УДК 532.516

ПРЕИМУЩЕСТВЕННО ОДНОНАПРАВЛЕННОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

© 2021 **В. Л. Сенницкий**[1,2]

[1] *Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,*
просп. Акад. Лаврентьева, 15, Новосибирск 630090, Россия,
[2] *Новосибирский государственный университет,*
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090, Россия

E-mail: sennitskii@yandex.ru

Поступила в редакцию 25.11.2019 г.; после доработки 12.01.2021 г.;
принята к публикации 15.04.2021 г.

Рассмотрена задача о течении вязкой жидкости в присутствии твёрдых тел (двух стенок и пластины с проницаемой для жидкости границей) при периодических по времени воздействиях. Постановка задачи включает в себя уравнение Навье — Стокса, уравнение неразрывности и условия на твёрдых границах жидкости. Обнаружен новый гидромеханический эффект, состоящий в том, что в отсутствие выделенного направления в пространстве свободные части гидромеханической системы (жидкие слои) на фоне колебаний совершают однонаправленное стационарное движение.

Ключевые слова: вязкая жидкость, колебания, проницаемая граница, отсутствие выделенного направления, стационарное движение.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.210

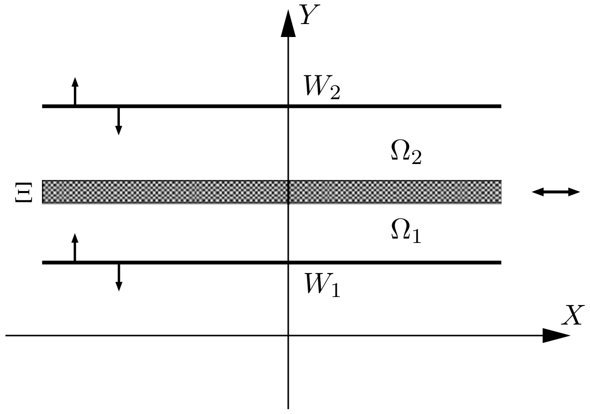
ВВЕДЕНИЕ

Одним из направлений в механике жидкости, не теряющим свою актуальность, является изучение динамики гидромеханических систем при периодических по времени (колебательных, вибрационных) воздействиях. В данном направлении выполнено значительное число работ (см., например, [1–28], а также [29, 30]). Проведённые исследования позволили достичь существенного прогресса в понимании особенностей динамики гидромеханических систем, в выявлении новых гидромеханических эффектов. К настоящему времени, в частности, обнаружены эффекты парадоксального поведения твердого включения в вибрирующей жидкости [2, 14], «самопроизвольного» перехода твердого включения в колеблющейся жидкости в положение с заданной ориентацией в пространстве [25], преимущественно однонаправленного вращения жидкости со свободной границей [28]; определены содержательные различия в колебаниях жидкости (произведено разделение колебаний жидкости на однородные и неоднородные [9] (см. также [18, 29, 30]), введены коэффициенты неоднородности колебаний жидкости [18]); теоретически и экспериментально доказано существование явления преимущественно однонаправленного движения сжимаемых включений в вибрирующей жидкости [6–8, 15].

В настоящей работе поставлена и решена задача о течении вязкой жидкости, граничащей с твёрдыми телами — двумя стенками и пластиной с проницаемой для жидкости границей. Жидкость подвергается периодическим по времени воздействиям, которые характеризуются отсутствием выделенного направления в пространстве. Установлено, что в ответ на оказываемые (неоднонаправленные) воздействия свободные части гидромеханической системы (жидкие слои) на фоне колебаний совершают однонаправленное стационарное движение.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Имеются вязкая несжимаемая жидкость и контактирующие с ней абсолютно твёрдые стенки W_1, W_2 и пластина Ξ (см. рисунок). Стенки и пластина совершают заданные колебания; стенки — вдоль оси Y, пластина — вдоль оси X инерциальной прямоугольной системы координат X, Y, Z. Стенка W_1 ограничена плоскостью $Y = A_1$, стенка W_2 — плоскостью $Y = A_2$, пластина — плоскостями $Y = B_1$ и $Y = B_2$ ($A_1 < B_1 < B_2 < A_2$; B_1, B_2 — постоянные). Промежутки между стенками и пластиной (области $\Omega_1\colon A_1 < Y < B_1$ и $\Omega_2\colon B_2 < Y < A_2$ $(-\infty < X < \infty, -\infty < Z < \infty)$) заполнены жидкостью. Граница пластины проницаема для жидкости. Расстояние между стенками $L = A_2 - A_1$ постоянно. Требуется определить не зависящее от начальных данных периодическое по времени t движение жидкости.



Гидромеханическая система

Пусть T — период колебаний стенок W_1, W_2 и пластины Ξ; $\tau = t/T$; $x = X/L$; $y = Y/L$; $z = Z/L$; $A_1 = \hat{A}\sin 2\pi\tau$ ($\hat{A} > 0$ — постоянная); $\varepsilon = \hat{A}/L$; $a_1 = A_1/L$; $a_2 = A_2/L$; $b_1 = B_1/L$; $b_2 = B_2/L$; ξ — часть пластины Ξ длиной D_X и толщиной $D_Y = B_2 - B_1$, «вписанная» между плоскостями $Z = Z^*$ и $Z = Z^* + D_Z$ (Z^*, $D_X > 0$, $D_Z > 0$ — постоянные); $\mathbf{e}_x = \{1, 0, 0\}$; $\mathbf{e}_y = \{0, 1, 0\}$; $\mathbf{U} = \{U, 0, 0\}$ — скорость тела ξ (пластины Ξ); $u = TU/L = \hat{u}\sin(2\pi\tau + \varphi)$ ($\hat{u} > 0$, φ — параметры); ρ, ν, $\mathbf{V} = \{V_X, V_Y, 0\}$ — соответственно плотность, кинематический коэффициент вязкости и скорость жидкости; $\mathbf{v} = T\mathbf{V}/L$, $\mathbf{v} = \{v_x, v_y, 0\} = \mathbf{v}(y, \tau)$; P — давление в жидкости; $p = T^2P/(\rho L^2)$, $p = p(y, \tau)$; $\mathrm{Re} = L^2/(\nu T)$ — число Рейнольдса.

Постановка задачи включает в себя уравнение Навье — Стокса, уравнение неразрывности и условия, которые должны выполняться на границах тел W_1, W_2, Ξ:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re}\Delta\mathbf{v} \quad \text{в} \quad \Omega_1, \Omega_2, \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_1, \Omega_2, \tag{2}$$

$$\mathbf{v} = \frac{da_1}{d\tau}\mathbf{e}_y \quad \text{при} \quad y = a_1, \quad y = 1 + a_1, \tag{3}$$

$$\mathbf{v} = u\mathbf{e}_x + \frac{da_1}{d\tau}\mathbf{e}_y \quad \text{при} \quad y = b_1, \quad y = b_2. \tag{4}$$

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Из (2)–(4) следует

$$v_y = 2\pi\varepsilon\cos 2\pi\tau. \tag{5}$$

Согласно (1), (3)–(5) имеем

$$p = 4\pi^2\varepsilon(\sin 2\pi\tau)y + p' \quad \text{в} \quad \Omega_1, \quad p = 4\pi^2\varepsilon(\sin 2\pi\tau)y + p'' \quad \text{в} \quad \Omega_2 \tag{6}$$

(p', p'' — функции τ);

$$\frac{\partial v_x}{\partial\tau} + 2\pi\varepsilon(\cos 2\pi\tau)\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad \text{в} \quad \Omega_1, \Omega_2, \tag{7}$$

$$v_x = 0 \quad \text{при} \quad y = a_1, \quad y = 1 + a_1, \tag{8}$$

$$v_x = \hat{u}\sin(2\pi\tau + \varphi) \quad \text{при} \quad y = b_1, \quad y = b_2. \tag{9}$$

Будем рассматривать задачу (7)–(9) при малых по сравнению с единицей значениях ε. Применим метод разложения по степеням малого параметра (см. [31, 32]). Предположим, что

$$v_x \sim v_{x0} + \varepsilon v_{x1} \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{10}$$

Используя (7)–(10), в ε^N-приближении ($N = 0,\ 1$) получим

$$\frac{\partial v_{xN}}{\partial\tau} + 2N\pi(\cos 2\pi\tau)\frac{\partial v_{x0}}{\partial y} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 v_{xN}}{\partial y^2} \quad \text{в} \quad \overline{\Omega}_1, \overline{\Omega}_2, \tag{11}$$

$$v_{xN} = -N(\sin 2\pi\tau)\frac{\partial v_{x0}}{\partial y} \quad \text{при} \quad y = 0, \quad y = 1, \tag{12}$$

$$v_{xN} = (1 - N)\hat{u}\sin(2\pi\tau + \varphi) \quad \text{при} \quad y = b_1, \quad y = b_2. \tag{13}$$

Здесь $\overline{\Omega}_1$ и $\overline{\Omega}_2$ — области соответственно $0 < y < b_1$ и $b_2 < y < 1$ ($-\infty < x < \infty$, $-\infty < z < \infty$).

Пусть $N = 0$. Задача (11)–(13) имеет решение

$$v_{x0} = \hat{u}\,\mathrm{Imag}\left[\frac{\operatorname{sh}\lambda y}{\operatorname{sh}\lambda b_1}e^{i(2\pi\tau+\varphi)}\right] \quad \text{для} \quad 0 \leqslant y \leqslant b_1, \tag{14}$$

$$v_{x0} = \hat{u}\,\mathrm{Imag}\left[\frac{\operatorname{sh}\lambda(1-y)}{\operatorname{sh}\lambda(1-b_2)}e^{i(2\pi\tau+\varphi)}\right] \quad \text{для} \quad b_2 \leqslant y \leqslant 1, \tag{15}$$

где $\lambda = (1+i)\sqrt{\pi\,\mathrm{Re}}$.

Пусть $N = 1$. Из (11)–(13) следует

$$2\pi\left\langle(\cos 2\pi\tau)\frac{\partial v_{x0}}{\partial y}\right\rangle = \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{d^2\bar{v}}{dy^2} \quad \text{в} \quad \overline{\Omega}_1,\ \overline{\Omega}_2, \tag{16}$$

$$\bar{v} = -\left\langle(\sin 2\pi\tau)\frac{\partial v_{x0}}{\partial y}\right\rangle \quad \text{при} \quad y = 0, \quad y = 1, \tag{17}$$

$$\bar{v} = 0 \quad \text{при} \quad y = b_1, \quad y = b_2. \tag{18}$$

Здесь $\langle\ldots\rangle = \int\limits_{\tau}^{\tau+1}\ldots\,d\tau'$; $\bar{v} = \langle v_{x1}\rangle$. Задача (11)–(13) имеет решение

$$v_{x1} = \begin{cases}\bar{v} + \mathrm{Real}(\tilde{v}_1 e^{4\pi i\tau}) & \text{для} \quad 0 \leqslant y \leqslant b_1,\\ \bar{v} + \mathrm{Real}(\tilde{v}_2 e^{4\pi i\tau}) & \text{для} \quad b_2 \leqslant y \leqslant 1,\end{cases} \tag{19}$$

где $\tilde{v}_1$, $\tilde{v}_2$ — функции y.

Используя (14)–(18), найдём

$$\bar{v} = \pi \operatorname{Re} \hat{u} \operatorname{Imag}\left[\frac{b_1 \operatorname{ch} \lambda y - (\operatorname{ch} \lambda b_1) y}{\lambda b_1 \operatorname{sh} \lambda b_1} e^{i\varphi}\right] \quad \text{для} \quad 0 \leqslant y \leqslant b_1, \tag{20}$$

$$\bar{v} = -\pi \operatorname{Re} \hat{u} \operatorname{Imag}\left[\frac{(1-b_2) \operatorname{ch} \lambda(1-y) - (\operatorname{ch} \lambda(1-b_2))(1-y)}{\lambda(1-b_2) \operatorname{sh} \lambda(1-b_2)} e^{i\varphi}\right] \quad \text{для} \quad b_2 \leqslant y \leqslant 1. \tag{21}$$

Формулами

$$v_x = v_{x0} + \varepsilon v_{x1}, \tag{22}$$

(5), (6), (14), (15), (19)–(21) определяется приближённое решение задачи (1)–(4). Из этого решения, в частности, следует, что жидкость (на фоне колебаний) совершает прямолинейное стационарное движение.

Остановимся на вопросе о среднем по времени течении жидкости при малых по сравнению с единицей значениях b_1, $1 - b_2$. Пусть

$$\hat{u} = \alpha b_1 \tag{23}$$

($\alpha > 0$ — постоянная); $q = (1/2)\alpha \cos\varphi$; $\eta = (1 - b_2)/b_1$. Используя (5), (14), (15), (19)–(23), получим

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \begin{cases} \varepsilon \bar{v} \mathbf{e}_x \sim \varepsilon q \dfrac{y - b_1}{b_1} \mathbf{e}_x & \text{для} \quad 0 \leqslant y \leqslant b_1, \\ \varepsilon \bar{v} \mathbf{e}_x \sim \varepsilon \dfrac{q}{\eta} \dfrac{y - b_2}{1 - b_2} \mathbf{e}_x & \text{для} \quad b_2 \leqslant y \leqslant 1 \end{cases} \tag{24}$$

при $b_1 \to 0$, $1 - b_2 \to 0$ и фиксированных η, Re.

Согласно (24) на фоне колебаний (при $\cos\varphi \neq 0$) в каждой из областей $\overline{\Omega}_1$, $\overline{\Omega}_2$ жидкость совершает движение в одном направлении, в областях $\overline{\Omega}_1$, $\overline{\Omega}_2$ движение жидкости происходит во взаимно противоположных направлениях; в частности, выполняются соотношения

$$b_1 \langle \mathbf{v} \rangle|_{y=0} = -(1 - b_2)\langle \mathbf{v} \rangle|_{y=1}, \qquad \int\limits_0^{b_1} \langle \mathbf{v} \rangle \, dy = -\int\limits_{b_2}^{1} \langle \mathbf{v} \rangle \, dy.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведённое рассмотрение позволяет сделать вывод о наличии эффекта, состоящего в том, что в отсутствие выделенного направления в пространстве вязкая жидкость, подвергающаяся периодическим по времени воздействиям, производит однонаправленные реакции на воздействия, выражающиеся в том, что свободные части гидромеханической системы (жидкие слои) на фоне колебаний совершают прямолинейное стационарное движение. Происходит «порождение порядка из хаоса». Причина данного эффекта состоит в согласованности (друг с другом) оказываемых на жидкость воздействий, что находится в непосредственной связи с принципом среднего движения (см. [29, 33], а также [30]). Отметим, что данный принцип может быть обобщен. Основополагающей причиной среднего по времени движения свободных частей гидромеханической системы (частей системы, движение которых не задано) при периодических по времени (колебательных, вибрационных) воздействиях на систему, не имеющих выделенного направления в пространстве, является возможность совершения свободными частями системы движения в различных направлениях в пространстве в неодинаковых условиях.

Результаты настоящей работы, в частности, могут служить теоретической основой для проведения направленных экспериментальных исследований нетривиальной динамики гидромеханических систем при периодических по времени воздействиях, а также использоваться при создании гидромеханических систем, обладающих предписанными свойствами, например систем, заданным образом реагирующих на колебательные воздействия.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Челомей В. Н.* Парадоксы в механике, вызываемые вибрациями // Докл. АН СССР. 1983. Т. 270, № 1. С. 62–67.
2. *Сенницкий В. Л.* О движении кругового цилиндра в вибрирующей жидкости // Прикл. механика и техн. физика. 1985. № 5. С. 19–23.
3. *Сенницкий В. Л.* Движение шара в жидкости, вызываемое колебаниями другого шара // Прикл. механика и техн. физика. 1986. № 4. С. 31-–36.
4. *Луговцов Б. А., Сенницкий В. Л.* О движении тела в вибрирующей жидкости // Докл. АН СССР. 1986. Т. 289, № 2. С. 314–317.
5. *Любимов Д. В., Любимова Т. П., Черепанов А. А.* О движении твёрдого тела в вибрирующей жидкости // Конвективные течения. Пермь: изд. Перм. пед. ин-та, 1987. С. 61–71.
6. *Сенницкий В. Л.* О движении газового пузыря в вязкой вибрирующей жидкости // Прикл. механика и техн. физика. 1988. № 6. С. 107–113.
7. *Сенницкий В. Л.* Преимущественно однонаправленное движение газового пузыря в вибрирующей жидкости // Докл. АН СССР. 1991. Т. 319, № 1. С. 117–119.
8. *Сенницкий В. Л.* Преимущественно однонаправленное движение сжимаемого твёрдого тела в вибрирующей жидкости // Прикл. механика и техн. физика. 1993. № 1. С. 100–101.
9. *Sennitskii V. L.* On motion of inclusions in uniformly and non-uniformly vibrating liquid // Intern. workshop on G-jitter: Proc. Potsdam (USA): Clarkson Univ., 1993. P. 178–186.
10. *Lyubimov D. V.* New approach in the vibrational convection theory // Proc. 14 IMACs Congress on Computational and Applied Mathematics. Atlanta, Georgia, USA: Georgia Institute of Technonogy, 1994. P. 59–68.
11. *Lyubimov D. V.* Thermovibrational flows in nonuniform systems // Microgravity Quarterly. 1994. V. 4, N 1. P. 221–225.
12. *Любимов Д. В., Перминов А. В., Черепанов А. А.* Генерация осреднённых течений в вибрационном поле вблизи поверхности раздела сред // Вибрационные эффекты в гидродинамике. Пермь: изд. Перм. гос. ун-та, 1998. С. 204–221.
13. *Lavrenteva O. M.* On the motion of particles in non-uniformly vibrating liquid // Europ. J. Appl. Math. 1999. V. 10, N 3. P. 251–263.
14. *Сенницкий В. Л.* Движение шара в жидкости в присутствии стенки при колебательных воздействиях // Прикл. механика и техн. физика. 1999. Т. 40, № 4. С. 125–132.
15. *Сенницкий В. Л.* О движении пульсирующего твёрдого тела в вязкой колеблющейся жидкости // Прикл. механика и техн. физика. 2001. Т. 42, № 1. С. 82–86.
16. *Любимов Д. В., Любимова Т. П., Черепанов А. А.* Динамика поверхностей раздела в вибрационных полях. М.: Физматлит, 2003.
17. *Hassan S., Lyubimova T. P., Lyubimov D. V., Kawaji M.* Motion of a sphere suspended in a vibrating liquid-filled container // J. Appl. Mech. 2006. V. 73, N 1. P. 72–78.
18. *Сенницкий В. Л.* О движении включения в однородно и неоднородно колеблющейся жидкости // Прикл. механика и техн. физика.2007. Т. 48, № 1. С. 79–85.
19. *Иванова А. А., Козлов В. Г., Кузаев А. Ф.* Вибрационное взаимодействие сферического тела с границами полости // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2008. № 2. С. 31–40.
20. *Сенницкий В. Л.* О колебательном движении неоднородного твёрдого шара в вибрирующей жидкости // Прикл. механика и техн. физика. 2009. Т. 50, № 6. С. 27–35.
21. *Lyubimov D. V., Baydin A. Y., Lyubimova T. P.* Particle dynamics in a fluid under high frequency vibrations of linear polarization // Microgravity Sci. Technology. 2013. V. 25. P. 121–126; DOI: 10.1007/s12217-012-9336-3
22. *Пятигорская О. С., Сенницкий В. Л.* О движении твёрдых частиц в колеблющейся жидкости // Прикл. механика и техн. физика. 2013. Т. 54, № 3. С. 74–78.
23. *Алабужев А. А.* Поведение цилиндрического пузырька под действием вибраций // Вычисл. механика сплошных сред. 2014. Т. 7, № 2. С. 151–161.

24. *Vlasova O. A., Kozlov V. G.* The repulsion of flat body from the wall of vibrating container filled with liquid // Microgravity Sci. Technology. 2015. V. 27. P. 297–303; DOI: 10.1007/s12217-015-9460-y

25. *Сенницкий В. Л.* О заданной ориентации твёрдого включения в вязкой жидкости // Сиб. журн. индустр. математики. 2015. Т. 18, № 1. С. 123–128.

26. *Сенницкий В. Л.* Преимущественно однонаправленное вращение твёрдого тела и вязкой жидкости // Сиб. журн. индустр. математики. 2017. Т. 20, № 2. С. 93–97; DOI: 10.17377/sibjim.2017.20.210

27. *Коновалов В. В., Любимова Т. П.* Численное исследование влияния вибраций на взаимодействие в ансамбле газовых пузырьков и твёрдых частиц в жидкости // Вычисл. механика сплошных сред. 2019. Т. 12, № 1. С. 48–56; DOI: 10.7242/1999-6691/2019.12.1.5

28. *Sennitskii V. L.* Predominantly unidirectional rotation of a viscous liquid with a free boundary // Thermophysics and Aeromechanics. 2020. V. 27, N 1. P. 157–160; DOI: 10.1134/S0869864320010175

29. *Сенницкий В. Л.* Движение включений в колеблющейся жидкости // Сиб. физ. журн. 1995. № 4. С. 18–26.

30. *Сенницкий В. Л.* Парадоксальное движение жидкости // Международный журн. прикладных и фундаментальных исследований. 2017. № 8, ч. 1. С. 28–33; DOI: 10.17513/mjpfi.11753.

31. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматлит, 1958.

32. *Найфэ А.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976.

33. *Сенницкий В. Л.* О силовом взаимодействии шара и вязкой жидкости в присутствии стенки // Прикл. механика и техн. физика. 2000. Т. 41, № 1. С. 57–62.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 532.516

PREDOMINANTLY UNIDIRECTIONAL FLOW OF A VISCOUS LIQUID

© 2021 **V. L. Sennitskii** [1,2]

[1] *Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS,*
pr. Akad. Lavrentyeva 15, Novosibirsk 630090, Russia,
[2] *Novosibirsk State University, ul. Pirogova 1, Novosibirsk 630090, Russia*

E-mail: sennitskii@yandex.ru

Received 25.11.2019, revised 12.01.2021, accepted 15.04.2021

Abstract. Under consideration is the problem of the flow of a viscous liquid in the presence of solid bodies (namely, the two walls and a plate whose boundary is permeable for the liquid) under some influences periodical in time. The formulation of the problem includes the equation of Navier–Stokes, the equation of continuity, and the conditions at the solid boundaries of the liquid. The new hydro-mechanical effect is revealed which consists in the following: in the absence of a predominant direction in space, the free parts of the hydro-mechanical system (i.e., the liquid layers) perform the unidirectional steady motion at a background of oscillations.

Keywords: viscous liquid, oscillations, permeable boundary, absence of a predominant direction, steady motion.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.210

REFERENCES

1. Chelomei V.N. Paradoxes in mechanics caused by vibrations. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1983, Vol. 270, No. 1, pp. 62–67 (in Russian).
2. Sennitskii V.L. Motion of a circular cylinder in a vibrating liquid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1985, Vol. 26, No. 5, pp. 630–634.
3. Sennitskii V.L. Motion of a sphere in a liquid caused by vibrations of another sphere. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1986, Vol. 27, No. 4, pp. 542–547.
4. Lugovtsov B.A., Sennitskii V.L. Motion of a body in a vibrating liquid. *Soviet Phys. Dokl.*, 1986, Vol. 31, pp. 530–531.
5. Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Cherepanov A.A. On the motion of a solid body in a vibrating fluid. *Convective Flows.* Perm: Perm. Ped. Inst., 1987, pp. 61–71 (in Russian).
6. Sennitskii V.L. Motion of a gas bubble in a viscous vibrating liquid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1988, Vol. 29, No. 6, pp. 865–870.
7. Sennitskii V.L. Predominantly unidirectional motion of a gas bubble in a vibrating liquid. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1991, Vol. 319, No. 1, pp. 117–119 (in Russian).
8. Sennitskii V.L. Predominantly unidirectional motion of a compressible solid body in a vibrating liquid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1993, Vol. 34, No. 1, pp. 96–97.
9. Sennitskii V.L. On motion of inclusions in uniformly and non-uniformly vibrating liquid. Intern. Workshop on G-jitter: Proc. Potsdam (USA): Clarkson Univ., 1993, pp. 178–186.

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2021, Vol. 15, No. 2; DOI: 10.1134/S1990478921020149

10. Lyubimov D.V. New approach in the vibrational convection theory. *Proc. 14 IMACs Congress on Computational and Applied Mathematics*. Atlanta, Georgia, USA: Georgia Institute of Technonogy, 1994, pp. 59–68.

11. Lyubimov D.V. Thermovibrational flows in nonuniform systems. *Microgravity Quarterly*, 1994, Vol. 4, No. 1, pp. 221–225.

12. Lyubimov D.V., Perminov A.V., Cherepanov A.A. Generation of averaged flows in a vibrational field near the interface between media. *Vibration Effects in Hydrodynamics*. Perm: Perm. Ped. Inst., 1998, pp. 204–221 (in Russian).

13. Lavrenteva O.M. On the motion of particles in non-uniformly vibrating liquid. *Europ. J. Appl. Math.*, 1999, Vol. 10, No. 3, pp. 251–263.

14. Sennitskii V.L. Motion of a ball in a liquid in the presence of a wall under oscillatory influences. *Prikl. Mekh. i Tekhn. Fiz.*, 1999, Vol. 40, No. 4, pp. 125–132 (in Russian).

15. Sennitskii V.L. Motion of a pulsating solid body in an oscillating viscous liquid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2001, Vol. 42, No. 1, pp. 72–76.

16. Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Cherepanov A.A. Dynamics of separation surfaces in vibrating fields. Moscow: Fizmatlit, 2003 (in Russian).

17. Hassan S., Lyubimova T.P., Lyubimov D.V., Kawaji M. Motion of a sphere suspended in a vibrating liquid-filled container. *J. Appl. Mech.*, 2006, Vol. 73, No. 1, pp. 72–78.

18. Sennitskii V.L. Motion of an inclusion in uniformly and nonuniformly vibrating liquids. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2007, Vol. 48, No. 1, pp. 65–70.

19. Ivanova A.A., Kozlov V.G., Kuzaev A.F. Vibrational interaction of a spherical body with the boundaries of a cavity. *Izv. Ross. Akad. Nauk. Mech. Zhidk. i Gaza*, 2008, No. 2, pp. 31–40 (in Russian).

20. Sennitskii V.L. Oscillatory motion of an inhomogeneous solid sphere in a vibrating liquid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2009, Vol. 50, No. 6, pp. 936–943.

21. Lyubimov D.V., Baydin A.Y., Lyubimova T.P. Particle dynamics in a fluid under high frequency vibrations of linear polarization. *Microgravity Sci. Technology*, 2013, Vol. 25, pp. 121–126.

22. Pyatigorskaya O.S., Sennitskii V.L. Motion of solid particles in an oscillating liquid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2013, Vol. 54, No. 3, pp. 404–407.

23. Alabuzhev A.A. Behavior of a cylindrical bubble under the influence of vibrations. *Vychisl. Mekh. Sploshn. Sred*, 2014, Vol. 7, No. 2, pp. 151–161 (in Russian).

24. Vlasova O.A., Kozlov V.G. The repulsion of flat body from the wall of vibrating container filled with liquid. *Microgravity Sci. Technology*, 2015, Vol. 27, pp. 297–303.

25. Sennitskii V.L. On a prescribed orientation of a solid inclusion in a viscous liquid. *Sibir. Zh. Indust. Mat.*, 2015, Vol. 18, No. 1, pp. 123–128 (in Russian).

26. Sennitskii V.L. Predominantly unidirectional rotation of a solid body and a viscous liquid. *J. Appl. Ind. Math.*, 2017, Vol. 11, No. 2, pp. 284–288.

27. Konovalov V.V., Lyubimova T.P. Numerical study of the influence of vibrations on the interaction in an ensemble of gas bubbles and solid particles in a liquid. *Vychisl. Mekh. Sploshn. Sred*, 2019, Vol. 12, No. 1, pp. 48–56 (in Russian).

28. Sennitskii V.L. Predominantly unidirectional rotation of a viscous liquid with a free boundary. *Thermophysics and Aeromechanics*, 2020, Vol. 27, No. 1, pp. 157–160.

29. Sennitskii V.L. Movement of inclusions in an oscillating fluid. *Sibir. Fiz. Zh.*, 1995, No. 4, pp. 18–26 (in Russian).

30. Sennitskii V.L. Paradoxical motion of a liquid. *Mezhdunarodn. Zh. Prikl. i Fundam. Issled.*, 2017, No. 8, ch. 1, pp. 28–33 (in Russian).

31. Bogolyubov N.N., Mitropol'skii Yu.A. Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations. Moscow: Fizmatlit, 1958 (in Russian).

32. Naifeh A. Perturbation Methods. N. Y.: Wiley & Sons, 1973.

33. Sennitskii V.L. Force interaction of a sphere and a viscous fluid in the presence of a wall. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2000, Vol. 41, No. 1, pp. 50–55.