УДК 517.929

ОБ ОЦЕНКАХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАСПРЕДЕЛЁННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ЛИНЕЙНОЙ ЧАСТИ

© 2021 Т. Ыскак[1,2]

[1] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,*
просп. Акад. Коптюга, 4, г. Новосибирск 630090, Россия,
[2] *Новосибирский государственный университет,*
ул. Пирогова, 1, г. Новосибирск 630090, Россия

E-mail: istima92@mail.ru

Поступила в редакцию 25.08.2020 г.; после доработки 17.02.2021 г.;
принята к публикации 15.04.2021 г.

Рассматривается система нелинейных дифференциальных уравнений с распределённым запаздыванием и периодическими коэффициентами в линейной части. Установлены достаточные условия экспоненциального убывания решений, получены оценки, характеризующие скорость убывания решений на бесконечности.

Ключевые слова: нелинейные дифференциальные уравнения, распределённое запаздывание, периодические коэффициенты, экспоненциальное убывание решений, оценки решений, функционал Ляпунова — Красовского.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.212

Рассматривается система дифференциальных уравнений с распределённым запаздыванием следующего вида:

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} B(t,t-s)y(s)\,ds + F\left(t, y(t), \int\limits_{t-\tau}^{t} y(s)\,ds\right), \quad t > 0, \tag{1}$$

где $A(t)$ — матрица размера $n \times n$ с непрерывными T-периодическими элементами, $B(t,s)$ — матрица размера $n \times n$ с непрерывными элементами, T-периодическими по первой переменной: $A(t) \equiv A(t+T)$, $B(t,s) \equiv B(t+T,s)$; $F(t,v_1,v_2)$ — вещественнозначная непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая локальному условию Липшица по (v_1,v_2) и оценке

$$\left\|F\left(t, u(t), \int\limits_{t-\tau}^{t} u(s)\,ds\right)\right\| \leqslant q \max_{s\in[0,\tau]} \|u(t-s)\|^{1+\omega}, \quad t > 0, \quad u \in C([t-\tau,t]), \tag{2}$$

где $q \geqslant 0$, $\omega = \mathrm{const} > 0$.

Цель работы заключается в получении достаточных условий экспоненциального убывания решений и получении оценок решений системы, которые характеризуют скорость убывания при $t \to \infty$.

Существует большое число работ, посвящённых изучению дифференциальных уравнений с запаздыванием (см., например, [1–11]). Уравнения с сосредоточенным запаздыванием исследовались в [12–22], в частности, в работах [12, 13, 15, 17, 18, 20–22] исследован нелинейный

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 19-31-90149).

случай. В работе [23] исследован линейный случай системы (1). Приведём данный результат об устойчивости нулевого решения линейной системы.

Рассмотрим начальную задачу для системы (1) в линейном случае:

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} B(t,t-s)y(s)\,ds, \quad t > 0, \\ y(s) = \varphi(s), \quad s \in [-\tau, 0], \quad \varphi \in C([-\tau, 0]), \\ y(+0) = \varphi(0). \end{gathered} \tag{3}$$

При исследовании устойчивости нулевого решения использован функционал Ляпунова — Красовского из [12, 13]:

$$v(t,y) = \langle H(t)y(t), y(t)\rangle + \int\limits_0^{\tau} \int\limits_{t-\eta}^{t} \langle M(t-s)y(s), y(s)\rangle\,dsd\eta. \tag{4}$$

В следующей теореме из [23] предполагается, что существуют функции $H(t)$, $t \in \mathbb{R}$, и $M(s)$, $s \in [0, \tau]$, которые являются гладкими эрмитовыми положительно определёнными матрицами; более подробные условия на них будут приведены ниже.

Введём обозначения:

$h_{\min}(t)$ — минимальное собственное значение матрицы $H(t)$,

$c_{\min}(t)$ — минимальное собственное значение матрицы $C(t)$:

$$C(t) = H^{-1/2}(t)\left(\tau C_{11}(t) - \int\limits_{t-\tau}^{t} C_{12}(t,t-s)C_{22}^{-1}(t-s)C_{12}^{*}(t,t-s)\,ds\right)H^{-1/2}(t), \tag{5}$$

где

$$\begin{gathered} C_{11}(t) = -\frac{1}{\tau}\left(\frac{d}{dt}H(t) + H(t)A(t) + A^{*}(t)H(t)\right) - M(0), \\ C_{12}(t,t-s) = -H(t)B(t,t-s), \quad C_{22}(t-s) = M(t-s). \end{gathered}$$

Теорема 1. *Пусть существуют T-периодическая матрица $H(t) \in C^1(\mathbb{R})$ такая, что $H(t) = H^{*}(t) > 0$, $t \in \mathbb{R}$, и матрица $M(s) = M^{*}(s) \in C^1([0, \tau])$ такая, что $M(s) > 0$, $\frac{d}{ds}M(s) < 0$, $s \in [0, \tau]$. Выберем $\varkappa > 0$ так, что*

$$\varkappa M(s) + \frac{d}{ds}M(s) \leqslant 0. \tag{6}$$

Пусть также будет выполнено неравенство $\int\limits_0^T \delta(s)\,ds > 0$, где

$$\delta(t) = \min\{c_{\min}(t), \varkappa\}. \tag{7}$$

Тогда для решения начальной задачи (3) справедлива оценка

$$\|y(t)\|^2 \leqslant \frac{1}{h_{\min}(t)} v(0,\varphi) \exp\left(-\int\limits_0^t \delta(s)\,ds\right),$$

где

$$v(0,\varphi) = \langle H(0)\varphi(0), \varphi(0)\rangle + \int_0^\tau \int_{-\eta}^0 \langle M(-s)\varphi(s), \varphi(s)\rangle\, ds d\eta.$$

При получении результатов существенно используется результат из [24] об устойчивости нулевого решения линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.

Рассмотрим систему

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y, \quad t > 0, \tag{8}$$

где $A(t)$ — непрерывная T-периодическая матрица.

Теорема 2. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Если нулевое решение системы* (8) *асимптотически устойчиво, то для любой непрерывной на* $[0, T]$ *матрицы* $R(t)$ *существует единственное решение* $L(t)$ *краевой задачи*

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}L + LA(t) + A^*(t)L = -R(t), \quad 0 < t < T, \\ L(0) = L(T). \end{gathered} \tag{9}$$

При этом если

$$R(t) = R^*(t) > 0, \quad t \in [0, T], \tag{10}$$

то $L(t) = L^*(t) > 0$, $t \in [0, T]$.

2. *Пусть правая часть* $R(t)$ *непрерывна на* $[0, T]$ *и удовлетворяет условиям* (10). *Если краевая задача* (9) *имеет эрмитово решение* $L(t)$ *такое, что* $L(0) > 0$, *то нулевое решение системы* (8) *асимптотически устойчиво.*

Рассмотрим следующее вспомогательное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d}{dt}z(t) = -\delta(t)z(t), \tag{11}$$

где $\delta(t)$ из (7). Отметим, что $\delta(t)$ — T-периодическая функция. Если выполняются условия теоремы 1, то в силу (6) нулевое решение системы (11) асимптотически устойчиво, следовательно, в силу теоремы 2 однозначно разрешима краевая задача

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}l(t) - 2\delta(t)l(t) = -1, \quad 0 < t < T, \\ l(0) = l(T) > 0, \end{gathered} \tag{12}$$

при этом $l(t) > 0$ при $t \in [0, T]$.

ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Рассмотрим начальную задачу для системы (1) при $t > 0$:

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} B(t, t-s)y(s)\,ds + F\Big(t, y(t), \int\limits_{t-\tau}^{t} y(s)\,ds\Big),\\ y(s) = \varphi(s), \quad s \in [-\tau, 0], \quad \varphi \in C([-\tau, 0]),\\ y(+0) = \varphi(0).\end{gathered} \tag{13}$$

При доказательстве следующей теоремы также будет использоваться функционал Ляпунова — Красовского (4), более того, будет предполагаться, что условия теоремы 1 выполнены. Помимо обозначений перед теоремой 1 введём следующие обозначения: α — положительное число, $l(t)$ — T-периодическое продолжение решения краевой задачи (12),

$$\mu(t) = \frac{l(0)}{l(t)h^2_{\min}(t)}, \tag{14}$$

$$r_1 = 4\alpha q^2 \max_{s\in[0,T]} \|H(s)\|^2, \tag{15}$$

$$r_2 = 4q \max_{s\in[0,T]} \|H(s)\| \max\{0, \max_{s\in[0,T]}(l(s) - \alpha\delta(s))\}\Big(\max_{s\in[0,T]} \|H(s)\| + \int\limits_0^{\tau}\int\limits_0^{\eta} \|M(s)\|\,ds d\eta\Big), \tag{16}$$

$$r_3 = \frac{\varkappa\alpha e^{-\varkappa\tau}}{2\tau}(1 - \alpha \max_{s\in[0,T]} \delta^2(s))\Big(\frac{\varkappa\alpha e^{-\varkappa\tau}}{\tau} + (1 - \alpha \max_{s\in[0,T]} \delta^2(s))\Big)^{-1}. \tag{17}$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Выберем число* $\alpha > 0$ *так, что* $\alpha < (\max\limits_{s\in[0,T]} |\delta(s)|)^{-2}$. *Тогда для решения начальной задачи* (13) *с начальными данными из множества*

$$\begin{aligned}\mathcal{E} = \Big\{\varphi \in C[-\tau, 0] :\ & \frac{\theta}{2}(1 - \alpha\delta^2(0))v^2(0, \varphi) \geqslant r_1 \max_{\xi\in[-\tau,0]} \|\varphi(\xi)\|^{4+2\omega} + r_2 \max_{\xi\in[-\tau,0]} \|\varphi(\xi)\|^{4+\omega},\\ & r_1 \max_{s\in[0,T]} \mu^{\omega/2}(s)v^{\omega}(0, \varphi) + r_2 \max_{s\in[0,T]} \mu^{\omega/4}(s)v^{\omega/2}(0, \varphi) < r_3 \min_{\xi\in[0,T]} h^2_{\min}(\xi),\\ & r_1 \max\big\{\max_{\xi\in[-\tau,0]} \|\varphi(\xi)\|, \max_{s\in[0,T]} \mu^{1/4}(s)v^{1/2}(0, \varphi)\big\}^{4+2\omega}\\ & + r_2 \max\big\{\max_{\xi\in[-\tau,0]} \|\varphi(\xi)\|, \max_{s\in[0,T]} \mu^{1/4}(s)v^{1/2}(0, \varphi)\big\}^{4+\omega} \leqslant \theta r_3 v^2(0, \varphi)\Big\},\end{aligned}$$

где $\theta \in (0, 1)$, $\delta(t)$ *из* (7), *справедлива следующая оценка:*

$$\|y(t)\|^2 \leqslant \sqrt{\mu(t)}v(0, \varphi) \exp\Big(-\frac{1}{4}\int\limits_0^t \sigma(s)\,ds\Big), \tag{18}$$

где

$$\sigma(t) = \min\Big\{\frac{1 - \alpha\delta^2(t)}{l(t)}, \varkappa\Big\}. \tag{19}$$

Замечание. Заметим, что оценка (18) характеризует экспоненциальное убывание решений с начальными данными из $\mathcal{E}$.

Доказательство. Продифференцируем функционал Ляпунова — Красовского (4) вдоль решения начальной задачи (13):

$$\frac{d}{dt}v(t,y) = -\int\limits_{t-\tau}^{t} \left\langle G(t,t-s)\Big(\begin{pmatrix} y(t) \\ y(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(s) \end{pmatrix} \Big) \right\rangle ds$$

$$+ 2\,\mathrm{Re} \left\langle H(t)y(t), F\Big(t, y(t), \int\limits_{t-\tau}^{t} y(s)\,ds\Big) \right\rangle + \int\limits_{0}^{\tau}\int\limits_{t-\eta}^{t} \left\langle \frac{d}{dt}M(t-s)y(s), y(s) \right\rangle ds d\eta,$$

где

$$G(t,t-s) = \begin{pmatrix} C_{11}(t) & C_{12}(t,t-s) \\ C_{12}^*(t,t-s) & C_{22}(t-s) \end{pmatrix},$$

$C_{11}(t)$, $C_{12}(t,t-s)$, $C_{22}(t-s)$ из (5). Имеет место представление

$$\int\limits_{t-\tau}^{t} \left\langle G(t,t-s)\Big(\begin{pmatrix} y(t) \\ y(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(s) \end{pmatrix} \right\rangle ds = \langle C(t)H^{1/2}(t)y(t), H^{1/2}(t)y(t)\rangle$$

$$+ \int\limits_{t-\tau}^{t} \left\langle \Big(\Big(\begin{pmatrix} C_{12}(t,t-s)C_{22}^{-1}(t-s)C_{12}^*(t,t-s) & C_{12}(t,t-s) \\ C_{12}^*(t,t-s) & C_{22}(t-s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(s) \end{pmatrix} \right\rangle ds.$$

Учитывая то, что следующая квадратичная форма неотрицательно определённая:

$$\left\langle \Big(\Big(\begin{pmatrix} C_{12}(t,t-s)C_{22}^{-1}(t-s)C_{12}^*(t,t-s) & C_{12}(t,t-s) \\ C_{12}^*(t,t-s) & C_{22}(t-s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \big\langle C_{22}^{-1}(t-s)\big(C_{12}^*(t,t-s)u_1 + C_{22}(t-s)u_2\big), \big(C_{12}^*(t,t-s)u_1 + C_{22}(t-s)u_2\big)\big\rangle \geqslant 0$$

и для эрмитовой матрицы $P = P^*$ справедливо неравенство

$$p_{\min}\|u\|^2 \leqslant \langle Pu, u\rangle, \tag{20}$$

где $p_{\min}$ – минимальное собственное значение матрицы P, получаем

$$\frac{d}{dt}v(t,y) \leqslant -c_{\min}(t)\langle H(t)y(t), y(t)\rangle + \int\limits_{0}^{\tau}\int\limits_{t-\eta}^{t} \left\langle \frac{d}{dt}M(t-s)y(s), y(s) \right\rangle ds d\eta$$

$$+ 2\,\mathrm{Re} \left\langle H(t)y(t), F\Big(t, y(t), \int\limits_{t-\tau}^{t} y(s)\,ds\Big) \right\rangle.$$

В силу (2) имеем

$$\frac{d}{dt}v(t,y) \leqslant -c_{\min}(t)\langle H(t)y(t), y(t)\rangle + \int\limits_{0}^{\tau}\int\limits_{t-\eta}^{t} \left\langle \frac{d}{dt}M(t-s)y(s), y(s) \right\rangle ds d\eta$$

$$+ 2q\|H(t)\|\|y(t)\| \max_{\xi\in[0,\tau]} \|y(t-\xi)\|^{1+\omega}.$$

Далее,

$$\frac{d}{dt}v(t,y) \leqslant -c_{\min}(t)\langle H(t)y(t), y(t)\rangle + \int_0^\tau \int_{t-\eta}^t \left\langle \frac{d}{dt}M(t-s)y(s), y(s)\right\rangle ds d\eta + 2q\|H(t)\| \max_{\xi\in[0,\tau]} \|y(t-\xi)\|^{2+\omega}.$$

В силу определения $\delta(t)$ и функционала Ляпунова — Красовского (4) справедлива оценка

$$\frac{d}{dt}v(t,y) \leqslant -\delta(t)v(t,y) + 2q\|H(t)\| \max_{\xi\in[0,\tau]} \|y(t-\xi)\|^{2+\omega}. \tag{21}$$

Введём вспомогательную модификацию функционала Ляпунова – Красовского из [19]:

$$w(t,v) = l(t)v^2(t,y) + \alpha \int_0^t e^{-\varkappa(t-s)} \left(\frac{d}{ds}v(s,y)\right)^2 ds. \tag{22}$$

Напомним, что $l(t) > 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Дифференцируя функционал $w(t,v)$, получим

$$\frac{d}{dt}w(t,v) = \frac{d}{dt}l(t)v^2(t,y) + 2l(t)v(t,y)\frac{d}{dt}v(t,y) + \alpha\left(\frac{d}{dt}v(t,y)\right)^2 - \varkappa\alpha \int_0^t e^{-\varkappa(t-s)}\left(\frac{d}{ds}v(s,y)\right)^2 ds.$$

С учётом (21) и того, что α, $l(t)$, $v(t,y)$ неотрицательны, имеем следующее неравенство:

$$\frac{d}{dt}w(t,v) \leqslant \frac{d}{dt}l(t)v^2(t,y) - 2l(t)\delta(t)v^2(t,y) + 4q\|H(t)\|l(t)v(t,y) \max_{\xi\in[0,\tau]} \|y(t-\xi)\|^{2+\omega} + \alpha\big(\delta^2(t)v^2(t,y) - 4q\delta(t)\|H(t)\|v(t,y) \max_{\xi\in[0,\tau]} \|y(t-\xi)\|^{2+\omega} + 4q^2\|H(t)\|^2 \max_{\xi\in[0,\tau]} \|y(t-\xi)\|^{4+2\omega}\big) - \varkappa\alpha \int_0^t e^{-\varkappa(t-s)}\left(\frac{d}{ds}v(s,y)\right)^2 ds.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}w(t,v) \leqslant -(1-\alpha\delta^2(t))v^2(t,y) + 4\alpha q^2\|H(t)\|^2 \max_{\xi\in[0,\tau]} \|y(t-\xi)\|^{4+2\omega} + 4q\|H(t)\|(l(t)-\alpha\delta(t))v(t,y) \max_{\xi\in[0,\tau]} \|y(t-\xi)\|^{2+\omega} - \varkappa\alpha \int_0^t e^{-\varkappa(t-s)}\left(\frac{d}{ds}v(s,y)\right)^2 ds.$$

С учётом (4), (15) и (16) отсюда следует неравенство

$$\frac{d}{dt}w(t,v) \leqslant -(1-\alpha\delta^2(t))v^2(t,y) + r_1 \max_{\xi\in[0,\tau]} \|y(t-\xi)\|^{4+2\omega} + r_2 \max_{\xi\in[0,\tau]} \|y(t-\xi)\|^{4+\omega} - \varkappa\alpha \int_0^t e^{-\varkappa(t-s)}\left(\frac{d}{ds}v(s,y)\right)^2 ds.$$

В силу определения $\sigma(t)$ из (19) имеем

$$\frac{d}{dt}w(t,v) \leqslant -\frac{\sigma(t)w(t,v)}{2} + \Bigg[-\frac{1-\alpha\delta^2(t)}{2}v^2(t,y) + r_1 \max_{\xi\in[0,\tau]} \|y(t-\xi)\|^{4+2\omega}$$
$$+ r_2 \max_{\xi\in[0,\tau]} \|y(t-\xi)\|^{4+\omega} - \frac{\varkappa\alpha}{2}\int_0^t e^{-\varkappa(t-s)}\left(\frac{d}{ds}v(s,y)\right)^2 ds\Bigg]. \quad (23)$$

Из первого неравенства в определении множества $\mathcal{E}$ следует, что либо $v(0,\varphi)=0$, тогда решение начальной задачи (13) тождественно равно нулю и оценка (18) справедлива, либо существует $t_0>0$ такое, что при всех $t\in(0,t_0)$ выражение в квадратных скобках отрицательно, следовательно, при $t\in(0,t_0)$ получим $\dfrac{d}{dt}w(t,v)\leqslant-\dfrac{\sigma(t)}{2}w(t,v)$. Далее можем написать

$$w(t,v) \leqslant w(0,v)\exp\left(-\int_0^t \frac{\sigma(s)}{2}\,ds\right).$$

В силу определения $w(t,v)$ из (22) имеем

$$v(t,y) \leqslant \sqrt{\frac{l(0)}{l(t)}}v(0,\varphi)\exp\left(-\int_0^t \frac{\sigma(s)}{4}\,ds\right).$$

Аналогично, из (4) и (14) получаем оценку (18) при $t\in(0,t_0]$. Покажем, что эта оценка справедлива при всех $t>0$. Для этого достаточно доказать, что выражение в квадратных скобках в (23) отрицательно при всех $t>0$. Докажем от противного. Мы знаем, что при $t\in(0,t_0)$ выражение в квадратных скобках в (23) отрицательно. Предположим, что t_1 — первая точка, где данное выражение равно нулю, а при $t<t_1$ оно отрицательно:

$$\frac{\varkappa\alpha}{2}\int_0^{t_1} e^{-\varkappa(t_1-s)}\left(\frac{d}{ds}v(s,y)\right)^2 ds + \frac{1-\alpha\delta^2(t_1)}{2}v^2(t_1,y)$$
$$= r_1 \max_{\xi\in[0,\tau]} \|y(t_1-\xi)\|^{4+2\omega} + r_2 \max_{\xi\in[0,\tau]} \|y(t_1-\xi)\|^{4+\omega}. \quad (24)$$

Тогда, повторяя рассуждения после (23), можно показать, что оценка (18) справедлива при $t\leqslant t_1$. Оценим выражение, которое стоит в левой части (24):

$$\frac{\varkappa\alpha}{2}\int_0^{t_1} e^{-\varkappa(t_1-s)}\left(\frac{d}{ds}v(s,y)\right)^2 ds + \frac{1-\alpha\delta^2(t_1)}{2}v^2(t_1,y)$$
$$\geqslant \frac{\varkappa\alpha e^{-\varkappa\tau}}{2}\int_{\max\{0,t_1-\tau\}}^{t_1}\left(\frac{d}{ds}v(s,y)\right)^2 ds + \frac{1}{2}\big(1-\alpha\max_{s\in[0,T]}\delta^2(s)\big)v^2(t_1,y). \quad (25)$$

Рассмотрим два случая: $t_1\in(0,\tau]$ и $t_1>\tau$.

1) Пусть $t_1\in(0,\tau]$. В силу неравенства Гёльдера получим

$$\frac{\varkappa\alpha}{2}\int_0^{t_1} e^{-\varkappa(t_1-s)}\left(\frac{d}{ds}v(s,y)\right)^2 ds + \frac{1-\alpha\delta^2(t_1)}{2}v^2(t_1,y)$$

$$\geqslant \frac{\varkappa\alpha e^{-\varkappa\tau}}{2\tau}\left(\int\limits_0^{t_1}\left|\frac{d}{ds}v(s,y)\right|ds\right)^2+\frac{1}{2}(1-\alpha\max_{s\in[0,T]}\delta^2(s))v^2(t_1,y).$$

Воспользовавшись обозначением (17) и неравенством

$$ax_1^2+bx_2^2\geqslant\frac{ab}{a+b}(x_1+x_2)^2,\quad a,b>0,\tag{26}$$

получим

$$\frac{\varkappa\alpha}{2}\int\limits_0^{t_1}e^{-\varkappa(t_1-s)}\left(\frac{d}{ds}v(s,y)\right)^2ds+\frac{1-\alpha\delta^2(t_1)}{2}v^2(t_1,y)\geqslant r_3\left(\int\limits_0^{t_1}\left|\frac{d}{ds}v(s,y)\right|ds+v(t_1,y)\right)^2.$$

Следовательно,

$$\frac{\varkappa\alpha}{2}\int\limits_0^{t_1}e^{-\varkappa(t_1-s)}\left(\frac{d}{ds}v(s,y)\right)^2ds+\frac{1-\alpha\delta^2(t_1)}{2}v^2(t_1,y)\geqslant r_3v^2(0,\varphi).\tag{27}$$

С другой стороны, поскольку $t_1\in(0,\tau]$, то справедлива оценка

$$\max_{\xi\in[0,\tau]}\|y(t_1-\xi)\|\leqslant\max\{\max_{\xi\in[-\tau,0]}\|\varphi(\xi)\|,\max_{\xi\in[0,t_1]}\|y(\xi)\|\},$$

отсюда в силу (18) имеем

$$\max_{\xi\in[0,\tau]}\|y(t_1-\xi)\|\leqslant\max\big\{\max_{\xi\in[-\tau,0]}\|\varphi(\xi)\|,\max_{s\in[0,T]}\mu^{1/4}(s)v^{1/2}(0,\varphi)\big\}.$$

Используя данное неравенство, оценим выражение, стоящее в правой части (24):

$$\begin{aligned}r_1\max_{\xi\in[0,\tau]}\|y(t_1-\xi)\|^{4+2\omega}+r_2\max_{\xi\in[0,\tau]}\|y(t_1-\xi)\|^{4+\omega}&\\ \leqslant r_1\max\big\{\max_{\xi\in[-\tau,0]}\|\varphi(\xi)\|,\max_{s\in[0,T]}\mu^{1/4}(s)v^{1/2}(0,\varphi)\big\}^{4+2\omega}&\\ +r_2\max\big\{\max_{\xi\in[-\tau,0]}\|\varphi(\xi)\|,\max_{s\in[0,T]}\mu^{1/4}(s)v^{1/2}(0,\varphi)\big\}^{4+\omega}&.\end{aligned}$$

В силу данной оценки, формул (24), (27) и последнего неравенства в определении $\mathcal{E}$ либо $\varphi(s)\equiv0$, а тогда $y(t)=0$ при $t>0$ и оценка (18) выполнена, либо получаем противоречие. Следовательно, выражение в квадратных скобках в (23) отрицательно при всех $t>0$. Повторяя рассуждения после (23), получаем оценку (18).

2) Рассмотрим случай $t_1>\tau$. Из (25) получим

$$\begin{aligned}&\frac{\varkappa\alpha}{2}\int\limits_0^{t_1}e^{-\varkappa(t_1-s)}\left(\frac{d}{ds}v(s,y)\right)^2ds+\frac{1-\alpha\delta^2(t_1)}{2}v^2(t_1,y)\\ &\qquad\geqslant\frac{\varkappa\alpha e^{-\varkappa\tau}}{2}\int\limits_{t_1-\tau}^{t_1}\left(\frac{d}{ds}v(s,y)\right)^2ds+\frac{1}{2}\big(1-\alpha\max_{s\in[0,T]}\delta^2(s)\big)v^2(t_1,y).\end{aligned}$$

Используя неравенство Гёльдера, получим

$$\frac{\varkappa\alpha}{2}\int\limits_0^{t_1} e^{-\varkappa(t_1-s)}\left(\frac{d}{ds}v(s,y)\right)^2 ds + \frac{1-\alpha\delta^2(t_1)}{2}v^2(t_1,y)$$
$$\geqslant \frac{\varkappa\alpha e^{-\varkappa\tau}}{2\tau}\left(\int\limits_{t_1-\tau}^{t_1}\left|\frac{d}{ds}v(s,y)\right|ds\right)^2 + \frac{1}{2}(1-\alpha\max_{s\in[0,T]}\delta^2(s))v^2(t_1,y).$$

Воспользовавшись неравенством (26), получим

$$\frac{\varkappa\alpha}{2}\int\limits_0^{t_1} e^{-\varkappa(t_1-s)}\left(\frac{d}{ds}v(s,y)\right)^2 ds + \frac{1-\alpha\delta^2(t_1)}{2}v^2(t_1,y) \geqslant r_3\left(\int\limits_{t_1-\tau}^{t_1}\left|\frac{d}{ds}v(s,y)\right|ds + v(t_1,y)\right)^2,$$

далее,

$$\frac{\varkappa\alpha}{2}\int\limits_0^{t_1} e^{-\varkappa(t_1-s)}\left(\frac{d}{ds}v(s,y)\right)^2 ds + \frac{1-\alpha\delta^2(t_1)}{2}v^2(t_1,y) \geqslant r_3\max_{\xi\in[0,\tau]} v^2(t_1-\xi,y).$$

В силу (4) имеем

$$\frac{\varkappa\alpha}{2}\int\limits_0^{t_1} e^{-\varkappa(t_1-s)}\left(\frac{d}{ds}v(s,y)\right)^2 ds + \frac{1-\alpha\delta^2(t_1)}{2}v^2(t_1,y) \geqslant r_3\max_{\xi\in[0,\tau]}\langle H(t_1-\xi)y(t_1-\xi),y(t_1-\xi)\rangle^2.$$

Воспользуемся неравенством (20):

$$\frac{\varkappa\alpha}{2}\int\limits_0^{t_1} e^{-\varkappa(t_1-s)}\left(\frac{d}{ds}v(s,y)\right)^2 ds + \frac{1-\alpha\delta^2(t_1)}{2}v^2(t_1,y)$$
$$\geqslant r_3\max_{\xi\in[0,\tau]}(h_{\min}(t_1-\xi)\|y(t_1-\xi)\|^2)^2 \geqslant r_3\min_{\xi\in[0,T]} h^2_{\min}(\xi)\max_{\xi\in[0,\tau]}\|y(t_1-\xi)\|^4.$$

Из (24) следует оценка

$$r_1\max_{\xi\in[0,\tau]}\|y(t_1-\xi)\|^{2\omega} + r_2\max_{\xi\in[0,\tau]}\|y(t_1-\xi)\|^{\omega} \geqslant r_3\min_{\xi\in[0,T]} h^2_{\min}(\xi).$$

Отсюда с учётом (18) и второго неравенства в определении $\mathcal{E}$ либо $\varphi(s)\equiv 0$, тогда $y(t)=0$ при $t>0$ и оценка (18) выполнена, либо получаем противоречие. Следовательно, выражение в квадратных скобках в (23) отрицательно при всех $t>0$. Повторяя рассуждения после (23), получаем оценку (18). □

Получены достаточные условия экспоненциального убывания решений системы (1) и оценки, характеризующие скорость убывания решений на бесконечности. Параметры в полученных оценках конструктивны.

Автор выражает глубокую благодарность Г. В. Демиденко, И. И. Матвеевой, М. А. Скворцовой за внимание и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Ленанд, 2014.

2. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.
3. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.
4. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.
5. *Кореневский Д. Г.* Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии. Киев: Наукова думка, 1989.
6. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.
7. *Долгий Ю. Ф.* Устойчивость периодических дифференциально-разностных уравнений. Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. ун-та, 1996.
8. *Kolmanovskiĭ V. B., Myshkis A. D.* Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ. 1999. (Math. Appl., V. 463).
9. *Gu K., Kharitonov V. L., Chen J.* Stability of Time-Delay Systems. Control Engineering. Boston: Birkhauser, 2003.
10. *Agarwal R. P., Berezansky L., Braverman E., Domoshnitsky A.* Nonoscillation Theory of Functional Differential Equations with Applications. N. Y.: Springer-Verl., 2012.
11. *Gil' M. I.* Stability of Neutral Functional Differential Equations. Paris: Atlantis Press, 2014. (Atlantis Stud. Differ. Equ., V. 3.)
12. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2005. Т. 5, № 3. С. 20–28.
13. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 5. С. 1025–1040.
14. *Demidenko G. V.* Stability of solutions to linear differential equations of neutral type // J. Anal. Appl. 2009. V. 7, N 3. P. 119–130.
15. *Матвеева И. И.* Оценки решений одного класса систем нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Сиб. журн. индустр. математики. 2013. Т. 16, № 3. С. 122–132.
16. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Об оценках решений систем дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 5. С. 1059–1077.
17. *Demidenko G. V., Matveeva I. I.* Estimates for solutions to a class of time-delay systems of neutral type with periodic coefficients and several delays // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2015. V. 2015, N 83. P. 1–22; DOI: 10.14232/ejqtde.2015.1.83
18. *Demidenko G. V., Matveeva I. I.* Exponential stability of solutions to nonlinear time-delay systems of neutral type // Electron. J. Diff. Equ. 2016. V. 2016, N 19. P. 1–20.
19. *Матвеева И. И.* Об экспоненциальной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 2. С. 344–352; DOI: 10.17377/smzh.2017.58.208
20. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И., Скворцова М. А.* Оценки решений дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами в линейных членах // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 5. С. 1063–1079; DOI: 10.33048/smzh.2019.60.506
21. *Matveeva I. I.* Exponential stability of solutions to nonlinear time-varying delay systems of neutral type equations with periodic coefficients // Electron. J. Diff. Equ. 2020. V. 2020, N 20. P. 1–12.
22. *Матвеева И. И.* Оценки экспоненциального убывания решений одного класса нелинейных систем нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2020. Т. 60, № 4. С. 612–620; DOI: 10.31857/S0044466920040122
23. *Yskak T.* Stability of solutions to systems of differential equations with distributed delay // Funct. Differ. Equ. 2018. V. 25, N 1–2. P. 97–108.
24. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Об устойчивости решений линейных систем с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 2. С. 332–348.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 517.929

ON ESTIMATES OF SOLUTIONS TO SYSTEMS OF NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DISTRIBUTED DELAY AND PERIODIC COEFFICIENTS IN THE LINEAR TERMS

© 2021 **T. Yskak**[1,2]

[1] *Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, pr. Acad. Koptyuga 4, Novosibirsk 630090, Russia,*
[2] *Novosibirsk State University, ul. Pirogova 1, Novosibirsk 630090, Russia*

E-mail: istima92@mail.ru

Received 25.08.2020, revised 17.02.2021, accepted 15.04.2021

Abstract. We consider a system of nonlinear differential equations with distributed delay and periodic coefficients in the linear terms. Some sufficient conditions for the exponential decay of solutions are established, and the estimates characterizing the rate of decay of solutions at infinity are obtained.

Keywords: nonlinear differential equation, distributed delay, periodic coefficient, exponential decay of a solution, estimation of solution, Lyapunov–Krasovskiĭ functional.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.212

REFERENCES

1. Myshkis A.D. Linear Differential Equations with Retarded Argument. Moscow: Nauka, 1972.
2. Krasovskii N.N. Stability of Motion. Applications of Lyapunov's Second Method to Differential Systems and Equations with Delay. Stanford: Stanford Univ. Press, 1963.
3. El′sgol′ts L.E., Norkin S.B. Introduction to the Theory and Application of Differential Equations with Deviating Arguments. N. Y.: Acad. Press, 1973.
4. Hale J. Theory of Functional Differential Equations. N. Y.: Springer-Verl., 1977.
5. Korenevskiĭ D.G. Stability of Dynamical Systems under Random Perturbations of Parameters. Algebraic Criteria. Kiev: Naukova Dumka, 1989 (in Russian).
6. Azbelev N. V., Maksimov V. P., Rakhmatullina L. F. Introduction to the Theory of Linear Functional Differential Equations. Atlanta: World Federation Publ. Comp., 1995.
7. Dolgiĭ Yu.F. Ustoichivost' periodicheskikh differentsial'no-raznostnykh uravnenii [Stability of periodic differential-difference equations]. Ekaterinburg: Izd. Ural. Gos. Univ., 1996 (in Russian).
8. Kolmanovskiĭ V.B., Myshkis A.D. Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999.
9. Gu K., Kharitonov V.L., Chen J. Stability of Time-Delay Systems. Boston: Birkhauser, 2003.
10. Agarwal R.P., Berezansky L., Braverman E., Domoshnitsky A. Nonoscillation Theory of Functional Differential Equations with Applications. N. Y.: Springer-Verl., 2012.
11. Gil' M.I. Stability of Neutral Functional Differential Equations. Paris: Atlantis Press, 2014. (*Atlantis Studies in Differential Equations*, Vol. 3).

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2021, Vol. 15, No. 2; DOI: 10.1134/S1990478921020174

12. Demidenko G.V., Matveeva I.I. Asimptoticheskie svoistva reshenii differentsial'nykh uravnenii s zapazdyvayushchim argumentom [Asymptotic properties of solutions to delay differential equations]. *Vestn. NGU. Ser. Matematika, Mekhanika, Informatika*, 2005, Vol. 5, No. 3, pp. 20–28 (in Russian).

13. Demidenko G.V., Matveeva I.I. Stability of solutions to delay differential equations with periodic coefficients of linear terms. *Siberian Math. J.*, 2007, Vol. 48, No. 5, pp. 824–836; DOI: 10.1007/s11202-007-0084-3

14. Demidenko G.V. Stability of solutions to linear differential equations of neutral type. *J. Anal. Appl.*, 2009, Vol. 7, No. 3, pp. 119–130.

15. Matveeva I.I. Estimates for solutions to one class of nonlinear delay differential equations. *J. Appl. Industr. Math.*, 2013, Vol. 7, No. 4, pp. 557–566; DOI: 10.1134/S1990478913040108

16. Demidenko G.V., Matveeva I.I. On estimates of solutions to systems of differential equations of neutral type with periodic coefficients. *Siberian Math. J.*, 2014, Vol. 55, No. 5, pp. 866–881; DOI: 10.1134/S0037446614050061

17. Demidenko G.V., Matveeva I.I. Estimates for solutions to a class of time-delay systems of neutral type with periodic coefficients and several delays. *Electron. J. Qual. Theory Diff. Equ.*, 2015, Vol. 2015, No. 83, pp. 1–22; DOI: 10.14232/ejqtde.2015.1.83

18. Demidenko G.V., Matveeva I.I. Exponential stability of solutions to nonlinear time-delay systems of neutral type. *Electron. J. Diff. Equ.*, 2016, Vol. 2016, No. 19, pp. 1–20.

19. Matveeva I.I. On exponential stability of solutions to periodic neutral-type systems. *Siberian Math. J.*, 2017, Vol. 58, No. 2, pp. 264–270; DOI: 10.1134/S0037446617020082

20. Demidenko G.V., Matveeva I.I., Skvortsova M.A. Estimates for solutions to neutral differential equations with periodic coefficients of linear terms. *Siberian Math. J.*, 2019, Vol. 60, No. 5, pp. 828–841; DOI: 10.1134/S0037446619050069

21. Matveeva I.I. Exponential stability of solutions to nonlinear time-varying delay systems of neutral type equations with periodic coefficients. *Electron. J. Diff. Equ.*, 2020, Vol. 2020, No. 20, pp. 1–12.

22. Matveeva I.I. Estimates for exponential decay of solutions to one class of nonlinear systems of neutral type with periodic coefficients. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2020, Vol. 60, No. 4, pp. 601–609; DOI: 10.1134/S0965542520040120

23. Yskak T. Stability of solutions to systems of differential equations with distributed delay. *Funct. Diff. Equ.*, 2018, Vol. 25, No. 1–2, pp. 97–108.

24. Demidenko G.V., Matveeva I.I. On stability of solutions to linear systems with periodic coefficients. *Siberian Math. J.*, 2001, Vol. 42, No. 2, pp. 282–296; DOI: 10.1023/A:1004837029765