СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ. 2021. Т. 24, № 3. С. 5–18

УДК 517.968.74

СИСТЕМА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СВЁРТКИ СО СТЕПЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

© 2021 С. Н. Асхабов[1,2]

[1] *Чеченский государственный педагогический университет, просп. Исаева, 62, г. Грозный 364068, Россия;*
[2] *Чеченский государственный университет, ул. Шерипова, 32, г. Грозный 364024, Россия*

E-mail: askhabov@yandex.ru

Поступила в редакцию 24.02.2021 г.; после доработки 22.04.2021 г.;
принята к публикации 24.06.2021 г.

Методом весовых метрик в конусе пространства непрерывных функций доказывается глобальная теорема о существовании и единственности неотрицательного нетривиального решения для системы интегро-дифференциальных уравнений типа свёртки со степенной нелинейностью. Показано, что решение может быть найдено методом последовательных приближений пикаровского типа и для него получены точные априорные оценки.

Ключевые слова: система интегро-дифференциальных уравнений, свёртка, степенная нелинейность.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.301

ВВЕДЕНИЕ

В работах [1–3] изучены системы интегральных уравнений типа свёртки со степенной нелинейностью в конусах пространства непрерывных функций $C[0,\infty)$. Такие уравнения возникают при описании процессов инфильтрации жидкости через стенки цилиндрического резервуара в изотропную однородную пористую среду [4, 5], распространении ударных волн в трубах, наполненных газом [6], остывании тел при лучеиспускании, отвечающему закону Стефана — Больцмана [7], возбуждении и торможении нейронов в нейронной сети [8] и других процессах. Обзор полученных в этом направлении результатов приведён в [9; 10, с. 173]. В данной работе рассматриваются вопросы, касающиеся существования, единственности, поиска и свойств решений тесно связанной с ними системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа свёртки вида

$$u_i^\alpha(x) = \sum_{j=1}^{n} \int_0^x k_{ij}(x-t)u_j'(t)\,dt, \quad \alpha > 1, \quad x > 0, \quad i = \overline{1,n}, \tag{1}$$

где ядро $k(x) = \{k_{ij}(x)\}_{i,j=1}^n$ удовлетворяет на $[0,\infty)$ следующим условиям:

$$k_{ij} \in C^2[0,\infty), \quad k_{ij}'(x) \text{ не убывают на } [0,\infty), \quad k_{ij}(0) = 0, \quad k_{ij}'(0) = p_{ij} > 0. \tag{2}$$

Исследование основано на методе весовых метрик (аналог метода А. Белицкого [11]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-41-200001) и публикуется в рамках реализации государственного задания по проекту «Нелинейные сингулярные интегро-дифференциальные уравнения и краевые задачи» в соответствии с Соглашением № 075-03-2021-071 от 29.12.2020 г.

Поскольку в связи с указанными приложениями особый интерес представляют положительные при $x > 0$ решения, систему (1) будем исследовать в конусе

$$Q^1_{0,n} = \big\{u \mid u = \{u_i\}_{i=1}^n,\ u_i \in C[0,\infty) \cap C^1(0,\infty),\ u_i(0) = 0 \text{ и } u_i(x) > 0 \text{ при } x > 0\big\}.$$

Наряду с системой (1) будем рассматривать тесно связанную с ней систему нелинейных интегральных уравнений

$$u_i^\alpha(x) = \sum_{j=1}^n \int_0^x k'_{ij}(x-t)u_j(t)\,dt, \quad \alpha > 1, \quad x > 0, \quad i = \overline{1,n}, \tag{3}$$

в конусе

$$Q_{0,n} = \big\{u \mid u = \{u_i\}_{i=1}^n, u_i \in C[0,\infty),\ u_i(0) = 0 \text{ и } u_i(x) > 0 \text{ при } x > 0\big\}.$$

Получены точные априорные оценки для решений систем (1) и (3), на основе которых методом весовых метрик доказаны глобальные теоремы о существовании и единственности нетривиальных решений и показано, как их можно найти. При более общих, чем (2), предположениях относительно ядра доказано, что в случае $0 < \alpha < 1$ системы (1) и (3) могут иметь лишь тривиальное решение $u = 0$.

Следует отметить, что система интегральных уравнений вида (3) методом весовых метрик ранее исследовалась в работе [1], в которой априорная оценка снизу не отражает в явном виде зависимость решения от n, вопрос об априорной оценке сверху, необходимой для корректности введённой метрики, не рассматривается и фактически накладывается жёсткое условие $\alpha > n$ (см. замечания 4, 5, 7 в [2]). Интегральное уравнение вида (3) впервые было изучено этим методом в [4] при $\alpha = 2$. В отличие от данной работы при построении метрики в [4] использовалась не нижняя априорная оценка, а разность между верхней и нижней априорными оценками, причём для корректности введённой метрики пришлось вместо точной априорной оценки сверху использовать более грубую оценку. Подробное изложение этих результатов приведено в [3, 5, 10]. Что касается систем интегро-дифференциальных уравнений вида (1), то ранее они методом весовых метрик не изучались.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений со степенной нелинейностью (1) в конусе пространства непрерывных функций $C[0,\infty)$. Очевидно, что данная система имеет в $C[0,\infty)$ тривиальное решение $u = 0$, т. е. $u_i(x) \equiv 0$ при $i = \overline{1,n}$, и любое другое решение удовлетворяет условию $u(0) = 0$. С теоретической и прикладной (см. введение) точек зрения интерес представляют нетривиальные положительные при $x > 0$ решения системы (1).

Задача. Без ограничений на область определения найти условия на показатель степени α и ядро $k(x)$, при которых система (1) имеет единственное непрерывное решение, положительное при $x > 0$. Установить точные нижнюю и верхнюю априорные оценки решения и показать, что оно может быть найдено методом последовательных приближений.

Решение этой задачи основано на методе весовых метрик, являющемся аналогом метода Белицкого, заключающегося в следующем. Как известно [11], с помощью теорем о неподвижной точке можно доказывать по крайней мере локальное существование и единственность решений нелинейных дифференциальных и интегральных уравнений. Если нелинейность удовлетворяет условию Липшица с константой такой, что её произведение на длину промежутка, в котором ищется решение, достаточно мало, то получается сжимающее отображение. «Отсюда следуют теоремы локального существования и единственности. Для объединения этих локальных решений в глобальное требуются уже отдельные рассуждения» (см. [11, с. 218]).

А. Белицкий предложил более эффективный метод, при котором вводится новое определение расстояния, зависящее от постоянной Липшица, что даёт возможность доказывать непосредственно глобальные теоремы существования и единственности. Описание этого метода приведено в [11, глава 3, п. 3.1.3]. Применяемый в данной работе метод весовых метрик отличается от метода Белицкого тем, что вводимая метрика зависит не от постоянной Липшица, а от точной априорной оценки снизу решения системы (1).

2. СВОЙСТВА И АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ

Здесь приводится существенная для получения основных результатов информация о свойствах решений системы (1) в классе $Q^1_{0,n}$.

Обозначим через M_0 множество всех неотрицательных (измеримых по Лебегу) на $[0,\infty)$ функций: $M_0 = \{f \mid f(x) \geqslant 0$ для любого $x \geqslant 0\}$. В случае необходимости продолжения функции $f \in M_0$ на всю ось $(-\infty,\infty)$ будем считать, что $f(x)=0$ при $x<0$. Далее для полноты исследования нам понадобится следующая простая лемма, являющаяся аналогом леммы 1 [4], в которой предполагается, что функция $w(x)$ локально ограничена на $[0,\infty)$.

Лемма 1. *Пусть функции $v(x)$ и $w(x)$ принадлежат классу M_0. Если $v(x)$ не убывает, а $w(x)$ локально суммируема на $[0,\infty)$, то их свертка $(v*w)(x) = \int\limits_0^x v(x-t)w(t)\,dt$ есть непрерывная на $[0,\infty)$ функция, т. е. $v*w \in C[0,\infty)$.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in [0,\infty)$ — произвольная точка и последовательность положительных чисел x_n сходится к x_0, т. е. $\{x_n\} \to x_0$. Нужно доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}[(v*w)(x_n)] = (v*w)(x_0).$$

Так как последовательность $\{x_n\}$ сходится, то она ограничена, т. е. существует $A>0$ такое, что $x_n < A$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Поэтому для достаточно большого x^* такого, что $x^* > A > x_n$ и $x^* > x_0$, имеем (с учётом, что $v(x)=0$ при $x<0$)

$$(v*w)(x_n) = \int\limits_0^{x_n} v(x_n-t)w(t)\,dt = \int\limits_0^{x^*} v(x_n-t)w(t)\,dt, \tag{4}$$

поскольку

$$\int\limits_0^{x^*} v(x_n-t)w(t)\,dt = \int\limits_0^{x_n} v(x_n-t)w(t)\,dt + \int\limits_{x_n}^{x^*} v(x_n-t)w(t)\,dt = \int\limits_0^{x_n} v(x_n-t)w(t)\,dt.$$

Аналогично,

$$(v*w)(x_0) = \int\limits_0^{x_0} v(x_0-t)w(t)\,dt = \int\limits_0^{x^*} v(x_0-t)w(t)\,dt, \tag{5}$$

так как

$$\int\limits_0^{x^*} v(x_0-t)w(t)\,dt = \int\limits_0^{x_0} v(x_0-t)w(t)\,dt + \int\limits_{x_0}^{x^*} v(x_0-t)w(t)\,dt = \int\limits_0^{x_0} v(x_0-t)w(t)\,dt.$$

Поскольку функция $v(x)$ неубывающая, то она почти всюду непрерывна на $[0,x^*]$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} v(x_n-t)w(t) = v(x_0-t)w(t)$ для почти всех $t\in[0,x^*]$. Далее, так как $v(x)$ —

неубывающая и $w(x)$ — локально суммируемая функции, то последовательность $\{f_n(t)\} = \{v(x_n - t)\, w(t)\}$ сходится почти всюду к $f(t) = v(x_0 - t)\, w(t)$ и $f_n(t) \leqslant v(x^*)w(t) \in L_1[0, x^*]$. В силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла получаем

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{x^*} v(x_n - t)w(t)\, dt = \int\limits_0^{x^*} v(x_0 - t)w(t)\, dt. \tag{6}$$

Используя последовательно (4), (6) и (5), окончательно получаем

$$\lim_{n\to\infty} (v * w)(x_n) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{x^*} v(x_n - t)w(t)\, dt = \int\limits_0^{x^*} v(x_0 - t)w(t)\, dt = (v * w)(x_0).$$

Лемма 1 доказана. □

Выясним вопрос о гладкости решений системы (3).

Лемма 2. *Пусть ядро $k(x)$ удовлетворяет условию (2). Если $u \in Q_{0,n}$ является решением системы (3), то $u(x)$ не убывает на $[0, \infty)$ и непрерывно дифференцируема на $(0, \infty)$, т. е. $u \in C^1(0, \infty)$.*

Доказательство. Докажем сначала, что $u_i(x_1) \leqslant u_i(x_2)$ при $x_1 < x_2$ для любого $i = \overline{1, n}$. Используя тождество (3) и условие (2), имеем

$$u_i^\alpha(x_2) - u_i^\alpha(x_1) = \sum_{j=1}^n \left[\int\limits_0^{x_1} \big(k'_{ij}(x_2 - t) - k'_{ij}(x_1 - t)\big) u_j(t)\, dt + \int\limits_{x_1}^{x_2} k'_{ij}(x_2 - t) u_j(t)\, dt \right] \geqslant 0.$$

Следовательно, $u_i(x_1) \leqslant u_i(x_2)$ и, значит, $u_i(x)$ не убывает на $[0, \infty)$ при любом $i = \overline{1, n}$.

Осталось доказать, что решение системы (3) $u(x) = \{u_i(x)\}_{i=1}^n \in Q_{0,n}$ непрерывно дифференцируемо на $(0, \infty)$. Так как по условию (2) $k \in C^2[0, \infty)$, то правая часть тождества (3) дифференцируема и в силу свойства коммутативности свёртки (см., например, [3]) имеем

$$\left(\int\limits_0^x k'_{ij}(x - t) u_j(t)\, dt \right)' = \int\limits_0^x k''_{ij}(x - t) u_j(t)\, dt + k'_{ij}(0) u_j(x) = \int\limits_0^x k''_{ij}(t) u_j(x - t)\, dt + k'_{ij}(0) u_j(x).$$

Поскольку при любых $i, j = \overline{1, n}$ функция $u_j(x)$ не убывает, а функция $k''_{ij}(x)$ локально суммируема на $[0, \infty)$, то в силу леммы 1 о непрерывности свёртки производная правой части тождества (3)

$$\sum_{j=1}^n \left[\int\limits_0^x k''_{ij}(x - t) u_j(t)\, dt + p_{ij} u_j(x) \right]$$

непрерывна на $[0, \infty)$. Но тогда существует и непрерывна производная левой части тождества (3) $\alpha u_i^{\alpha-1}(x) u'_i(x)$, что влечёт за собой существование и непрерывность первой производной $u'_i(x)$ при любых $x \in (0, \infty)$ и $i = \overline{1, n}$. □

Докажем теперь основные леммы данного пункта. Установим связь между системой интегро-дифференциальных уравнений (1) и системой интегральных уравнений (3). Справедлива

Лемма 3. *Пусть ядро $k(x)$ удовлетворяет условию (2). Если $u \in Q^1_{0,n}$ и является решением системы интегро-дифференциальных уравнений (1), то $u \in Q_{0,n}$ и является решением системы интегральных уравнений (3). Обратно, если система (3) имеет решение $u \in Q_{0,n}$, то $u \in Q^1_{0,n}$ и является решением системы (1).*

Доказательство. Пусть $u \in Q^1_{0,n}$ и является решением системы (1). Тогда $u \in Q_{0,n}$, и поскольку $k_{ij}(0) = 0$, $u_j(0) = 0$, из тождества (1), интегрируя по частям, в силу коммутативности свёртки имеем

$$u_i^\alpha(x) = \sum_{j=1}^{n} \int_0^x k_{ij}(x-t)\,du_j(t) = \sum_{j=1}^{n} \int_0^x k'_{ij}(x-t) u_j(t)\,dt,$$

т. е. $u(x)$ является решением системы (3).

Обратно, пусть $u(x) \in Q_{0,n}$ и является решением системы (3). Тогда по лемме 2 функция $u(x)$ непрерывно дифференцируема на $(0, \infty)$, т. е. $u(x) \in Q^1_{0,n}$. Поэтому из тождества (3), используя свойство коммутативности свёртки, формулу интегрирования по частям и равенства $k_{ij}(0) = u_j(0) = 0$, имеем

$$u_i^\alpha(x) = \sum_{j=1}^{n} \int_0^x k'_{ij}(t) u_j(x-t)\,dt = \sum_{j=1}^{n} \int_0^x k_{ij}(t) u'_j(x-t)\,dt = \sum_{j=1}^{n} \int_0^x k_{ij}(x-t) u'_j(t)\,dt,$$

т. е. $u(x)$ является решением системы (1). □

Из леммы 3 вытекает, что для доказательства существования в классе $Q^1_{0,n}$ решения системы (1) достаточно доказать существование в классе $Q_{0,n}$ решения системы (3).

Обозначим

$$p = \min_{1 \leqslant i,j \leqslant n} p_{ij}. \tag{7}$$

При доказательстве основных результатов важную роль будет играть следующая

Лемма 4. *Пусть ядро $k(x)$ удовлетворяет условию* (2)*. Если $u \in Q_{0,n}$ является решением системы* (3)*, то для любого $x \in [0, \infty)$ и любого $i = \overline{1, n}$ выполняются неравенства*

$$F_n(x) \leqslant u_i(x) \leqslant G_n(x), \tag{8}$$

где

$$F_n(x) \equiv \left[\frac{(\alpha-1)n}{\alpha} p\right]^{1/(\alpha-1)} x^{1/(\alpha-1)}, \quad G_n(x) \equiv \left[n \int_0^x \left(\sum_{i,j=1}^{n} k'_{ij}(t)\right) dt\right]^{1/(\alpha-1)},$$

число $p > 0$ определено в (7)*.*

Доказательство. Обозначим

$$z_n(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x), \quad K_n(x) = \sum_{i,j=1}^{n} k'_{ij}(x).$$

Так как в силу условия (2) $p \leqslant k'_{ij}(x-t)$ при $t < x$, то из тождества (3) имеем

$$u_i^\alpha(x) \geqslant p \sum_{j=1}^{n} \int_0^x u_j(t) dt$$

или

$$u_i(x) \geqslant \left(p \int_0^x z_n(t)\,dt\right)^{1/\alpha}. \tag{9}$$

После суммирования из (9) получаем $z_n(x) \geqslant n\Bigl(p\int\limits_0^x z_n(t)\,dt\Bigr)^{1/\alpha}$, т. е.

$$pz_n(x)\left(p\int\limits_0^x z_n(t)\,dt\right)^{-1/\alpha} \geqslant np \quad \text{для всех} \quad x>0$$

или

$$pz_n(t)\left(p\int\limits_0^t z_n(s)\,ds\right)^{-1/\alpha} \geqslant np \quad \text{для всех} \quad t>0.$$

Интегрируя последнее неравенство в пределах от 0 до x, получаем

$$\left(p\int\limits_0^x z_n(t)\,dt\right)^{(\alpha-1)/\alpha} \geqslant \frac{\alpha-1}{\alpha}npx.$$

Следовательно,

$$\left(p\int\limits_0^x z_n(t)\,dt\right)^{1/\alpha} \geqslant \left[\frac{(\alpha-1)np}{\alpha}x\right]^{1/(\alpha-1)} \equiv F_n(x).$$

Таким образом, доказываемая оценка снизу $u_i(x) \geqslant F_n(x)$ является следствием неравенства (9).

Докажем теперь оценку сверху. Так как для любого $x>0$ можем написать равенство

$$u_i^\alpha(x) \equiv \sum_{j=1}^n \int\limits_0^x k'_{ij}(x-t)u_j(t)\,dt, \quad \alpha>1, \quad i=\overline{1,n},$$

то в силу леммы 2

$$u_i^\alpha(x) \leqslant \sum_{j=1}^n u_j(x)\int\limits_0^x k'_{ij}(t)\,dt \leqslant \left(\int\limits_0^x K_n(t)\,dt\right)\sum_{j=1}^n u_j(x).$$

Значит,

$$u_i(x) \leqslant \left(\int\limits_0^x K_n(t)\,dt\right)^{1/\alpha}\left(\sum_{j=1}^n u_j(x)\right)^{1/\alpha}. \tag{10}$$

Из (10), суммируя по i, получаем

$$\sum_{i=1}^n u_i(x) \leqslant n\left(\int\limits_0^x K_n(t)\,dt\right)^{1/\alpha}\left(\sum_{i=1}^n u_i(x)\right)^{1/\alpha},$$

таким образом,

$$\left[\sum_{i=1}^n u_i(x)\right]^{(\alpha-1)/\alpha} \leqslant n\left(\int\limits_0^x K_n(t)\,dt\right)^{1/\alpha}.$$

Следовательно,

$$\left[\sum_{i=1}^n u_i(x)\right]^{1/\alpha} \leqslant n^{1/(\alpha-1)}\left(\int\limits_0^x K_n(t)\,dt\right)^{1/[\alpha(\alpha-1)]}. \tag{11}$$

Используя (11), из неравенства (10) получаем

$$u_i(x) \leqslant \left(\int_0^x K_n(t)\,dt \right)^{1/\alpha} n^{1/(\alpha-1)} \left(\int_0^x K_n(t)\,dt \right)^{1/[\alpha(\alpha-1)]} \equiv G_n(x),$$

что доказывает оценку $u_i(x) \leqslant G_n(x)$ для всех $i = \overline{1,n}$. □

Пример. Если $k_{ij}(x) = x$ (а тогда $p = 1$), то $u(x) = \{u_i(x)\}_{i=1}^n$, где

$$u_i(x) = F_n(x) \equiv \left[\frac{\alpha-1}{\alpha} n\right]^{1/(\alpha-1)} x^{1/(\alpha-1)}$$

является решением как системы (1), так и системы (3), т. е. априорная оценка снизу из (8) в определённом смысле неулучшаема.

Пример показывает (при $\alpha > 2$), что решение системы (1) может быть не дифференцируемо в точке $x = 0$. Этот факт учтён в определении конуса $Q^1_{0,n}$ и в лемме 2.

3. ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ

Запишем систему (3) в операторном виде:

$$u = Tu, \quad T = \{T_i\}_{i=1}^n,$$
$$\big(T_i u\big)(x) = \left(\sum_{j=1}^n \int_0^x k'_{ij}(x-t) u_j(t)\,dt \right)^{1/\alpha}, \quad \alpha > 1, \quad x > 0, \quad i = \overline{1,n}.$$

Из леммы 4 следует, что решение уравнения $u = Tu$ естественно разыскивать в конусном отрезке

$$P_n = \big\{ u \mid u = \{u_i\}_{i=1}^n,\ u_i(x) \in C[0,\infty);\ F_n(x) \leqslant u_i(x) \leqslant G_n(x) \text{ для всех } i = \overline{1,n} \big\},$$

где функции $F_n(x)$ и $G_n(x)$ определены в лемме 4.

Лемма 5. *Пусть ядро $k(x)$ удовлетворяет условию (2). Тогда класс P_n инвариантен относительно оператора T.*

Доказательство. Пусть $u \in P_n$. Очевидно, что свёртка $(T_i u)(x)$ в силу леммы 1 есть функция, непрерывная на $[0,\infty)$. Далее, поскольку $u_i(x) \geqslant F_n(x)$ и $k'_{ij}(x-t) \geqslant p$, при $t < x$ имеем

$$[(T_i u)(x)]^\alpha \geqslant p \left[\frac{(\alpha-1)\,p\,n}{\alpha}\right]^{1/(\alpha-1)} n \int_0^x t^{1/(\alpha-1)}\,dt \equiv \big[F_n(x)\big]^\alpha.$$

С другой стороны, так как $u_i(t) \leqslant G_n(t) \leqslant G_n(x)$ при $t < x$ и $n \geqslant 1$, имеем

$$\big[(T_i u(x)\big]^\alpha \leqslant \left[n \int_0^x K_n(s)\,ds \right]^{1/(\alpha-1)} \int_0^x \sum_{j=1}^n k'_{ij}(s)\,ds \leqslant [G_n(x)]^\alpha,$$

где $K_n(x) = \sum\limits_{i,j=1}^n k'_{ij}(x)$.

Таким образом, $F_n(x) \leqslant (T_i u)(x) \leqslant G_n(x)$ для всех $i = \overline{1,n}$. Следовательно, $Tu \in P_n$. □

Далее к системе (3) мы будем применять принцип сжимающих отображений. Для этого нам понадобится, в частности, построить полное метрическое пространство. Введём в связи с этим следующий класс функций:

$$P_{b,n} = \big\{u \mid u = \{u_i\}_{i=1}^n, u_i(x) \in C[0,b];\ F_n(x) \leqslant u_i(x) \leqslant G_n(x) \text{ для всех } i = \overline{1,n}\big\},$$

где $b > 0$ — произвольное число, а функции $F_n(x)$ и $G_n(x)$ определены в лемме 4.

Из леммы 5, как прямое следствие, получаем, что оператор T действует из $P_{b,n}$ в $P_{b,n}$. Найдём условия, при которых он является сжимающим. Для этого предположим, что ядро системы (3) удовлетворяет дополнительному условию: существует $\eta_{ij} \in (0,b)$ такое, что

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} k'_{ij}(\eta_{ij}) < \alpha p n. \tag{12}$$

Замечание. В случае $k_{ij}(x) = x$ условие (12) означает, что $\alpha > 1$.

Следующая лемма доказывается аналогично лемме 7 из [4].

Лемма 6. *Пусть ядро $k(x)$ удовлетворяет условиям (2) и (12). Тогда для любого $x \in [0,b]$ и любых $i,j = \overline{1,n}$ справедливо неравенство $k'_{ij}(x)e^{-\beta_{ij}x} \leqslant k'_{ij}(\eta_{ij})$, где $\beta_{ij} = \dfrac{1}{p} \sup\limits_{\eta_{ij}\leqslant x\leqslant b} \frac{k'_{ij}(x)-p}{x}$.*

Доказательство. Рассмотрим отдельно два случая.

1. Пусть $0 \leqslant x \leqslant \eta_{ij}$. Тогда, учитывая, что $k'_{ij}(x)$ не убывает и $\beta_{ij} > 0$, имеем $k'_{ij}(x)e^{-\beta_{ij}x} \leqslant k'_{ij}(x) \leqslant k'_{ij}(\eta_{ij})$. Что и требовалось доказать.

2. Пусть, наконец, $\eta_{ij} \leqslant x \leqslant b$. В этом случае

$$k'_{ij}(x) = p + px\frac{1}{p}\frac{k'_{ij}(x) - p}{x} \leqslant p[1 + x\beta_{ij}] \leqslant pe^{\beta_{ij}x}.$$

Следовательно, $k'_{ij}(x) \leqslant pe^{\beta_{ij}x} \leqslant k'_{ij}(\eta_{ij})e^{\beta_{ij}x}$, откуда получаем, что $k'_{ij}(x)e^{-\beta_{ij}x} \leqslant k'_{ij}(\eta_{ij})$ и для любого $x \in [\eta_{ij}, b]$.

Обозначим

$$\beta = \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} \beta_{ij}. \tag{13}$$

Тогда из леммы 6 вытекает

Следствие 1. *Пусть ядро $k(x) = \big\{k_{ij}(x)\big\}_{i,j=1}^n$ удовлетворяет условиям (2) и (12). Тогда для любого $x \in [0,b]$ и любых $i,j = \overline{1,n}$ справедливо неравенство*

$$k'_{ij}(x)e^{-\beta x} \leqslant k'_{ij}(\eta_{ij}). \tag{14}$$

Введём теперь в классе $P_{b,n}$ метрику ϱ_b, положив

$$\varrho_b(u,v) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sup_{0<x\leqslant b} \frac{|u_i(x) - v_i(x)|}{x^{1/(\alpha-1)}e^{\beta x}}, \tag{15}$$

где $u(x) = \{u_i(x)\}_{i=1}^n$, $v(x) = \{v_i(x)\}_{i=1}^n$, а число β определено равенством (13).

Выполнимость аксиом метрики очевидна. Докажем полноту метрического пространства $P_{b,n}$. Пусть $\{u^{[n]}\}$ есть произвольная фундаментальная последовательность из $P_{b,n}$. Тогда по определению

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) > 0 :\ \forall m,n \geqslant N\ \varrho_b(u^{[m]}, u^{[n]}) < \varepsilon,$$

т. е.

$$\frac{|u_i^{[m]}(x)-u_i^{[n]}(x)|}{x^{1/(\alpha-1)}e^{\beta x}}<\varepsilon \quad \text{для любых} \quad m,n\geqslant N, \quad x\in(0,b], \quad i=\overline{1,n}. \tag{16}$$

Так как $x^{1/(\alpha-1)}e^{\beta x}\leqslant b^{1/(\alpha-1)}e^{\beta b}\equiv M$, то

$$\bigl|u_i^{[m]}(x)-u_i^{[n]}(x)\bigr|x^{1/(\alpha-1)}e^{\beta x}\geqslant\frac{1}{M}\bigl|u_i^{[m]}(x)-u_i^{[n]}(x)\bigr|.$$

Поэтому из (16) имеем

$$\bigl|u_i^{[m]}(x)-u_i^{[n]}(x)\bigr|\leqslant M\varepsilon \quad \text{для любых} \quad m,n\geqslant N, \quad x\in[0,b], \quad i=\overline{1,n}.$$

Здесь учитываем, что $u_i^{[m]}(0)=u_i^{[n]}(0)=0$, т. е. $\{u^{[n]}\}$ является фундаментальной последовательностью в $C[0,b]$. В силу полноты метрического пространства $C[0,b]$ существует функция $u=\{u_i\}_{i=1}^n$, $u_i\in C[0,b]$, такая, что

$$\lim_{n\to\infty}u_i^{[n]}(x)=u_i(x). \tag{17}$$

Покажем, что $u\in P_{b,n}$. Так как $\{u_i^{[n]}\}\in P_{b,n}$, то для любых n и всех $x\in[0,b]$, $i=\overline{1,n}$, имеем $F_n(x)\leqslant u_i^{[n]}(x)\leqslant G_n(x)$. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $n\to\infty$, с учётом равенства (17) получаем $F_n(x)\leqslant u_i(x)\leqslant G_n(x)$, т. е. $u\in P_{b,n}$.

Осталось доказать сходимость последовательности $\{u^{[n]}\}$ к u по метрике $\rho_{b,n}$. Переходя в неравенстве (16) к пределу при $m\to\infty$, с учётом равенства (17) имеем

$$\frac{|u_i(x)-u_i^{[n]}(x)|}{x^{1/(\alpha-1)}e^{\beta x}}<\varepsilon \quad \text{для всех } n\geqslant N \quad \text{и для любых } x\in(0,b],\ i=\overline{1,n},$$

т. е. $\rho_b(u^{[n]},u)<\varepsilon$ для любого $n\geqslant N$, что и требовалось доказать. □

Теорема 1. *Если ядро $k(x)$ удовлетворяет условиям (2) и (12), то система нелинейных интегральных уравнений типа свёртки (3) имеет в $Q_{0,n}$ (и в $P_{b,n}$ при любом $b>0$) единственное решение. Это решение может быть найдено методом последовательных приближений, которые сходятся к точному решению по метрике ϱ_b при любом $b>0$.*

Доказательство. Запишем систему (3) в операторном виде: $u=Tu$.

Покажем сначала, что система (3) имеет единственное решение в $P_{b,n}$ при любом $b>0$ и что это решение может быть найдено методом последовательных приближений. Для этого достаточно, в силу леммы 5, показать, что T — сжимающий оператор. Докажем это.

По теореме Лагранжа для любых $z_1,z_2>0$ имеем $z_1^{1/\alpha}-z_2^{1/\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}\Theta^{1/(\alpha-1)}(z_1-z_2)$, где Θ лежит между z_1 и z_2. Поэтому если $z_1\geqslant z_0$ и $z_2\geqslant z_0$, где $z_0>0$, то $\Theta\geqslant z_0$ и имеет место неравенство $\bigl|z_1^{1/\alpha}-z_2^{1/\alpha}\bigr|\leqslant\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{|z_1-z_2|}{\{z_0\}^{(\alpha-1)/\alpha}}$.

Пусть $u,v\in P_{b,n}$ — произвольные функции. Для любого $i=\overline{1,n}$, применяя последнее неравенство и используя леммы 4 и 5, имеем

$$\sup_{0<x\leqslant b}\frac{\bigl|(T_iu)(x)-(T_iv)(x)\bigr|}{x^{1/(\alpha-1)}e^{\beta\,x}}\leqslant\frac{1}{(\alpha-1)\,p\,n}\sup_{0<x\leqslant b}\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\int\limits_0^x k'_{ij}(x-t)|u_j(t)-v_j(t)|\,dt}{x^{\alpha/(\alpha-1)}e^{\beta\,x}}. \tag{18}$$

Поскольку в силу следствия 1

$$\sum_{j=1}^{n}\int\limits_0^x k'_{ij}(x-t)|u_j(t)-v_j(t)|\,dt \leqslant \varrho(u,v)\sum_{j=1}^{n}\int\limits_0^x k'_{ij}(x-t)e^{\beta\, t}t^{1/(\alpha-1)}\,dt$$
$$=\varrho(u,v)e^{\beta\, x}\sum_{j=1}^{n}\int\limits_0^x k'_{ij}(x-t)e^{-\beta\,(x-t)}t^{1/(\alpha-1)}\,dt \leqslant \varrho(u,v)\frac{\alpha-1}{\alpha}\,e^{\beta\, x}x^{\alpha/(\alpha-1)}\sum_{j=1}^{n}k'_{ij}(\eta_{ij}),$$

то из (18) вытекает, что $\varrho_b(Tu,Tv)\leqslant\mu\varrho_b(u,v)$, где $\mu=(\alpha pn)^{-1}\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\left[\sum\limits_{j=1}^{n}k'_{ij}(\eta_{ij})\right]<1$ в силу условия (12), т. е. оператор T является сжимающим.

Существование и единственность решения системы (1) во всём классе $Q_{0,n}$ устанавливается по той же схеме, что и в доказательстве теоремы 3 из [12]. Теорема 1 доказана. $\square$

Таким образом, на основании теоремы 1, используя связь между решениями систем (1) и (3), установленную в лемме 3, мы можем сформулировать основной результат данной работы.

Теорема 2. *Если ядро $k(x)$ удовлетворяет условиям* (2) *и* (12)*, то система нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа свёртки* (1) *имеет в $Q^1_{0,n}$ (и в $P_{b,n}$ при любом $b>0$) единственное решение. Это решение удовлетворяет неравенствам* (8) *и может быть найдено в полном метрическом пространстве $P_{b,n}$ методом последовательных приближений, которые сходятся к точному решению по метрике ϱ_b при любом $b>0$.*

4. СЛУЧАЙ $0<\alpha<1$

Цель этого пункта — показать, что при $0<\alpha<1$ и произвольном ядре $k(x)$, не обязательно удовлетворяющим условиям (2) и (12), подобно линейному случаю ($\alpha=1$) система (3) имеет в классе неотрицательных непрерывных функций лишь тривиальное решение $u(x)=0$.

Лемма 7. *Пусть $k'_{ij}(x)$, $i,j=\overline{1,n}$, непрерывны и неотрицательны на $[0,\infty)$. Тогда при $0<\alpha<1$ система* (3) *не имеет нетривиальных решений в классе $C^+[0,\infty)$ неотрицательных непрерывных на $[0,\infty)$ функций.*

Доказательство. Допустим противное, что система (3) имеет два различных решения $u=\{u_i\}_{i=1}^n$ и $v=\{v_i\}_{i=1}^n$. Так как $u\equiv Tu$ и $v\equiv Tv$, то $u_i(0)=v_i(0)=0$.

Покажем, что $u_i(x)=v_i(x)$ при $x\in[0,b]$, где $b>0$ достаточно малое число. Введём обозначения:

$$R_n(b)=\max_{0\leqslant x\leqslant b}\sum_{i=1}^{n}u_i(x),\quad Q_n(b)=\max_{0\leqslant x\leqslant b}\sum_{i=1}^{n}v_i(x),\quad K_n(x)=\sum_{i,j=1}^{n}k'_{ij}(x),$$
$$D_{n,b}=\max\left[\left(R_n(b)\int\limits_0^b K_n(t)\,dt\right)^{(1-\alpha)/\alpha},\ \left(Q_n(b)\int\limits_0^b K_n(t)\,dt\right)^{(1-\alpha)/\alpha}\right].$$

Как и при доказательстве теоремы 1, используя теорему Лагранжа и учитывая, что $0<\alpha<1$, для любого $x\in[0,b]$ имеем

$$|u_i(x)-v_i(x)|\leqslant\left(\frac{D_{n,b}}{\alpha}\int\limits_0^b K_n(t)\,dt\right)\sum_{i=1}^{n}\sup_{0\leqslant t\leqslant b}|u_i(t)-v_i(t)|.$$

Переходя к супремуму в левой части и затем суммируя, получаем

$$\sum_{i=1}^{n} \sup_{0\leqslant x\leqslant b} |u_i(x) - v_i(x)| \leqslant \left(\frac{nD_{n,b}}{\alpha} \int_0^b K_n(t)\,dt \right) \sum_{i=1}^{n} \sup_{0\leqslant x\leqslant b} |u_i(x) - v_i(x)|.$$

Выбрав теперь b достаточно малым так, чтобы выражение в круглых скобках было меньше единицы, имеем, что $u_i(x) = v_i(x)$ при любом $x \in [0, b]$.

Положим $\overline{b} = \sup\{b \mid u_i(x) \equiv v_i(x),\ x \in [0, b]\}$. Если $\overline{b} = \infty$, то лемма доказана. Если $\overline{b} < \infty$, то $u_i(x)$ и $v_i(x)$ различны в интервале $(\overline{b}, \overline{b} + \varepsilon)$.

Осталось показать, что это невозможно. В самом деле, оценивая, как и выше, для любого $x \in [\overline{b}, \overline{b} + \varepsilon]$ имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \sup_{\overline{b}\leqslant x\leqslant \overline{b}+\varepsilon} |u_i(x) - v_i(x)| \leqslant \left(\frac{nD_{n,\overline{b}+\varepsilon}}{\alpha} \int_0^\varepsilon K_n(t)\,dt \right) \sum_{i=1}^{n} \sup_{\overline{b}\leqslant x\leqslant \overline{b}+\varepsilon} |u_i(x) - v_i(x)|.$$

Выбрав ε достаточно малым, чтобы выражение в скобках стало меньше единицы, получаем, что $u_i(x) \equiv v_i(x)$ при любом $x \in [\overline{b}, \overline{b} + \varepsilon]$, что противоречит различию $u_i(x)$ и $v_i(x)$ на отрезке $[\overline{b}, \overline{b} + \varepsilon]$.

В силу леммы 3 утверждение леммы 7 справедливо и для системы (1). $\square$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При $\alpha > 1$ без ограничений на область определения получена глобальная теорема о существовании, единственности и способе нахождения нетривиального решения системы интегро-дифференциальных уравнений со степенной нелинейностью (1). На основе полученных нижней и верхней априорных оценок найден конусный отрезок, которому принадлежит это решение, и показано, что его можно найти методом последовательных приближений. При $0 < \alpha < 1$ доказано, что системы (1) и (3) могут иметь в классе $C^+[0, \infty)$ неотрицательных непрерывных на $[0, \infty)$ функций лишь тривиальное решение (как и в линейном случае).

Таким образом, установлено, что системы нелинейных однородных уравнений вида (1) и (3) при $\alpha > 1$ кроме тривиального решения могут иметь и нетривиальные решения. В этом состоит принципиальное отличие теории таких систем уравнений (как по методам исследования, так и по характеру получаемых результатов) от теории соответствующих систем линейных уравнений.

Отметим, что системы дискретных уравнений типа свёртки со степенной нелинейностью в различных пространствах числовых последовательностей, как вещественных, так и комплексных, были изучены в [13–15].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Асхабов С. Н., Карапетянц Н. К., Якубов А. Я.* Интегральные уравнения типа свёртки со степенной нелинейностью и их системы // Докл. АН СССР. 1990. Т. 311, № 5. С. 1035–1039.
2. *Асхабов С. Н., Бетилгириев М. А.* Нелинейные интегральные уравнения типа свёртки с почти возрастающими ядрами в конусах // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 2. С. 321–330.
3. *Асхабов С. Н.* Нелинейные уравнения типа свёртки. М.: Физматлит, 2009.
4. *Okrasinski W.* On the existence and uniqueness of non-negative solutions of a certain non-linear convolution equation // Ann. Polon. Math. 1976. V. 36, N 1. P. 61–72.
5. *Okrasinski W.* Nonlinear Volterra equations and physical applications // Extracta Math. 1989. V. 4, N 2. P. 51–74.

6. *Keller J. J.* Propagation of simple nonlinear waves in gas filled tubes with friction // Z. Angew. Math. Phys. 1981. V. 32, N 2. P. 170–181.
7. *Тихонов А. Н.* Об остывании тел при лучеиспускании, следующем закону Stefan'a—Boltzmann'a // Изв. АН СССР. Отд. мат. и естеств. наук. Сер. геогр. и геофиз.) 1937. N 3. P. 461–479.
8. *Ermentrout G. B., Cowan J. D.* Secondary bifurcation in neuronal nets // SIAM J. Appl. Math. 1980. V. 39, N 2. P. 323–340.
9. *Wolfersdorf L. v.* Eininge klassen quadratischer integralgleichungen // Sitz. Sachs. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-naturwiss. Klasse. 2000. V. 128, N 2. P. 1–34.
10. *Brunner H.* Volterra Integral Equations: an Introduction to the Theory and Applications. Cambridge: Univ. Press, 2017.
11. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ: теория и приложения. 1969. М.: Мир, 1969.
12. *Асхабов С. Н.* Интегро-дифференциальное уравнение типа свёртки со степенной нелинейностью и неоднородностью в линейной части // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56, № 6. С. 786–795.
13. *Асхабов С. Н., Карапетянц Н. К.* Дискретные уравнения типа свёртки с монотонной нелинейностью // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 10. С. 1777–1784.
14. *Askhabov S. N., Karapetian N. K.* Convolution type discrete equations with monotonous nonlinearity in comples spaces // J. Integral Equat. Math. Phys. 1992. V. 1, N 1. P. 44–66.
15. *Асхабов С. Н., Карапетянц Н. К.* Дискретные уравнения типа свёртки с монотонной нелинейностью в комплексных пространствах // Докл. АН. 1992. Т. 322, № 6. С. 1015–1018.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 517.968.74

SYSTEM OF INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF CONVOLUTION TYPE WITH POWER NONLINEARITY

© 2021 **S. N. Askhabov**[1,2]

[1] *Chechen State Pedagogical University, prosp. Isaeva 62, Grozny 364068, Russia,*
[2] *Chechen State University, ul. Sheripova 32, Grozny 364024, Russia*

E-mail: askhabov@yandex.ru

Received 24.02.2021, revised 22.04.2021, accepted 24.06.2021

Abstract. The method of weighted metrics in the cone of the space of continuous functions is used to prove a global theorem on the existence and uniqueness of a nonnegative nontrivial solution for a system of integro-differential equations of convolution type with power nonlinearity. It is shown that the solution can be found by the method of successive approximations of the Picard type and exact a priori estimates are obtained for it.

Keywords: system of integro-differential equations, convolution, power nonlinearity.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.301

REFERENCES

1. Askhabov S.N., Karapetyants N.K., Yakubov A.Ya. Integral equations of convolution type with power nonlinearity and systems of such equations. *Dokl. Math.*, 1990, Vol. 41, No. 2, pp. 323–327.
2. Askhabov S.N., Betilgiriev M.A. Nonlinear integral equations of convolution type with almost increasing kernels in cones. *Differ. Equat.*, 1991, Vol. 27, No. 2, pp. 234–242.
3. Askhabov S.N. Nonlinear Convolution Type Equations. Moscow: Fizmatlit, 2009 (in Russian).
4. Okrasinski W. On the existence and uniqueness of non-negative solutions of a certain non-linear convolution equation. *Ann. Polon. Math.*, 1976. Vol. 36, No. 1, pp. 61–72.
5. Okrasinski W. Nonlinear Volterra equations and physical applications. *Extracta Math.*, 1989, V. 4, N 2. P. 51–74.
6. Keller J.J. Propagation of simple nonlinear waves in gas filled tubes with friction. *Z. Angew. Math. Phys.*, 1981, Vol. 32, No. 2, pp. 170–181.
7. Tikhonov A.N. On the cooling of bodies during radiation, following the Stefan—Boltzmann law. *Izv. AN USSR*, (Department of Mathematics and Natural Sciences, Series of Geogr. And Geophysics, 1937, Vol. 3, pp. 461–479 (in Russian).
8. Ermentrout G.B., Cowan J.D. Secondary bifurcation in neuronal nets. *SIAM J. Appl. Math.*, 1980, Vol. 39, No. 2, pp. 323–340.
9. Wolfersdorf L.v. Eininge klassen quadratischer integralgleichungen. *Sitz. Sachs. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-naturwiss. Klasse.*, 2000, Vol. 128, No. 2, pp. 1–34.
10. Brunner H. *Volterra Integral Equations: an Introduction to the Theory and Applications.* Cambridge: Univ. Press, 2017.
11. Edvards R. *Functional Analysis: Theory and Applications*, N. Y.: Holt, Rinehart, and Winston, 1965.
12. Askhabov S.N. Integro-differential equation of the convolution type with a power nonlinearity and an inhomogeneity in the linear part. *Differ. Equat.*, 2020, Vol. 56, No. 6, pp. 775–784.

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2021, Vol. 15, No. 3.

13. Askhabov S.N., Karapetyants N.K. Discrete equations of convolution type with monotone nonlinearity. *Differ. Equat.*, 1989, Vol. 25, No. 10, pp. 1255–1261.
14. Askhabov S.N., Karapetian N.K. Convolution type discrete equations with monotonous nonlinearity in comples spaces. *J. Integral Equat. Math. Phys.*, 1992, Vol. 1, No. 1, pp. 44–66.
15. Askhabov S.N., Karapetyants N.K. Discrete equations of convolution type with monotone nonlinearity in complex spaces. *Dokl. Math.*, 1992, Vol. 45, No. 1, pp. 206–210.