\quad S_{xx}=\frac{1}{2}\int\frac{\beta'(t)-2x\alpha'(t)}{\beta(t)-2x\alpha(t)}-\frac{2\alpha(t)}{\beta(t)-2x\alpha(t)}S_x, \tag{25}$$

а уравнение (22) принимает вид

$$4\alpha'(t)S_x+\frac{96\alpha^4(t)}{(\beta(t)-2x\alpha(t))^3}-U_{xx}(\beta(t)-2x\alpha(t))-2\alpha(t)U_x-\frac{1}{2}(\beta''(t)-2x\alpha''(t))=0. \tag{26}$$

Если $\alpha'=0$, то (26) — уравнение на потенциал U и имеет место следующая

Теорема 3. *Если функция амплитуды $R(t,x)$ имеет представление $R=(\beta(t)-2x\alpha)^{-1/2}$ для некоторой функции $\beta(t)$ переменной t и константы α, то потенциал $U(t,x)$ является решением уравнения*

$$U_{xx}-\frac{2\alpha}{\beta(t)-2x\alpha}U_x=\frac{96\alpha^4}{(\beta(t)-2x\alpha)^4}-\frac{\beta''(t)}{2(\beta(t)-2x\alpha)},$$

а фазовая функция $S(t,x)$ находится из вполне интегрируемой системы

$$S_t=\frac{3\alpha^2}{(\beta(t)-2x\alpha)^2}-U-S_x^2,\quad S_{xx}=\frac{1}{2}\frac{\beta'(t)}{\beta(t)-2x\alpha}-\frac{2\alpha}{\beta(t)-2x\alpha}S_x.$$

Пусть $\alpha'(t)\neq 0$. Введём обозначения

$$\begin{gathered}T=U_{xx}\frac{\beta(t)-2x\alpha(t)}{4\alpha'(t)}+U_x\frac{\alpha(t)}{2\alpha'(t)}+\frac{\beta''(t)-2x\alpha''(t)}{8\alpha'(t)}-\frac{24\alpha^4(t)}{(\beta(t)-2x\alpha(t))^3\alpha'(t)},\\ P=\frac{3\alpha^2(t)}{(\beta(t)-2x\alpha)^2}-U-T^2,\quad Q=\frac{1}{2}\frac{\beta'(t)-2x\alpha'(t)}{\beta(t)-2x\alpha}-\frac{2\alpha}{\beta(t)-2x\alpha}T.\end{gathered} \tag{27}$$

Итак, справедлива

Теорема 4. *Если функция амплитуды* $R(t,x)$ *имеет представление* $R = (\beta(t) - 2x\alpha(t))^{-1/2}$ *для некоторых функций* $\beta(t)$ *и* $\alpha(t)$ *переменной* t*, причём* $\alpha'(t) \neq 0$*, то потенциал* $U(t,x)$ *является решением уравнения* $P_{xx} = Q_t$*, а фазовая функция* $S(t,x)$ *находится из вполне интегрируемой системы* $S_t = P$*,* $S_{xx} = Q$*, где функции* P*,* Q *определены формулами* (27)*.*

Пусть $a \neq 0$. Тогда система (24) требует дополнительного исследования на совместность относительно функции $S(t,x)$. Дифференцируя квадратичное уравнение $aS_x^2 + bS_x + c = 0$ по переменной x и подставляя вторую производную $S_{xx} = -W_t - 2W_xS_x$, получим дополнительное квадратичное уравнение

$$(a_x - 4aW_x)S_x^2 + (b_x - 2bW_x - 2aW_t)S_x + c_x - bW_t = 0.$$

Преобразуя равносильным образом систему квадратичных уравнений, получаем

$$a_xS_x^2 + (b_x + 2bW_x - 2aW_t)S_x + c_x - bW_t + 4cW_x = 0, \quad aS_x^2 + bS_x + c = 0. \tag{28}$$

Результант системы (28) имеет вид

$$\mathrm{Res} = \begin{vmatrix} a_x & b_x + 2bW_x - 2aW_t & c_x - bW_t + 4cW_x & 0 \\ 0 & a_x & b_x + 2bW_x - 2aW_t & c_x - bW_t + 4cW_x \\ a & b & c & 0 \\ 0 & a & b & c \end{vmatrix}, \tag{29}$$

и условие $\mathrm{Res} = 0$ является необходимым и достаточным для того, чтобы система (28) имела общий корень S_x.

Если уравнения (28) пропорциональны, т. е.

$$\frac{a_x}{a} = \frac{b_x + 2bW_x - 2aW_t}{b} = \frac{c_x - bW_t + 4cW_x}{c}, \tag{30}$$

то это два уравнения на функции $W = \ln R$, U, и при этом система (19), (20) вполне интегрируема.

Итак, имеет место следующая

Теорема 5. *Если функции* $R(t,x)$ *и* $U(t,x)$ *являются решением системы* (30)*, то фазовая функция* $S(t,x)$ *находится из вполне интегрируемой системы* (19), (20)*.*

Если уравнения (28) непропорциональны, то производная S_x выражается без квадратур в виде $S_x = V$, здесь

$$V = \frac{ca_x - a(c_x - bW_t + 4cW_x)}{a(b_x + 2bW_x - 2aW_t) - ba_x}. \tag{31}$$

Следовательно, система (19), (20) сводится к системе $S_t = A - V^2$, $S_x = V$, и условие её совместности $(A - V^2)_x = V_t$ является соотношением на функции $W = \ln R$ и U.

Итак, имеет место следующая

Теорема 6. *Если функции* $R(t,x)$ *и* $U(t,x)$ *являются решением системы* $(A - V^2)_x = V_t$*,* $\mathrm{Res} = 0$*, где функции* A*,* V*,* Res *определены формулами* (21), (29), (31)*, то фазовая функция* $S(t,x)$ *находится из вполне интегрируемой системы* $S_t = A - V^2, \quad S_x = V$*.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Отметим, что система (5), (6) представляет собой преобразования Бэклунда, связывающее системы $C_1[U,S]$ и $C_2[U,R]$. При этом система $C_1[U,S]$ состоит из уравнений (7), (9), (14), (15), в то время как уравнения системы $C_2[U,R]$ описаны в формулировках теорем 4–6. Переходы от системы $C_1[U,S]$ к системе $C_2[U,R]$ и наоборот, вообще говоря, не являются отображениями в обычном смысле этого слова. Для того чтобы осуществить эти переходы, надо разрешить соответствующие системы вместе с уравнениями (5), (6). При этом если переход от $C_1[U,R]$ к системе $C_2[U,S]$ является однозначным (теорема 1), то обратное преобразование многозначное (теоремы 3–6).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. *Ибрагимов Н. Х.* Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.
3. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.
4. *Виноградов А. М.* Симметрии и законы сохранений уравнений математической физики. М.: Факториал, 1997.
5. *Сидоров А. Ф., Шапеев В. П., Яненко Н. Н.* Метод дифференциальных связей и его приложение в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1984.
6. *Ибрагимов Н. Х., Шабат А. Б.* Эволюционные уравнения с нетривиальной группой Ли — Бэклунда // Функц. анализ и его приложения. 1980. Т. 14, вып. 1. С. 25–36.
7. *Ибрагимов Н. Х., Шабат А. Б.* О бесконечных алгебрах Ли — Бэклунда // Функц. анализ и его приложения. 1980. Т. 14, вып. 4. С. 79–80.
8. *Виноградов А. М., Красильщик И. С., Лычагин В. В.* Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.
9. *Виноградов А. М.* Когомологический анализ уравнений с частными производными и вторичное исчисление. М.: изд. МЦНМО, 2021.
10. *Miura R. M.* Backlund Transformations // Heidelberg: Springer-Verl., 1976. (Lect. Notes Math. V. 515).
11. *Жаринов В. В.* О соответствии Бэклунда // Мат. сб. 1988. Т. 136, № 2. С. 274–291.
12. *Жаринов В. В.* О соответствии Бэклунда для эволюционных уравнений в многомерном пространстве // Теор. и мат. физика. 2006. Т. 147, № 1. С. 3–13.
13. *Аниконов Ю. Е., Нещадим М. В.* Обобщённое преобразование Коула — Хопфа // Сиб. журн. индустр. математики. 2018. Т. 21, № 3. С. 18–25.
14. *Аниконов Ю. Е., Нещадим М. В.* Метод дифференциальных связей и нелинейные обратные задачи // Сиб. журн. индустр. математики. 2015. Т. 18, № 2. С. 36–47.
15. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987.
16. *Капцов О. В.* Методы интегрирования уравнений с частными производными. М.: Физматлит, 2009.
17. *Мива Т., Джимбо М., Датэ Э.* Солитоны: дифференциальные уравнения, симметрии и бесконечномерные алгебры. М.: изд. МЦНМО, 2005.
18. *Блохинцев Д. И.* Основы квантовой механики. М.: Наука, 1976.
19. *Фиников С. П.* Метод внешних форм Картана. М.; Л.: Гостехиздат, 1948.
20. *Поммаре Ж.* Системы уравнений с частными производными и псевдогруппы Ли. М.: Мир, 1983.
21. *Нещадим М. В., Чупахин А. П.* Частично-инвариантные решения кубического уравнения Шрёдингера // Вестн. Удмуртского ун-та. 2008. Вып. 3. С. 35–41.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 517.95

BÄCKLUND TRANSFORMATIONS FOR THE ONE-DIMENSIONAL SCHRÖDINGER EQUATION

© 2021 M. V. Neshchadim[1,2]

[1]*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, pr. Acad. Koptyuga 4, Novosibirsk 630090, Russia,*
[2]*Novosibirsk State University, ul. Pirogova 1, Novosibirsk 630090, Russia*

E-mail: neshch@math.nsc.ru

Received 05.02.2021, revised 11.02.2021, accepted 15.04.2021

Abstract. We study the system of equations which bases on the one-dimensional Schrödinger equation and connects the potential, amplitude, and phase functions. Using the methods of compatibility theory of systems of partial differential equations, we obtain the completely integrable systems that connect only two functions of the above three. As a corollary, we construct some exact solutions of the Schrödinger equation.

Keywords: Schrödinger equation, Bäcklund transformation, compatibility condition.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.209

REFERENCES

1. Ovsyannikov L.V. Group Analysis of Differential Equations. N. Y.: Academic Press, 1982.
2. Ibragimov N.Kh. Transformation Groups Applied to Mathematical Physics. Dordrecht–Boston–Lancaster: Reidel Publ. Company, 1985.
3. Olver P. Applications of Lie Groups to Differential Equations. N. Y.: Springer-Verl., 1986.
4. Vinogradov A.M. Simmetrii i zakony sokhranenii uravnenii matematicheskoi fiziki [Symmetries and conservation laws for differential equations of mathematical physics]. Moscow: Faktorial, 1997 (in Russian).
5. Sidorov A.F., Shapeev V.P., Yanenko N.N. Metod differentsial'nykh svyazei i ego prilozhenie v gazovoi dinamike [Method of differential constraints and its applications in gas dynamics]. Novosibirsk: Nauka, 1984 (in Russian).
6. Ibragimov N.Kh., Shabat A.B. Evolutionary equations with a nontrivial Lie—Bäcklund group. *Function. Anal. and Its Appl.*, 1980, Vol. 14, No. 1, pp. 25–36.
7. Ibragimov N.Kh., Shabat A.B. O beskonechnykh algebrakh Li—Beklunda [Infinite Lie–Bäcklund Algebras]. *Funkts. analiz i ego prilozheniya* [Function. Anal. and Its Appl.], 1980, Vol. 14, No. 4, pp. 79–80 (in Russian).
8. Vinogradov A.M., Krasil′shchik I.S., Lychagin V.V. Vvedenie v geometriyu nelineinykh differentsial'nykh uravnenii [Introduction to the geometry of nonlinear differential equations]. Moscow: Nauka, 1983 (in Russian).
9. Vinogradov A.M. Cohomological Analysis of Partial Differential Equations and Secondary Calculus. Providence: Amer. Math. Soc., 2021.
10. Miura R.M. *Bäcklund Transformations.* Heidelberg: Springer-Verl., 1976 (Lect. Notes Math., V. 515).

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2021, Vol. 15, No. 2; DOI: 10.1134/S1990478921020125

11. Zharinov V. V. On Bäcklund Correspondences. *Math. USSR-Sb.*, 1989, Vol. 64, No. 1, pp. 277–293.
12. Zharinov V.V. Bäcklund correspondences for evolution equations in a multidimensional space. *Theor. Math. Phys.*, 2006, Vol. 147, No. 1, pp. 449–459.
13. Anikonov Yu.E., Neshchadim M.V. Generalized cole–hopf transformation. *J. Appl. Ind. Math.*, 2018, Vol. 21, No. 3, pp. 409–416.
14. Anikonov Yu.E., Neshchadim M.V. The method of differential constraints and nonlinear inverse problems. *J. Appl. Ind. Math.*, 2015, Vol. 9, No. 3, pp. 317–327.
15. Ablovits M.J., Sigur Kh. Solitons and the Inverse Scattering Transform. Philadelphia: SIAM, 1987.
16. Kaptsov O.V. Metody integrirovaniya uravnenii s chastnymi proizvodnymi [Integration methods for partial differential equations]. Moscow: Fizmatlit, 2009 (in Russian).
17. Miva T., Dzhimbo M., Date E. Solitons: Differential Equations, Symmetries and Infinite Dimensional Algebras. Tokyo: Jwanami Shoten, 1993.
18. Blokhintsev D.I. Osnovy kvantovoi mekhaniki [Fundamentals of quantum mechanics]. Moscow: Nauka, 1976 (in Russian).
19. Finikov S.P. Metod vneshnikh form Kartana [Cartan's method of exterior forms]. Moscow; Leningrad: Gostekhizdat, 1948 (in Russian).
20. Pommare Zh. Sistemy uravnenii s chastnymi proizvodnymi i psevdogruppy Li [Systems of partial differential equations and Lie pseudogroups]. Moscow: Mir, 1983 (in Russian).
21. Neshchadim M.V., Chupakhin A.P. Partially invariant solutions to the cubic Schrödinger equation. *Vestnik Udmurt. Univ*, 2008, No. 3, pp. 35–41 (in Russian).