УДК 519.632

ПРЯМОЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

С. Б. Сорокин[1,2]

[1]*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, просп. Акад. М. А. Лаврентьева, 6, Новосибирск 630090, Россия,*
[2]*Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090, Россия*

E-mail: sorokin@sscc.ru

Поступила в редакцию 09.03.2021 г.; после доработки 19.03.2021 г.;
принята к публикации 15.04.2021 г.

Представлен прямой численный метод решения обратной коэффициентной задачи для эллиптического уравнения с кусочно-постоянными коэффициентами. Предполагается, что точки разрыва коэффициентов известны. Алгоритм основан на теории спектральных задач линейной алгебры и применении конечно-разностных методов решения эллиптических уравнений. В качестве дополнительной информации используются значения (измерения) решения в точках разрыва коэффициентов. Для невозмущенной дополнительной информации коэффициенты восстанавливаются точно.

Ключевые слова: обратная коэффициентная задача, численное решение, спектральная задача, точная разностная схема, прямой метод.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.211

ВВЕДЕНИЕ

Одной из важных обратных задач является задача определения неизвестных параметров неоднородного материала. С точки зрения математического моделирования такая задача состоит в определения неизвестных коэффициентов дифференциальных уравнений, описывающих исследуемый физический процесс. Такого рода задачи возникают при моделировании процессов теплопроводности, диффузии, фильтрации и т. п. Различные постановки и методы решения задачи восстановления (идентификации) коэффициентов дифференциальных уравнений по дополнительной информации, получаемой из экспериментов, рассмотрены в большом количестве монографий, посвящённых теории обратных задач (см., например, [1–5]). Проблемы существования, единственности решения и построения алгоритмов численного решения обратной коэффициентной задачи для эллиптических уравнений обсуждались, например, в работах [6–15].

Особо отметим работы [6, 13]. В [6] предлагается подход, основанный на методе множества функций уровней для эллиптических обратных задач с кусочно-постоянными коэффициентами. Геометрия разрыва коэффициента неявно представлена специальными функциями, называемыми функциями набора уровня. Решается обратная задача по восстановлению как кусочно-постоянных коэффициентов уравнения, так и областей их расположения. В работе [13] решается обратная задача одновременного определения матрицы диффузии, источника

Работа поддержана государственным заданием Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН (проект 0315-2019-0001).

и граничного условия, а также состояния в краевой задаче Неймана для эллиптического дифференциального уравнения в частных производных по данным измерений.

Во всех цитируемых работах, посвящённых алгоритмам решения обратной коэффициентной задачи для эллиптических уравнений, используется вариационный метод, основанный на минимизации того или иного функционала. Процесс минимизации реализуется с помощью явного итерационного метода, как правило, типа сопряжённых градиентов. При этом число обусловленности решаемой задачи очень велико, что и приводит к необходимости реализации большого количества итераций и, как следствие, к существенным затратам времени на реализацию алгоритма. В тоже время для классических обратных задач, возможно, в менее общих, но достаточно содержательных постановках, могут быть предложены экономичные прямые методы их решения (см., например, [16, 17]). Время, необходимое на реализацию таких алгоритмов, существенно меньше, чем реализация для них итерационных процедур. Полезность наличия экономичных прямых алгоритмов состоит ещё и в том, что на их основе можно конструировать неявные итерационные методы для решения более общих задач. Эффективность применения неявных итерационных методов, имеющих гораздо более высокую скорость сходимости по сравнению с обычно применяемыми при решении обратных задач явными итерационными методами, показана в [18].

Данная статья посвящена идентификации коэффициентов теплопроводности отдельных однородных частей составного тела. В качестве дополнительной информации используются значения (измерения) температуры в точках разрыва коэффициентов. Предполагается, что точки разрыва коэффициентов известны. Таким образом, в отличие от большинства работ, в которых требуется достаточно подробная информация о температуре тела (о решении эллиптического уравнения), в предлагаемом методе необходимо знать температуру только в небольшом количестве точек, равном числу разрывов. В работе предложен оригинальный прямой метод решения обратной коэффициентной задачи для эллиптического уравнения с кусочно-постоянными коэффициентами. Он основан на фундаментальных положениях линейной алгебры в области спектральных задач и возможности построения точных разностных схем для рассматриваемого класса задач.

Статья имеет следующую структуру. В разд. 1 формулируется постановка задачи. Разд. 2, 3 содержат информацию, необходимую для построения предлагаемого алгоритма: приводятся сведения из линейной алгебры, связанные с теорией спектральных задач и необходимые для построения алгоритма, и краткое описание построения точной разностной схемы для задачи с кусочно-постоянными коэффициентами на неравномерной сетке. Описание прямого метода решения обратной коэффициентной задачи для эллиптического уравнения с кусочно-постоянными коэффициентами и его реализация в случае возмущённой дополнительной информации излагаются в разд. 4 и 5. Наконец, в разд. 6 описываются и обсуждаются результаты проведённых тестовых расчётов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задача определения характеристик материала по изменениям состояния системы часто встречается при обработке технологических процессов, создании и эксплуатации технических объектов и проведении различных исследований. Такого сорта задачи широко распространены в процессах, связанных с тепло- и массообменом [1, 19–22]. Например, при закалке стали задача определения теплофизических характеристик для слитка в процессе его охлаждения имеет большое практическое значение. Другая важная практическая задача — определение характеристик теплозащитных материалов.

Следующим примером может служить задача определения поля проницаемости нефтяного пласта по измерениям давлений и расходов жидкости на скважинах. Предполагается, что известны давление и расход жидкости на скважинах, т. е. величины, доступные непосредственным измерениям. Эта задача представляет интерес в связи с разработкой нефтяных и газовых месторождений, эксплуатацией подземных водоносных горизонтов.

В настоящее время ведётся интенсивное освоение северных территорий. Оно сопряжено с техногенным загрязнением мёрзлых грунтов. Это усиливает деградацию многолетней мерзлоты, приводит к заболачиванию огромных территорий, потере несущей способности грунта, миграции экологически опасных загрязнителей в речную систему. В связи с этим восстановление теплофизических и массообменных характеристик с учётом процесса промерзания-протаивания порового раствора является актуальной задачей экологии.

При исследовании описанных процессов в качестве математической модели обычно используют уравнения параболического или эллиптического типа.

Рассмотрим краевую задачу для уравнения

$$\begin{gathered} Lu \equiv -\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) = f(x), \quad x \in (a,b), \\ u(a) = 0, \quad u(b) = 0. \end{gathered} \tag{1}$$

На коэффициент $k(x)$ наложим обычные для эллиптических уравнений условия $0 < c_1 \leqslant k(x) \leqslant c_2$ для любого $x \in (a,b)$. Кроме того, будем считать $k(x)$ кусочно-постоянной функцией, точки разрыва которой известны.

Задача. Определить функцию $k(x)$ по информации о решениях задачи (1) для набора правых частей.

2. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Пусть матрица A симметрична: $A = A^T$. Тогда она представима в виде

$$A = Q\Lambda Q^T. \tag{2}$$

Здесь Λ — диагональная матрица, на диагонали которой расположены собственные числа λ_i матрицы A, а Q — ортогональная матрица, столбцами которой являются ортонормированные собственные векторы φ_i матрицы A, отвечающие собственным числам λ_i.

Спектральные задачи $A\varphi = \lambda\varphi$ и

$$U^T A U\psi = \mu U^T U\psi, \tag{3}$$

где U — произвольная невырожденная матрица той же размерности, что и A, имеют одинаковые собственные числа, а их собственные векторы связаны соотношением $\varphi = U\psi$.

Как правило, программы, решающие обобщённую спектральную задачу (3), вычисляют её собственные векторы ψ_i такие, что выполнено условие $(U^T U\psi_i, \psi_j) = \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$ Это означает, что соответствующие собственные векторы $\varphi_i = U\psi_i$ матрицы A будут ортонормированы.

3. ТОЧНАЯ СХЕМА ДЛЯ ЗАДАЧИ (1) С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ $k(x)$ НА НЕРАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ

В этом разделе мы представим точную разностную схему для дифференциальной задачи (1), т. е. получим разностную схему, решение которой в точности совпадает с решением задачи (1) в выбранном наборе точек отрезка (узлах сетки). Эта схема является частным случаем схем, построенных в [23, 24] для одномерных эллиптических уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами.

Поскольку вид схемы непосредственно участвует в рассуждениях, проводимых далее, кратко приведём её вывод. Построим на отрезке (a,b) неравномерную сетку:

$$x_{i+1} = x_i + h_i, \quad i = \overline{0,N}, \quad x_0 = a, \quad x_{N+1} = b.$$

Точки разрыва коэффициента $k(x)$ включим в узлы сетки.

Умножим уравнение (1) на функцию

$$e_i(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}), \\ \dfrac{x - x_{i-1}}{h_{i-1}}, & x \in (x_{i-1}, x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{h_i}, & x \in (x_i, x_{i+1}), \end{cases}$$

и проинтегрируем по отрезку (x_{i-1}, x_{i+1}):

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} -\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right)e_i(x)\,dx = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)e_i(x)\,dx.$$

Преобразуем левую часть этого уравнения с помощью интегрирования по частям, учитывая непрерывность потока $k(x)\dfrac{du}{dx}$:

$$I := \int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} -\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right)e_i(x)\,dx = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} -\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right)e_i(x)\,dx + \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} -\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right)e_i(x)\,dx$$
$$= \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} k(x)\frac{du}{dx}\frac{d}{dx}e_i(x)\,dx + \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} k(x)\frac{du}{dx}\frac{d}{dx}e_i(x)\,dx$$
$$= \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} k(x)\frac{du}{dx}\frac{1}{h_{i-1}}\,dx + \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} k(x)\frac{du}{dx}\frac{-1}{h_i}\,dx.$$

Поскольку коэффициент $k(x)$ кусочно-постоянен и точки его разрыва включены в узлы сетки, то на каждом интервале (x_i, x_{i+1}) он принимает постоянное значение. Обозначим это значение $k_{i+1/2} = k(x_{i+1/2})$, $x_{i+1/2} = (x_i + x_{i+1})/2$. Тогда верхнее равенство можно продолжить следующим образом:

$$I = k_{i-1/2}\frac{1}{h_{i-1}}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{du}{dx}\,dx + k_{i+1/2}\frac{-1}{h_i}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{du}{dx}\,dx$$
$$= -k_{i+1/2}\frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h_i} + k_{i-1/2}\frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{h_{i-1}}.$$

В результате получаем, что значения $u(x_i)$ точного решения уравнения (1), вычисленные в узлах сетки, удовлетворяют соотношениям

$$-k_{i+1/2}\frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h_i} + k_{i-1/2}\frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{h_{i-1}} = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)e_i(x)\,dx.$$

Следовательно, решение y_i разностной схемы

$$(L_h y)_i \equiv -k_{i+1/2}\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} + k_{i-1/2}\frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} = f_i^h, \quad i=\overline{1,N},$$
$$f_i^h = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)e_i(x)\,dx, \tag{4}$$
$$y_0 = 0, \quad y_{N+1} = 0,$$

совпадает со значением $u(x_i)$ точного решения уравнения (1).

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КУСОЧНО-ПОСТОЯННОГО КОЭФФИЦИЕНТА $k(x)$ ПО ИНФОРМАЦИИ О РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ (1) ДЛЯ НАБОРА ПРАВЫХ ЧАСТЕЙ

Теперь мы имеем все необходимое для описания метода. Для простоты изложения рассмотрим случай, когда кусочно-постоянный коэффициент $k(x)$ имеет две точки разрыва c, d:

$$k(x) = \begin{cases} k_1, & a < x < c, \\ k_2, & c < x < d, \\ k_3, & d < x < b. \end{cases} \tag{5}$$

Пусть мы знаем решения $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ задачи (1), (5) в точках c, d для двух линейно независимых правых частей $f^{(1)}$, $f^{(2)}$. Рассматривая эти точки как внутренние узлы ($x_1 = c$, $x_2 = d$) сетки, построенной на этом отрезке для $N = 2$:

$$x_0 = a, \quad h_0 = x_1 - a, \quad h_1 = x_2 - x_1, \quad h_2 = b - x_2, \quad x_3 = b,$$

будем иметь $k_{1/2} = k_1$, $k_{1+1/2} = k_2$, $k_{2+1/2} = k_3$.

Построим на этой сетке точную разностную схему для (1), (5): $L_h\, y = f^h$.

В матричном виде схема может быть записана в виде

$$\mathbf{L}_h y \equiv \begin{bmatrix} \dfrac{k_1}{h_0} + \dfrac{k_2}{h_1} & -\dfrac{k_2}{h_1} \\ -\dfrac{k_2}{h_1} & \dfrac{k_2}{h_1} + \dfrac{k_3}{h_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \bar{f}^h, \quad \bar{f}^h = \begin{bmatrix} \bar{f}_1^h \\ \bar{f}_2^h \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} f_1^h \\ f_2^h \end{bmatrix}.$$

В силу точности разностной схемы решения $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ дифференциальной задачи (1) в точках $x_1 = c$, $x_2 = d$ являются точными решениями разностных задач (при соответствующих правых частях $f^{(1)}$, $f^{(2)}$). Следовательно, выполняется матричное равенство,

$$\mathbf{L}_h \mathbf{U} = \mathbf{F}, \tag{6}$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u^{(1)}(x_1) & u^{(2)}(x_1) \\ u^{(1)}(x_2) & u^{(2)}(x_2) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \bar{f}_1^{\,h(1)} & \bar{f}_1^{\,h(2)} \\ \bar{f}_2^{\,h(1)} & \bar{f}_2^{\,h(2)} \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим задачу вида (3) для матрицы $\mathbf{L}_h^2$: $\mathbf{U}^T\mathbf{L}_h^2\mathbf{U}\psi = \mu\mathbf{U}^T\mathbf{U}\psi$. Используя соотношение (6) и симметричность $\mathbf{L}$, нетрудно получить, что $\mathbf{U}^T\mathbf{L}_h^2\mathbf{U} = (\mathbf{L}\mathbf{U})^T\mathbf{L}_h\mathbf{U} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$. Таким образом, последняя спектральная задача записывается в виде

$$\mathbf{F}^T\mathbf{F}\psi = \mu\mathbf{U}^T\mathbf{U}\psi. \tag{7}$$

Заметим, что для конструирования задачи (7) нам не нужна матрица $\mathbf{L}_h$ в явном виде. (Мы её должны вычислить.) Нужны лишь «воздействия и отклик на них», т. е. матрицы $\mathbf{F}$, $\mathbf{U}$.

Решив спектральную задачу (7), мы, в соответствии с разд. 3, найдём $\varphi = \mathbf{U}\psi$ — собственные векторы и собственные числа $\nu = \mu$ спектральной задачи $\mathbf{L}_h^2\varphi = \nu\varphi$. После этого, зная собственные числа $\lambda = \sqrt{\nu}$ и собственные векторы φ матрицы $\mathbf{L}_h$, по формуле (2) мы можем построить эту матрицу $\mathbf{L}_h$:

$$\mathbf{L}_h = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^T = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{12} & l_{22} \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Наконец, вычислив матрицу (8), используя выражение матрицы $\mathbf{L}_h$ через искомые значения кусочно-постоянного коэффициента $k(x)$, из уравнения

$$\begin{bmatrix} \dfrac{k_1}{h_0} + \dfrac{k_2}{h_1} & -\dfrac{k_2}{h_1} \\ -\dfrac{k_2}{h_1} & \dfrac{k_2}{h_1} + \frac{k_3}{h_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{12} & l_{22} \end{bmatrix}$$

легко находятся подлежащие определению k_1, k_2, k_3.

5. ВОССТАНОВЛЕНИЕ КУСОЧНО-ПОСТОЯННОГО КОЭФФИЦИЕНТА $k(x)$ ПО ВОЗМУЩЁННОЙ ИНФОРМАЦИИ О РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ

Пусть вместо точного решения $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ задачи (1), (5) в точках $x_1 = c$, $x_2 = d$ для двух линейно-независимых правых частей $f^{(1)}$, $f^{(2)}$ в нашем распоряжении имеются возмущённые (измеренные) данные $u_\delta^{(1)}(x_1)$, $u_\delta^{(1)}(x_2)$ и $u_\delta^{(2)}(x_1)$, $u_\delta^{(2)}(x_2)$.

Будем считать, что $u_\delta^{(i)}(x_j) = u^{(i)}(x_j) + \delta_{ji}$, где δ_{ji} — ошибка измерения i-го решения в j-й точке. Тогда для матрицы $\mathbf{U}$ из (6) и матрицы

$$\mathbf{U}_\delta = \begin{bmatrix} u_\delta^{(1)}(x_1) & u_\delta^{(2)}(x_1) \\ u_\delta^{(1)}(x_2) & u_\delta^{(2)}(x_2) \end{bmatrix}$$

выполняется

$$\mathbf{U}_\delta = \mathbf{U} + \mathbf{\Delta}, \quad \mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix}, \tag{9}$$

$$\|\mathbf{U} - \mathbf{U}_\delta\| < \delta, \quad \delta = \|\mathbf{\Delta}\|. \tag{10}$$

Здесь и далее в качестве нормы матрицы используется норма $\|\mathbf{C}\| = \sqrt{\max\limits_i \lambda_i(\mathbf{C}^T\mathbf{C})} = \sqrt{\max\limits_i \lambda_i(\mathbf{C}\mathbf{C}^\mathbf{T})}$, где обозначение $\lambda_i(\mathbf{D})$ означает собственное число матрицы $\mathbf{D}$.

В случае неточной информации о решениях задачи мы вынуждены для восстановления матрицы $\mathbf{L}_h$ вместо (7) использовать спектральную задачу

$$\mathbf{F}^T\mathbf{F}\psi_\delta = \mu_\delta {\mathbf{U}_\delta}^T\mathbf{U}_\delta\psi_\delta. \tag{11}$$

В соответствии с (9), (10) имеем

$$\begin{gathered} {\mathbf{U}_\delta}^T\mathbf{U}_\delta = (\mathbf{U} + \mathbf{\Delta})^T(\mathbf{U} + \mathbf{\Delta}) = \mathbf{U}^T\mathbf{U} + \mathbf{W}, \\ \mathbf{W} = \mathbf{W}^T = \mathbf{U}^T\mathbf{\Delta} + \mathbf{\Delta}^T\mathbf{U} + \mathbf{\Delta}^T\mathbf{\Delta}, \\ \|\mathbf{W}\| \leqslant 2\delta\|\mathbf{U}\| + \delta^2. \end{gathered}$$

Таким образом, спектральная задача (11) с симметричными, положительно определёнными матрицами $\mathbf{F}^T\mathbf{F}$, ${\mathbf{U}_\delta}^T\mathbf{U}_\delta$ является возмущённой по отношению к спектральной задаче (7) с симметричными, положительно определёнными матрицами $\mathbf{F}^T\mathbf{F}$, $\mathbf{U}^T\mathbf{U}$ с симметричным возмущением $\mathbf{W}$, норма которого стремится к нулю с уменьшением δ.

Нетрудно установить, что собственные числа задачи (7) (совпадающие с квадратами собственных чисел матрицы $\mathbf{L}_h$) различны. В этих условиях спектральная задача (7) хорошо обусловлена [25] и $\mu_\delta \to \mu$, $\psi_\delta \to \psi$ при $\delta \to 0$.

6. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Для проверки работоспособности представленного алгоритма были проведены тестовые расчёты.

6.1. Тест 1

Вычислительные эксперименты проводились для задачи

$$Lu \equiv -\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) = f(x), \quad x \in (0,1),$$
$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0.$$

Кусочно-постоянный коэффициент $k(x)$ имеет две точки разрыва $c = 1/8$, $d = 1/2$:

$$k(x) = \begin{cases} k_1, & 0 < x < 1/8, \\ k_2, & 1/8 < x < 1/2, \\ k_3, & 1/2 < x < 1. \end{cases}$$

В качестве двух линейно-независимых правых частей $f^{(1)}$, $f^{(2)}$ были взяты функции

$$f^{(1)}(x) = \begin{cases} x^2, & 0 < x < 1/8, \\ 0, & 1/8 < x < 1/2, \\ 0, & 1/2 < x < 1, \end{cases} \qquad f^{(2)}(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 1/8, \\ x^2, & 1/8 < x < 1/2, \\ 0, & 1/2 < x < 1. \end{cases}$$

Для коэффициентов $k_1 = 1$, $k_2 = 4$, $k_3 = 8$ этим правым частям соответствуют точные решения:

$$u^{(1)}(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{12}x^4 + \dfrac{2}{9}\dfrac{1}{8^3}x, & 0 < x < 1/8, \\ -\dfrac{2}{9}\dfrac{1}{8^4}x + \dfrac{1}{6}\dfrac{1}{8^4}, & 1/8 < x < 1/2, \\ -\dfrac{1}{9}\dfrac{1}{8^4}(x-1), & 1/2 < x < 1, \end{cases} \quad u^{(2)}(x) = \begin{cases} \dfrac{83}{12}\dfrac{1}{8^3}x, & 0 < x < 1/8, \\ -\dfrac{1}{48}x^4 + \dfrac{29}{2}\dfrac{1}{8^4}x + \dfrac{41}{8^5}, & 1/8 < x < 1/2, \\ -\dfrac{169}{12}\dfrac{1}{8^4}(x-1), & 1/2 < x < 1. \end{cases}$$

Результаты расчётов представлены в табл. 1. В первом столбце табл. 1 указан уровень возмущения, вносимый в точное решение. Возмущение вносилось по следующему правилу: $u_\delta^{(i)}(x_j) = u^{(i)}(x_j)\left(1 + \dfrac{\delta}{100} \times \mathrm{rand}(j)\right)$, где δ — процент возмущения, $\mathrm{rand}(j)$ — равномерное случайное распределение на отрезке $[-1,1]$. Для получения каждого возмущённого значения $u_\delta^{(i)}(x_j)$, $i,j = 1,2$, точного решения $u^{(i)}(x_j)$ использовалось своё равномерное случайное распределение.

С вычисленными таким образом $u_\delta^{(i)}(x_j)$, $i,j = 1,2$, формировалась и решалась спектральная задача (11). Коэффициенты $k_1 = 1$, $k_2 = 4$, $k_3 = 8$ восстанавливались в соответствии с изложенным в разд. 4 алгоритмом.

Таблица 1

Тест 1

%	k_1	k_2	k_3
$\delta = 0$	1,0	4,0	8,0
$\delta = 1$	1,003 1,016 0,993	4,101 3,958 4,005	8,013 7,925 8,022
$\delta = 3$	0,987 0,995 0,934	4,267 3,801 4,186	8,283 7,885 8,397
$\delta = 5$	0,978 0,988 0,981	4,123 4,213 3,803	8,292 8,034 7,885
$\delta = 10$	0,929 8,034 7,885	3,339 3,536 5,212	8,753 8,326 9,115

В столбцах 2–4 размещены вычисленные приближённые значения восстанавливаемых коэффициентов. При $\delta = 0$ коэффициенты определяются точно. При $\delta > 0$ в каждой строчке таблицы, соответствующей используемому в расчётах возмущению, для каждого из восстанавливаемых коэффициентов приведены результаты трёх независимых расчётов с разными случайными распределениями $\mathrm{rand}(j)$.

Анализируя полученные в расчётах результаты, можно констатировать, что для данного теста они достаточно оптимистичны: при $\delta = 0\%$ коэффициенты определяются точно, а при $\delta > 0$, вплоть до $\delta = 5\%$, восстанавливаются с хорошей точностью.

6.2. Тест 2

Рассматривалась задача

$$Lu \equiv -\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) = f(x), \quad x \in (a,b),$$

$$u(a) = 0, \quad u(b) = 0.$$

На её основе следующим образом строилась серия тестов для $(a,b) = (0,10)$:

1. Выбиралось целое число N.

2. Исходный отрезок делился на $N+1$ интервалов $[x_{i-1}, x_i]$ одинаковой длины:

$$\overline{\omega} = \left\{x_i = x_{i-1} + h,\ 1 \leqslant i \leqslant N+1,\ x_0 = a,\ x_{N+1} = b,\ h = \frac{b-a}{N+1}\right\}.$$

3. Кусочно-постоянный коэффициент $k(x)$ на i-м интервале (считая с левого конца (a,b)) задавался равным i, таким образом, число восстанавливаемых коэффициентов равно $N+1$.

4. Задаётся N правых частей $f^{(i)}(x)$, $i = 1,\ldots,N$, $f^{(i)}(x) = i$, на i-м интервале и равно нулю на всех остальных.

5. С этими правыми частями по точной разностной схеме на сетке $\overline{\omega}$ вычисляются соответствующие им значения точного решения $u^{(i)}(x_j)$, $i,j = 1,\ldots,N$, в узлах сетки.

6. Вычисленное точное решение возмущалось таким же образом, как и в тесте 1.

7. Наконец, составлялись матрицы

$$\mathbf{U}_\delta = \begin{bmatrix} u_\delta^{(1)}(x_1) & u_\delta^{(2)}(x_1) & \dots & u_\delta^{(N)}(x_1) \\ u_\delta^{(1)}(x_2) & u_\delta^{(2)}(x_2) & \dots & u_\delta^{(N)}(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_\delta^{(1)}(x_N) & u_\delta^{(2)}(x_N) & \dots & u_\delta^{(N)}(x_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \bar{f}_1^{h(1)} & \bar{f}_1^{h(2)} & \dots & \bar{f}_1^{h(N)} \\ \bar{f}_2^{h(1)} & \bar{f}_2^{h(2)} & \dots & \bar{f}_2^{h(N)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{f}_N^{h(1)} & \bar{f}_N^{h(2)} & \dots & \bar{f}_N^{h(N)} \end{bmatrix},$$

с которыми решалась задача (11). Далее, коэффициенты $k_1 = 1$, $k_2 = 2, \dots, k_{N+1} = N+1$ восстанавливались в соответствии с изложенным в разд. 4 алгоритмом.

В табл. 2–4 для некоторых N приведены результаты произведённых расчётов. Табл. 2–4 организованы так же, как и табл. 1.

Таблица 2

Тест 2 ($N = 2$)

%	k_1	k_2	k_3
$\delta = 0$	1,0	2,0	3,0
$\delta = 1$	0,986 0,974 1,025	2,010 2,047 1,974	3,014 3,034 2,939
$\delta = 3$	1,040 1,029 1,040	1,876 1,808 2,020	2,966 2,941 2,941
$\delta = 5$	0,990 0,812 0,971	1,924 2,203 2,034	2,871 3,355 3,037
$\delta = 10$	1,272 0,888 1,117	1,082 2,069 1,918	2,839 3,069 2,769

Таблица 3

Тест 2 ($N = 5$)

%	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6
$\delta = 0$	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
$\delta = 1$	0,987 0,925 0,972	2,019 2,100 2,078	3,158 3,492 3,023	4,231 4,643 3,877	5,079 5,259 5,333	5,989 5,771 6,130
$\delta = 3$	0,823 1,090 1,096	2,309 1,922 1,933	2,827 4,050 2,901	3,300 7,252 3,937	4,072 7,684 6,060	5,719 4,903 5,829
$\delta = 5$	0,957 1,192 0,851	2,022 1,652 2,123	2,338 2,635 4,957	1,401 3,446 8,377	3,443 5,508 8,014	6,475 6,254 5,538

В первом столбце табл. 2–4 указан уровень возмущения, вносимый в точное решение. В остальных столбцах размещены вычисленные приближённые значения восстанавливаемых коэффициентов. При $\delta = 0$ коэффициенты определяются точно. При $\delta > 0$ в каждой строчке

Таблица 4

Тест 2 ($N = 8$)

%	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	k_9
$\delta = 0$	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
$\delta = 1$	1,022 1,010 1,059	2,019 1,969 1,943	2,832 2,978 2,329	3,659 4,048 3,558	6,159 4,565 6,936	8,564 6,829 8,854	7,889 9,594 7,555	7,825 9,097 7,136	9,193 7,995 8,891
$\delta = 3$	0,885 1,089 1,081	2,197 1,846 1,985	3,051 3,078 1,717	3,901 5,012 3,334	1,625 4,290 5,042	5,171 6,336 3,476	10,594 9,194 3,329	13,608 11,518 6,442	8,884 8,219 10,677

таблицы, соответствующей используемому в расчётах возмущению, для каждого из восстанавливаемых коэффициентов приведены результаты трёх независимых расчётов с разными случайными распределениями $\mathrm{rand}(j)$. В заголовках табл. 2–4 указаны наименование теста и значения N, при которых производились расчёты.

Из результатов, представленных в табл. 2–4, можно сделать вывод, что с ростом N чувствительность к возмущению данных возрастает. Если для $N = 2$ даже для возмущения в $\delta = 10$ мы получаем хорошие результаты, то для $N = 8$ восстановление можно считать удовлетворительным разве что для уровня ошибки в $\delta = 1$.

Вместе с тем, можно заметить, что первые три коэффициента менее чувствительны к возмущению данных. В связи с этим для случая $N = 8$ были произведены расчёты по восстановлению не всех коэффициентов одновременно. Коэффициенты были разбиты на три группы. Первая группа: $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 3$; вторая группа: $k_4 = 4$, $k_5 = 5$, $k_6 = 6$; третья группа: $k_7 = 7$, $k_8 = 8, k_9 = 9$. Каждая группа коэффициентов восстанавливалась отдельно от других групп на своей части интервала (a, b). Так, например, вторая группа коэффициентов восстанавливалась с использованием части точной разностной схемы, соответствующей сетке с узлами x_4, x_5, x_6, x_7.

В табл. 5 приведены результаты расчётов проведённых таким способом. Табл. 5 организована таким же образом, как и предыдущие. Единственное отличие состоит в том, что тройки независимо восстанавливаемых коэффициентов разделены в столбцах двойными вертикальными линиями.

Таблица 5

Тест 2 ($N = 8$ — по тройкам)

%	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	k_9
$\delta = 0$	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
$\delta = 1$	1,046 1,032 1,012	1,831 2,032 1,832	2,942 2,996 2,983	3,948 4,188 3,988	4,370 5,080 5,196	6,073 5,765 5,968	6,698 6,988 7,331	8,851 8,851 7,285	9,384 9,161 8,644
$\delta = 3$	1,025 1,020 1,122	1,661 2,138 1,749	2,904 2,950 2,927	3,924 4,003 4,567	6,391 4,378 3,824	5,859 6,187 5,213	7,156 6,470 7,390	7,932 8,505 7,204	9,023 10,136 8,974
$\delta = 5$	0,869 1,101 1,140	2,642 1,612 1,811	3,175 2,881 2,914	4,239 3,823 3,050	2,786 5,473 9,514	5,525 5,929 7,304	7,048 5,484 7,871	7,095 10,357 4,804	11,113 10,994 10,232

Сравнение табл. 4 и 5 показывает, что применённый приём позволил улучшить результаты восстановления коэффициентов. Теперь даже для уровня ошибки в $\delta = 5$ мы получили приемлемую точность.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлен прямой метод решения обратной коэффициентной задачи для эллиптического уравнения с кусочно-постоянными коэффициентами.

Метод позволяет значительно быстрее, по сравнению с реализацией для этой задачи итерационных процедур, восстановить неизвестные коэффициенты теплопроводности. В качестве дополнительной информации используются значения (измерения) решения в точках разрыва коэффициентов.

Численное исследование алгоритма показало его работоспособность. Для невозмущённой дополнительной информации кусочно-постоянные коэффициенты восстанавливаются точно независимо от количества частей, из которых состоит исследуемый объект. Анализ чувствительности алгоритма к возмущению дополнительной информации показал, что для тел, состоящих из небольшого количества частей, при возмущении до 5% результат восстановления коэффициентов можно считать удовлетворительным. С ростом числа точек разрыва коэффициентов чувствительность к возмущению данных возрастает.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В.* Экстремальные методы решения некорректных задач и их приложения к обратным задачам теплообмена. М.: Физматгиз, 1988.
2. *Денисов А. М.* Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во МГУ, 1994.
3. *Самарский А. А., Вабищевич П. Н.* Вычислительная теплопередача. М.: Либроком, 2009.
4. *Кабанихин С. И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное изд-во, 2009.
5. *Ватульян А. О.* Коэффициентные обратные задачи механики. М.: Физматлит, 2019.
6. *Chan T. F., Tai X. C.* Level set and total variation regularization for elliptic inverse problems with discontinuous coefficients // J. Comput. Physics. 2004. V. 193, N 1. P. 40–66; https://doi.org/10.1016/j.jcp.2003.08.003
7. *Кабанихин С. И., Хасанов А. Х., Пененко А. В.* Метод градиентного спуска для решения обратной коэффициентной задачи теплопроводности // Сиб. журн. вычисл. математики. 2008. Т. 11, № 1. С. 41–51; https://doi.org/10.1007/s12258-008-1004-x
8. *Победря Б. Е., Кравчук А. С., Аризпе П. А.* Идентификация коэффициентов нестационарного уравнения теплопроводности // Вычисл. механика сплошных сред. 2008. Т. 1, № 4. С. 78–87; https://doi.org/10.7242/1999-6691/2008.1.4.41
9. *Пененко А. В.* Дискретно-аналитические схемы для решения обратной коэффициентной задачи теплопроводности слоистых сред градиентными методами // Сиб. журн. вычисл. математики. 2012. Т. 15, № 4. С. 393–408; https://doi.org/10.1134/S1995423912040052
10. *Hao D. N., Quyen T. N.* Convergence rates for Tikhonov regularization of a two-coefficient identification problem in an elliptic boundary value problem // Numerische Mathematik. 2012. V. 120, N 1. P. 45–77; DOI 10.1007/s00211-011-0406-z
11. *Hao D. N., Quyen T. N.* Convergence rates for total variation regularization of coefficient identification problems in elliptic equations II // J. Math. Anal. Appl. 2012. V. 388, N 1. P. 593–616; https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.11.008
12. *Алиев Р. А.* Об определении коэффициентов линейного эллиптического уравнения // Сиб. журн. вычисл. математики. 2016. Т. 19, № 2. С. 17–28; https://doi.org/10.17377/sibjim.2016.19.202
13. *Quyen T. N.* Variational method for multiple parameter identification in elliptic PDEs // J. Math. Anal. Appl. 2018. V. 461, N 1. P. 676–700; https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.01.030
14. *Quyen T. N.* Finite element analysis for identifying the reaction coefficient in PDE from boundary observations // Appl. Numer. Math. 2019. V. 145. P. 297–314; https://doi.org/10.1016/j.apnum.2019.06.015

15. *Кожанов А. И.* О разрешимости обратных задач восстановления параметров в эллиптических уравнениях // Мат. заметки СВФУ. 2020. Т. 27, № 4. С. 14–29; DOI: 10.25587/SVFU.2020.57.53.002

16. *Сорокин С. Б.* Экономичный алгоритм для численного решения задачи идентификации правой части уравнения Пуассона // Сиб. журн. индустр. математики. 2018. Т. 21, № 2. С. 101–107; https://doi.org/10.17377/sibjim.2018.21.209

17. *Сорокин С. Б.* Экономичный прямой метод численного решения задачи Коши для уравнения Лапласа // Сиб. журн. вычисл. математики. 2019. Т. 22, № 1. С. 99–117; https://doi.org/10.15372/SJNM20190107

18. *Сорокин С. Б.* Неявный итерационный метод численного решения задачи Коши для эллиптических уравнений // Сиб. журн. индустр. математики. 2019. Т. 22, № 4. С. 95–106; https://doi.org/10.33048/sibjim.2019.22.410

19. *Alifanov O. M., Tryanin A. P.* Determination of the coefficient of internal heat exchange and the effective thermal conductivity of a porous solid on the basis of a nonstationary experiment // J. Engrg. Physics. 1985. V. 48, N 3. P. 356–365; https://doi.org/10.1007/BF00878206

20. *Вирновский Г. А., Левитан Е. И.* Об идентификации двумерной модели течения однородной жидкости в пористой среде // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1990. Т. 30, № 5, С. 727–735.

21. *Пермяков П. П.* Математическое моделирование техногенного загрязнения в мёрзлых грунтах // Изв. Томск. политех. ун-та. Инжиниринг георесурсов. 2004. Т. 307, № 5. Р. 63–68.

22. *Knowles I.* Parameter identification for elliptic problems // J. Comput. Appl. Math. 2001. V. 131, N 1–2. P. 175–194; https://doi.org/10.1016/S0377-0427(00)00275-2

23. *Марчук Г. И., Агошков В. И.* Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981.

24. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Физматгиз, 1989.

25. *Парлетт Б. Н., Икрамов Х. Д., Кузнецов Ю. А.* Симметричная проблема собственных значений: Численные методы. М.: Мир. 1983.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 519.632

DIRECT METHOD FOR SOLVING THE INVERSE COEFFICIENT PROBLEM FOR ELLIPTIC EQUATION WITH PIECEWISE CONSTANT COEFFICIENTS

S. B. Sorokin [1,2]

[1] *Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, pr. Acad. Lavrentyeva 6, Novosibirsk 630090, Russia,*
[2] *Novosibirsk State University, ul. Pirogova 1, Novosibirsk 630090, Russia*

E-mail: sorokin@sscc.ru

Received 09.03.2021, revised 19.03.2021, accepted 15.04.2021

Abstract. Some direct numerical method is presented for solving the inverse coefficient problem for an elliptic equation with piecewise constant coefficients. It is assumed that the discontinuity points of the coefficients are known. The algorithm is based on the theory of spectral problems of linear algebra and the application of finite-difference methods for solving the elliptic equations. The values (measurements) of the solution at the discontinuity points of the coefficients are used as additional information. In the case of unperturbed additional information, the coefficients are reconstructed precisely.

Keywords: inverse coefficient problem, numerical solution, spectral problem, exact difference scheme, direct method.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.211

REFERENCES

1. Alifanov O.M., Artyukhin E.A., Rumyantsev S.V. Extreme methods for solving the ill-posed problems and their applications to the inverse problems of heat transfer. Moscow: Fizmatgiz, 1988 (in Russian).
2. Denisov A.M. Introduction to the theory of inverse problems. Moscow: Izd. Moskov. Gos. Univ., 1994 (in Russian).
3. Samarskii A.A., Vabishchevich P.N. Numerical heat transfer. Moscow: Librokom, 2009 (in Russian).
4. Kabanikhin S.I. Inverse and ill-posed problems: theory and applications. Novosibirsk: Sibir. Nauchn. Izd., 2009 (in Russian).
5. Vatul'yan A.O. Inverse coefficient problems of mechanics. Moscow: Fizmatlit, 2019 (in Russian).
6. Chan T.F., Tai X.C. Level set and total variation regularization for elliptic inverse problems with discontinuous coefficients. *J. Comput. Physics*, 2004, Vol. 193, No. 1, pp. 40–66; https://doi.org/10.1016/j.jcp.2003.08.003
7. Kabanikhin S.I., Khasanov A.Kh., Penenko A.V. A gradient descent method for solving an inverse coefficient heat conduction problem. *Numer. Anal. Appl.*, 2008, Vol. 1, No 1, pp. 34–45.
8. Pobedrya B.E., Kravchuk A.S., Arizpe P.A. Identification of the coefficients of the nonstationary heat equation. *Vychisl. Mekhanika Sploshnykh Sred*, 2008, Vol. 1, No. 4, pp. 78–87 (in Russian); https://doi.org/10.7242/1999-6691/2008.1.4.41
9. Penenko A.V. Discrete-analytic schemes for solving an inverse coefficient heat conduction problem in a layered medium with gradient methods. *Numer. Anal. Appl.*, 2012, Vol. 5, No. 4, pp. 326–341.

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2021, Vol. 15, No. 2; DOI: 10.1134/S1990478921020150

10. Hao D.N., Quyen T.N. Convergence rates for Tikhonov regularization of a two-coefficient identification problem in an elliptic boundary value problem. *Numerische Mathematik*, 2012, Vol. 120, No. 1, pp. 45–77; DOI 10.1007/s00211-011-0406-z
11. Hao D.N., Quyen T.N. Convergence rates for total variation regularization of coefficient identification problems in elliptic equations II. *J. Math. Anal. Appl.*, 2012, Vol. 388, No. 1, pp. 593–616; https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.11.008
12. Aliev R.A. Finding the coefficients of a linear elliptic equation. *J. Appl. Ind. Math.*, 2016. T. 10, No. 2, pp. 168–178.
13. Quyen T.N. Variational method for multiple parameter identification in elliptic PDEs. *J. Math. Anal. Appl.*, 2018, Vol. 461, No. 1, pp. 676–700; https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.01.030
14. Quyen T.N. Finite element analysis for identifying the reaction coefficient in PDE from boundary observations. *Appl. Numer. Math.*, 2019, Vol. 145, pp. 297–314; https://doi.org/10.1016/j.apnum.2019.06.015
15. Kozhanov A.I. On the solvability of the inverse problems of parameter recovery in elliptic equations. *Mat. Zametki Sever. Vost. Fed. Univ.*, 2020, Vol. 27, No. 4, pp. 14–29 (in Russian); DOI: 10.25587/SVFU.2020.57.53.002
16. Sorokin S.B. An economical algorithm for numerical solution of the problem of identifying the right-hand side of the poisson equation. *J. Appl. Ind. Math.*, 2018, Vol. 12, No. 2, pp. 362–368.
17. Sorokin S. B. An efficient direct method for numerically solving the cauchy problem for Laplace's equation. *Numer. Anal. Appl.*, 2019, Vol. 12, No. 1, pp. 87–103.
18. Sorokin S.B. An implicit iterative method for numerical solution of the Cauchy problem for elliptic equations. *J. Appl. Ind. Math.*, 2019, Vol. 13, No. 4, pp. 759–770 (in Russian).
19. Alifanov O.M., Tryanin A.P. Determination of the coefficient of internal heat exchange and the effective thermal conductivity of a porous solid on the basis of a nonstationary experiment. *J. Engrg. Physics*, 1985, Vol. 48, No. 3, pp. 356–365 (in Russian); https://doi.org/10.1007/BF00878206
20. Virnovskii G.A., Levitan E.I. On identification of a two-dimensional model of a homogeneous liquid flow in a porous medium. *Zh. Vychisl. Matematiki i Mat. Fiziki*, 1990, Vol. 30, No. 5, pp. 727–735 (in Russian).
21. Permyakov P.P. Mathematical modeling the technogeneous pollution in frozen soils. *Izv. Tomsk. Politekh. Univ. Inzhiniring Georesursov*, 2004, Vol. 307, No. 5, P. 63–68 (in Russian).
22. Knowles I. Parameter identification for elliptic problems. *J. Comput. Appl. Math.*, 2001. Vol. 131, No. 1–2, pp. 175–194; https://doi.org/10.1016/S0377-0427(00)00275-2
23. Marchuk G.I., Agoshkov V.I. Introduction to the grid-projection methods. Moscow: Nauka, 1981 (in Russian).
24. Samarskii A.A. Theory of difference schemes. Moscow: Fizmatgiz, 1989 (in Russian).
25. Parlett B.N., Ikramov Kh.D., Kuznetsov Yu.A. The Symmetric Eigenvalue Problem: Numerical Methods. Moscow: Mir, 1983 (in Russian).