

УДК 519.633.6:519.642.2

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА БЫСТРЫХ МУЛЬТИПОЛЕЙ ПРИ ОПТИМИЗАЦИИ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

© 2021 С. А. Сивак^a, М. Э. Рояк^b, И. М. Ступаков^c*Новосибирский государственный технический университет,
просп. К. Маркса, 20, г. Новосибирск 630073, Россия*E-mails: ^asiwakserg@yandex.ru, ^broyak@ami.nstu.ru, ^cistupakov@gmail.comПоступила в редакцию 22.03.2021 г.; после доработки 08.05.2021 г.;
принята к публикации 24.06.2021 г.

Рассматривается задача решения уравнения Гельмгольца методом граничных элементов с применением метода быстрых мультиполей на примере задачи акустики. Проводится сравнение точности результатов, полученных с использованием метода быстрых мультиполей, на модельной задаче с известным аналитическим решением. Предлагается оригинальный подход к расчёту поворотных коэффициентов для преобразования разложения по сферическим гармоникам мультипольного ряда.

Ключевые слова: метод граничных элементов, метод быстрых мультиполей, уравнение Гельмгольца.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.307

Уравнение Гельмгольца может использоваться для описания различных физических процессов. В частности, уравнение применимо для описания распространения акустических волн, имеющих периодические по времени источники звуковых колебаний. Метод граничных элементов (МГЭ) эффективен для решения уравнения Гельмгольца, описывающего указанный процесс в неограниченной подобласти. Для оптимизации работы МГЭ применяется ряд подходов, позволяющих сократить вычислительные затраты на сборку матрицы. Среди них изометрический подход и как его частный случай — технология t -сплайн кривых [1, 2], методы вейвлетного преобразования [3–6], адаптивной кросс-аппроксимации [7–9] и быстрых мультиполей (МБМ) [10–21]. Указанные методы используются для уменьшения объёма памяти при использовании МГЭ. В данной работе рассмотрено применение метода быстрых мультиполей к решению уравнения Гельмгольца, сформулированного для задачи акустики.

Новизна данной работы состоит в разработке алгоритма построения поворотных коэффициентов мультипольного разложения.

1. МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Уравнение Гельмгольца применяется для решения задачи акустики при гармонических по времени источниках колебаний в среде. Для однородной области Ω оно имеет вид

$$\Delta u(\mathbf{x}) + k^2 u(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1)$$

где \mathbf{x} — вектор пространственных координат, $k = \omega/v$ — волновое число, ω — циклическая частота колебаний в среде, v — скорость звука в среде. Функция u является потенциалом ско-

рости звука, F — функция интенсивности источников звука в объёме среды [22]. В дальнейшем будем полагать $F = 0$, т. е. объёмные источники звуковых волн в области Ω отсутствуют.

Граничные условия Дирихле и Неймана соответственно имеют следующий вид:

$$u(\mathbf{x})|_{\mathbf{x} \in \Gamma_1} = F_D(\mathbf{x}), \quad \Gamma_1 \subseteq \partial\Omega, \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\mathbf{x} \in \Gamma_2} = F_N(\mathbf{x}), \quad \Gamma_2 \subseteq \partial\Omega. \quad (3)$$

Помимо условий (2) и (3) могут иметь место также и условия сопряжения, рассмотренные в [22], для смежных подобластей Ω и Ω' и некоторого общего участка границы $\Gamma_3 \subseteq \partial\Omega$. В данной работе рассматривается только случай однородной области.

Определим операторы следа для области Ω , а именно, след Дирихле γ_0^Ω и след Неймана γ_1^Ω :

$$(\gamma_0^\Omega u)(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{r} \in \Omega, \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{x}} u(\mathbf{r}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (4)$$

$$(\gamma_1^\Omega u)(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{r} \in \Omega, \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{x}} \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \nabla u(\mathbf{r}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (5)$$

где \mathbf{n} — направление внешней относительно Ω нормали в точке \mathbf{x} на Γ .

Используя (4), (5), решение уравнения (1) можно представить в следующем виде [10, 23]:

$$u(\mathbf{y}) = \int_{\Gamma} G_k(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \gamma_1^\Omega u(\mathbf{x}) ds_{\mathbf{x}} - \int_{\Gamma} \gamma_{1,\mathbf{x}}^\Omega G_k(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \gamma_0^\Omega u(\mathbf{x}) ds_{\mathbf{x}}, \quad (6)$$

где G_k — фундаментальное решения уравнения Гельмгольца (1):

$$G_k(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \frac{e^{ik\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}}{4\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}. \quad (7)$$

Применяя операторы следа (4) и (5) к уравнению (6), получим систему интегральных уравнений с двумя типами неизвестных $\gamma_0^\Omega u$ и $\gamma_1^\Omega u$. Для формального определения указанной системы введём пространства Соболева с полуцелым индексом:

$$H^{1/2}(\Gamma) = \{g \mid g = \gamma_0^\Omega f, f \in H^1(\Omega)\}, \quad (8)$$

$$H^{-1/2}(\Gamma) = \{g \mid g = \gamma_1^\Omega f, f \in H^1(\Omega)\}, \quad (9)$$

где $H_1(\Omega)$ — пространство Соболева дифференцируемых функций в области Ω . Подробную информацию о пространствах Соболева с полуцелым индексом можно найти в [24]. Введём также определение граничных линейных интегральных операторов V_k , K_k , K'_k и D_k . Оператор простого слоя V_k определяется следующим образом:

$$(V_k f)(\mathbf{y}) = \int_{\Gamma} G_k(\mathbf{y}, \mathbf{x}) f(\mathbf{x}) ds_{\mathbf{x}}, \quad V_k: H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma), \quad (10)$$

сопряжённый оператор двойного слоя K'_k есть

$$(K'_k f)(\mathbf{y}) = \int_{\Gamma} \gamma_{1,\mathbf{y}}^\Omega G_k(\mathbf{y}, \mathbf{x}) f(\mathbf{x}) ds_{\mathbf{x}}, \quad K'_k: H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma), \quad (11)$$

оператор двойного слоя K_k есть

$$(K_k f)(\mathbf{y}) = \int_{\Gamma} \gamma_{1,\mathbf{x}}^\Omega G_k(\mathbf{y}, \mathbf{x}) f(\mathbf{x}) ds_{\mathbf{x}}, \quad K_k: H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma), \quad (12)$$

и гиперсингулярный оператор D_k имеет вид

$$(D_k f)(\mathbf{y}) = \gamma_{1,\mathbf{y}} \int_{\Gamma} \gamma_{1,\mathbf{x}}^{\Omega} G_k(\mathbf{y}, \mathbf{x}) f(\mathbf{x}) ds_{\mathbf{x}}, \quad D_k: H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma). \quad (13)$$

Введём скалярное произведение для функций w и u , определённых на Γ :

$$\langle u, w \rangle = \int_{\Gamma} u(\mathbf{x}) \bar{w}(\mathbf{x}) ds_{\mathbf{x}}. \quad (14)$$

Используя (10)–(14), можно записать граничные интегральные уравнения в форме Галёркина:

$$\langle V_k \gamma_1^{\Omega} u, w \rangle = \left\langle \left(\frac{1}{2} I + K_k \right) \gamma_0^{\Omega} u, w \right\rangle \quad \text{для всех } w \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad (15)$$

$$\langle D_k \gamma_0^{\Omega} u, v \rangle = \left\langle \left(\frac{1}{2} I - K'_k \right) \gamma_1^{\Omega} u, v \right\rangle \quad \text{для всех } v \in H^{1/2}(\Gamma). \quad (16)$$

Если на Γ только краевые условия в форме (2), то подстановкой в (15) известного значения следа Дирихле получим вариационную постановку относительно следа Неймана. Аналогично, вариационная постановка (16) позволяет найти след Дирихле при краевых условиях, заданных лишь в форме (3). Эта задача имеет единственное решение только в том случае, если число $-k^2$ не является собственным числом оператора Лапласа [25]. При смешанных условиях на границе расчётной области Ω можно решать систему с оператором Стеклова — Пуанкаре:

$$\langle S_k \gamma_0^{\Omega} u, v \rangle = \langle \gamma_1^{\Omega} u, v \rangle, \quad (17)$$

где оператор S_k определяется следующим образом:

$$S_k = D_k + \left(\frac{1}{2} I + K'_k \right) V_k^{-1} \left(\frac{1}{2} I + K_k \right), \quad (18)$$

а пробная функция v выбирается при этом из пространства функций, равных нулю на области определения условий Дирихле Γ_1 . Спроецируем $\gamma_0^{\Omega} u$ и $\gamma_1^{\Omega} u$ на базис соответствующих конечномерных подпространств $U_h(\Gamma_h) \subset H^{1/2}(\Gamma_h)$ и $W_h(\Gamma_h) \subset H^{-1/2}(\Gamma_h)$, где Γ_h может быть, в частности, поверхностной сеткой, геометрия которой приближает границу Γ , h — параметр дискретизации. Получим приближённые равенства:

$$\gamma_0^{\Omega} u(\mathbf{x}) \approx \sum_{p=1}^N \alpha_p g_p(\mathbf{x}), \quad g_p \in U_h(\Gamma), \quad (19)$$

$$\gamma_1^{\Omega} u(\mathbf{x}) \approx \sum_{q=1}^M \beta_q w_q(\mathbf{x}), \quad w_q \in W_h(\Gamma), \quad (20)$$

где N и M размерности $U_h(\Gamma_h)$ и $W_h(\Gamma_h)$ соответственно.

Используя дополнение Шура применительно к оператору Стеклова — Пуанкаре [23], учитывая (19) и (20), получим СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V} & -\mathbf{K} \\ \mathbf{K}^T & \mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Phi \end{pmatrix}, \quad (21)$$

где α — вектор коэффициентов α_p разложения (19), β — вектор коэффициентов β_q разложения (20). Элементы блоков матрицы СЛАУ и вектора правой части (21) определяются следующим образом:

$$\mathbf{V}_{i,j} = \langle V_k w_i, w_j \rangle, \quad i, j = \overline{1, M}, \quad (22)$$

$$\mathbf{D}_{i,j} = \langle D_k g_i, g_j \rangle, \quad i, j = \overline{1, N}, \quad (23)$$

$$\mathbf{K}_{i,j} = \left\langle \left(\frac{1}{2} I + K_k \right) g_i, w_j \right\rangle, \quad i = \overline{1, N}, j = \overline{1, M}, \quad (24)$$

$$\mathbf{\Phi}_i = \langle F_N, g_i \rangle, \quad i = \overline{1, N}. \quad (25)$$

2. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МУЛЬТИПОЛЬНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛОВ

Пусть необходимо вычислить $(V_k u)(\mathbf{x})$ для всех точек \mathbf{x} из некоторого множества \tilde{X} , состоящего из N_x точек. Предположим, что для функции u имеет место приближённое равенство

$$u(\mathbf{x}) \approx \sum_{q=1}^M \beta_q w_q(\mathbf{x}), \quad w_q \in W_h(\Gamma),$$

тогда

$$(V_k u)(\mathbf{x}) \approx \sum_{q=1}^M \beta_q (V_k w_q)(\mathbf{x}). \quad (26)$$

Функции w_q обладают конечными носителями на Γ_h . Например, если Γ_h — сетка из треугольников, диаметр которых ограничен величиной h , то w_q могут быть кусочно-постоянными функциями, не равными нулю лишь на «своих» элементах сетки. Введём обозначения:

$$\text{diam}(S) = \sup_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \quad S \subset \mathbb{R}^3, \quad (27)$$

$$\text{dist}(S_1, S_2) = \inf_{\mathbf{x} \in S_1, \mathbf{y} \in S_2} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \quad S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3. \quad (28)$$

В (27) в случае множества S , состоящего из одной точки, положим $\text{diam}(S) = \text{diam}(\emptyset) = 0$.

Используя (27) и (28), определим функцию, задающую критерий близости произвольных точечных множеств S_1 и S_2 в трёхмерном пространстве:

$$\Phi_\eta(S_1, S_2) = \begin{cases} 1, & \text{dist}(S_1, S_2) < \eta \max\{\text{diam}(S_1), \text{diam}(S_2)\}, \\ 0 & \text{dist}(S_1, S_2) \geq \eta \max\{\text{diam}(S_1), \text{diam}(S_2)\}, \end{cases} \quad (29)$$

где $\eta > 0$. Разобьём сумму (26) на две группы слагаемых:

$$\sum_{q=1}^M \beta_q (V_k w_q)(\mathbf{x}) = R(\mathbf{x}) + Z(\mathbf{x}), \quad (30)$$

где

$$R(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{q=1, \\ \Phi_\eta(\tilde{X}, \text{loc}(w_q))=0}}^M \beta_q (V_k w_q)(\mathbf{x}), \quad (31)$$

$$Z(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{q=1, \\ \Phi_\eta(\tilde{X}, \text{loc}(w_q))=0}}^M \beta_q (V_k w_q)(\mathbf{x}). \quad (32)$$

здесь loc обозначает носитель функции-аргумента. Слагаемое R назовём ближним полем, а Z — дальним. Методы вычисления ближнего поля описаны во многих работах (см., например, [26–31]).

При суммировании Z можно полагать функцию G_k в определении (10) непрерывно дифференцируемой, поскольку аргументы функции \mathbf{x} и \mathbf{y} достаточно удалены друг от друга. Для непрерывно дифференцируемой функции f существует квадратура, позволяющая получить примерное равенство:

$$\int_{\Gamma_h} f(\mathbf{r}) d\Gamma_{\mathbf{r}} \approx \sum_{j=1}^L \xi_j f(\mathbf{r}_j), \quad (33)$$

где L — число точек квадратур на всех элементах, относящихся к дальнему полю, ξ_j — её веса, \mathbf{r}_j — точки квадратуры. Отметим, что число L зависит от параметра h , как и число базисных функций M соответствующего конечномерного подпространства функций w_q . Подстановкой (33) в определение (10) применительно к (32) получим

$$\sum_{q=1}^M \beta_q(V_k w_q)(\mathbf{x}) \approx \sum_{j=1}^L \omega_j \frac{e^{ik\|\mathbf{x}-\mathbf{r}_j\|}}{4\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{r}_j\|}, \quad (34)$$

$\Phi_\eta(\tilde{X}, \text{loc}(w_q))=0$

где

$$\omega_j = \sum_{q=1}^M \beta_q w_q(\mathbf{r}_j) \xi_j. \quad (35)$$

$\Phi_\eta(\tilde{X}, \text{loc}(w_q))=0$

Обозначим через $E(\mathbf{x})$ функцию, равную правой части приближённого равенства (34):

$$E(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^L \omega_j \frac{e^{ik\|\mathbf{x}-\mathbf{r}_j\|}}{4\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{r}_j\|}. \quad (36)$$

Отсюда следует

$$Z(\mathbf{x}) \approx E(\mathbf{x}). \quad (37)$$

Пусть точки множества \tilde{X} , в которых вычисляется функция E_k , находятся вне шара радиуса ρ , а все точки \mathbf{r}_j , $j = 1, L$, расположены внутри него. Пусть также центр этого шара совпадает с началом координат. Мультипольное разложение суммы (36) возможно лишь для Z . Оно задаётся следующим образом [20, 21]:

$$E(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^P \sum_{m=-n}^n \alpha_n^m S_n^m(r, \theta, \varphi), \quad (38)$$

$$\alpha_n^m = \sum_{j=1}^L \omega_j R_n^{-m}(r_j, \theta_j, \varphi_j), \quad (39)$$

где R_n^m — регулярные функции мультипольного разложения, S_n^m — сингулярные функции [21], числа r , φ и θ являются сферическими координатами точки \mathbf{x} , а r_j , θ_j , φ_j — координатами точек \mathbf{x}_j соответственно. Число P определяет точность приближения исходной суммы E слагаемыми мультипольного ряда. Точное равенство полагается при $P = \infty$; R_n^m и S_n^m определяются следующим образом:

$$R_n^m(r, \theta, \varphi) = j_n(kr) Y_n^m(\theta, \varphi), \quad (40)$$

$$S_n^m(r, \theta, \varphi) = h_n(kr) Y_n^m(\theta, \varphi), \quad (41)$$

где, в свою очередь, j_n — сферическая функция Бесселя типа j ; h_n — сферическая функция Ханкеля первого рода; Y_n^m — скалярные сферические гармоники. Сферические координаты связаны с декартовыми следующими соотношениями:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \theta < \pi, \quad (42)$$

где x, y, z — декартовы координаты точки \mathbf{x} .

Величина погрешности суммы (38) и способ выбора P описаны в [20]. В частности, если $|k\rho| < 1 + \varepsilon$ при некотором малом $\varepsilon > 0$, то справедлива оценка [20, 21]

$$\left| E(\mathbf{x}) - \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^P \sum_{m=-n}^n \alpha_n^m S_n^m(r, \theta, \varphi) \right| < C\nu^{P+1}, \quad 0 < \nu < 1, \quad (43)$$

где C — некоторая константа, независящая от P , ν зависит от произведения $k\rho$ и принимает действительные значения от нуля до единицы.

Оценим сложность применения мультипольного разложения, полагая число слагаемых суммы R пренебрежимо малым по сравнению с M . Коэффициенты α_n^m в формуле (39) могут быть посчитаны один раз для всех возможных значений \mathbf{x} , сложность такого вычисления составляет $O(LP^2)$. Затем вычисляется сумма (38) для каждого из допустимых значений \mathbf{x} . Таким образом, для вычисления $(V_k u)(\mathbf{x})$ для всех допустимых значений $\mathbf{x} \in \tilde{X}$ требуется $O(LP^2 + N_x P^2)$ операций.

Следовательно, с ростом числа неизвестных вычислительные затраты, связанные с расходом памяти и вычислением суммы Z , растут линейно. Данный линейный рост исходит из допущения возможности такого мультипольного разложения для всех точек \mathbf{r}_j , находящихся внутри шара фиксированного радиуса, и точки \mathbf{x} , находящейся вне его. В следующем разделе мы коснёмся проблемы, возникающей в случае, если это допущение ложно.

3. ОПТИМИЗАЦИЯ ПОВОРОТОВ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ АЛГОРИТМОВ ПЕРЕНОСА ЦЕНТРА МУЛЬТИПОЛЬНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ

Подход, изложенный в предыдущем разделе, нуждается в некотором уточнении: ранее было сделано допущение относительно расположения точек внутри шара радиуса ρ с центром в начале координат. Разобранный случай позволяет, например, эффективно вычислять значение функции решения u уравнения Гельмгольца (1) при известных значениях γ_{1u} и γ_{0u} и достаточно удалённом множестве \tilde{X} от Γ_h по формуле (6). Очевидно, что указанный подход в предыдущем разделе можно применить и к K'_k аналогичным образом (второе слагаемое формулы (6)).

Однако при необходимости вычисления элементов блока \mathbf{V} из формулы (22) воспользоваться указанным частным случаем напрямую для получения линейной асимптотической сложности не удастся. В частности, если необходимо получить значение элемента блока матрицы \mathbf{V} по формуле (22), то при использовании той же квадратуры (33) для расчёта интеграла в определении (14) получим равенство $\tilde{X} = \{r_j\}_{j=1}^L$ и $N_x = L$. Очевидно, что в данном случае нельзя утверждать, что точки множества \tilde{X} достаточно удалены от точек множества $\{r\}_{j=1}^L$. Следовательно, применение мультипольного разложения оказывается невозможным.

В случае произвольного относительного расположения точек \mathbf{r}_j и \mathbf{x} применяется МБМ, основанный на кластеризации и построении древовидной структуры кластеров. Построение дерева кластеров подробно описано в ряде работ (например, [26, 20, 27]). По этой причине мы коснёмся лишь общей идеи использования дерева кластеров, не касаясь при этом ряда существенных деталей реализации.

Каждый кластер представляет собою куб со стороной, зависящей от уровня глубины дерева, на которой присутствует данный кластер. Обозначим каждый такой куб символом T_{λ}^x ,

где χ равен номеру уровня кластера, а λ равен номеру кластера на заданном уровне. Каждый куб содержит восемь равных вложенных подкубов, каждый из которых присутствует в дереве уровнем ниже. Максимальный номер уровня соответствует листьям дерева, самому нижнему уровню ($\chi = \max$). У кластеров самого нижнего уровня дочерних кубов нет. Самый верхний уровень дерева заполняет один единственный куб ($\chi = 0$). Из изложенного следует

$$T_{\lambda}^{\chi-1} = \bigcup_{j=8(\lambda-1)+1}^{8\lambda} T_j^{\chi}. \quad (44)$$

Указанные ранее точки $\{\mathbf{r}_j\}_{j=1}^L$ в формуле (33) можно разбить по признаку принадлежности кластерам для каждого уровня дерева. Вновь определим понятия ближнего и дальнего полей, но теперь уже для кластеров, а именно, равенство $\Phi_{\eta}(T_{\lambda_1}^{\chi_1}, T_{\lambda_2}^{\chi_2}) = 1$ соответствует ближнему полю, а $\Phi_{\eta}(T_{\lambda_1}^{\chi_1}, T_{\lambda_2}^{\chi_2}) = 0$ — дальнему. Дополнительно описав вокруг каждого кластера дальнего поля сферу с центром, совпадающим с центром кластера, можно свести общий случай к упомянутому частному случаю со сферой, центрированной в начале координат.

Отличие от частного случая состоит в том, что теперь вместо единого центра имеется множество центров мультипольного разложения для разных кластеров. В связи с этим применяются алгоритмы переноса центров мультипольного разложения. В частности, строится разложение, аналогичное (38), (39), для точек, попавших в кластеры на самом нижнем уровне. Затем алгоритм переноса «суммирует» эти разложения в родительском кластере с уже новым общим центром.

Перенос центра означает, что значения функций $R_n^m(\mathbf{x})$ и $S_n^m(\mathbf{x})$ выражаются через значения аналогичных функций со смещённым началом координат \mathbf{x}_0 : $R_n^m(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ и $S_n^m(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$, а именно (см. [21]):

$$S_n^m(\mathbf{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=-l}^l (S|R)_{l,n}^{s,m}(\mathbf{x}_0) R_l^s(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \|\mathbf{x}_0\|, \quad (45)$$

$$S_n^m(\mathbf{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=-l}^l (S|S)_{l,n}^{s,m}(\mathbf{x}_0) S_l^s(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| > \|\mathbf{x}_0\|, \quad (46)$$

$$R_n^m(\mathbf{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=-l}^l (R|R)_{l,n}^{s,m}(\mathbf{x}_0) R_l^s(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (47)$$

для любых \mathbf{x} и \mathbf{x}_0 .

В формулах (45)–(47) коэффициенты, обозначенные как $(S|R)$, позволяют выразить сингулярные функции через регулярные при перемещении центра мультипольного разложения из точки $\mathbf{0}$ в точку \mathbf{x}_0 . Для любых других пар центров данные формулы обобщаются очевидным образом. Соответственно $(S|S)$ позволяют выразить сингулярные функции через сингулярные и $(R|R)$ — регулярные функции через регулярные. Ниже мы подробно рассмотрим вопрос вычисления этих коэффициентов.

Формулы (45)–(47) могут иметь более простой вид, если вектор перемещения $\mathbf{t} = \mathbf{x}_0$ коллинеарен оси OZ , что соответствует значению $\theta = 0$ в (42). Этот частный случай наиболее важен, поскольку исходную декартову систему координат можно повернуть так, чтобы ось OZ новой системы координат совпадала с направлением вектора \mathbf{t} . Кроме того, при $s \neq m$ в формулах (45)–(47) коэффициенты $(S|R)$, $(R|R)$ и $(S|S)$ становятся равными нулю. Таким образом, имеем (см. [21])

$$S_n^m(\mathbf{x}) = \sum_{l=|m|}^{\infty} (S|R)_{l,n}^m(\mathbf{t}) R_l^s(\mathbf{x} - \mathbf{t}), \quad \text{где } (S|R)_{l,n}^m := (S|R)_{l,n}^{m,m}, \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{t}\| < \|\mathbf{t}\|, \quad (48)$$

$$S_n^m(\mathbf{x}) = \sum_{l=|m|}^{\infty} (S|S)_{l,n}^m(\mathbf{t}) S_l^s(\mathbf{x} - \mathbf{t}), \quad \text{где } (S|S)_{l,n}^m := (S|S)_{l,n}^{m,m}, \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{t}\| > \|\mathbf{t}\|, \quad (49)$$

$$R_n^m(\mathbf{x}) = \sum_{l=|m|}^{\infty} (R|R)_{l,n}^m(\mathbf{t}) R_l^s(\mathbf{x} - \mathbf{t}), \quad \text{где } (R|R)_{l,n}^m := (R|R)_{l,n}^{m,m}, \quad (50)$$

для любых \mathbf{x} и \mathbf{t} . Отметим, что, как показано в [20], $(R|R)_{l,n}^m = (S|S)_{l,n}^m$.

Введём обозначение $(E|F)$ сразу для всех типов коэффициентов $(S|S)$, $(S|R)$ и $(R|R)$, имея в виду, что свойства, имеющие место для коэффициентов $(E|F)$, выполняются также и для коэффициентов вида $(S|S)$, $(S|R)$ и $(R|R)$. Коэффициенты $(S|S)$, $(S|R)$ и $(R|R)$ в (48)–(50) вычисляются согласно следующим рекуррентным формулам (см. [21]):

$$(S|R)_{l,0}^0(-\mathbf{x}_0) = (2l+1)^{1/2} h_l(k\|\mathbf{x}_0\|), \quad (51)$$

$$(R|R)_{l,0}^0(-\mathbf{x}_0) = (S|S)_{l,0}^0(-\mathbf{x}_0) = (2l+1)^{1/2} j_l(k\|\mathbf{x}_0\|), \quad (52)$$

$$b_{m+1}^{-m-1} (E|F)_{l,m+1}^{m+1} = b_l^{-m-1} (E|F)_{l-1,m}^m - b_{l+1}^m (E|F)_{l+1,m}^m, \quad l = m+1, m+2, \dots, \quad (53)$$

$$a_{n-1}^m (E|F)_{l,n-1}^m - a_{n-1}^m (E|F)_{l,n+1}^m = a_l^m (E|F)_{l+1,n}^m - a_{l+1}^m (E|F)_{l-1,n}^m, \quad (54)$$

$$l, n = 0, 1, \dots, \quad m = -n, \dots, n,$$

где

$$a_n^m = a_n^{|m|} = \begin{cases} \sqrt{\frac{(n+1+|m|)(n+1-|m|)}{(2n+1)(2n+3)}}, & n \geq |m|, \\ 0, & n < |m|, \end{cases} \quad (55)$$

$$b_n^m = \begin{cases} \sqrt{\frac{(n-m-1)(n-m)}{(2n-1)(2n+1)}}, & 0 \leq m \leq n, \\ -\sqrt{\frac{(n-m-1)(n-m)}{(2n-1)(2n+1)}}, & -n \leq m < 0, \\ 0, & |m| > n. \end{cases} \quad (56)$$

Формулы (51), (52) задают начальные значения. Затем используется формула (53) для определения коэффициентов вида $(E|F)_{l,m}^m$. Для определения оставшихся коэффициентов при фиксированном m следует воспользоваться формулой (54). Доказательство этих формул изложено в [21].

Если же вектор \mathbf{t} не коллинеарен оси OZ , то следует повернуть исходную координатную систему векторов с тем, чтобы новое направление оси OZ совпало с \mathbf{t} . Соответствующую матрицу поворота обозначим Q . Пусть координаты вектора \mathbf{y} в исходной координатной системе совпадают с координатами вектора \mathbf{x} в повернутой, тогда имеют место соотношения (см. [21])

$$S_n^m(\mathbf{x}) = \sum_{\nu=-n}^n T_n^{\nu,m}(Q^T) S_n^{\nu}(\mathbf{y}), \quad R_n^m(\mathbf{x}) = \sum_{\nu=-n}^n T_n^{\nu,m}(Q^T) R_n^{\nu}(\mathbf{y}). \quad (57)$$

Пусть матрица поворота Q определяется тремя углами Эйлера $\{\alpha, \beta, \gamma\}$. Угол α задаёт поворот вокруг оси OZ , угол β задаёт поворот вокруг новой оси OX уже повернутой системы координат, а угол γ определяет поворот вокруг новой, повернутой, оси OZ . Все повороты осуществляются в порядке следования углов Эйлера в перечислении $\{\alpha, \beta, \gamma\}$. В [32] приводятся следующие формулы для получения значений $T_n^{\nu,m}$:

$$T_j^{\nu,m}(\{\alpha, \beta, \gamma\}) = \sum_{x=\min\{j-v, j+v, 0, m-v\}}^{\max\{j-v, j+v, 0, m-v\}} (-1)^x \frac{\sqrt{(j+\nu)!(j-\nu)!(j+m)!(j-m)!}}{(j-\nu-x)!(j+\nu-x)!x!(x+\nu-m)!} \times e^{i\nu\alpha} \cos^{2j+m-\nu-2x} \left(\frac{1}{2}\beta\right) \sin^{2x+m-\nu} \left(\frac{1}{2}\beta\right) e^{im\gamma}. \quad (58)$$

Мы предлагаем метод, который позволяет существенно упростить реализацию преобразований поворотов. Воспользуемся тем фактом, что для поворотов вида $\{\alpha, 0, 0\}$ коэффициенты имеют следующий вид (см. [32]):

$$T_j^{\nu,m}(\{\alpha, 0, 0\}) = \begin{cases} 0, & \nu \neq m, \\ e^{im\alpha}, & \nu = m. \end{cases} \quad (59)$$

Аналогично тому, как это было сделано в предыдущем разделе, ограничим значения индекса n регулярных и сингулярных функций $R_n^m(\mathbf{x})$ и $S_n^m(\mathbf{x})$ числом P , заменив символ ∞ в (45)–(47) на P . В работе [21] предлагается рекуррентный алгоритм построения поворотных коэффициентов, обладающий асимптотической сложностью, равной $O(P^3)$. Ниже мы предлагаем алгоритм, предполагающий сокращение вычислительной сложности получения поворотных коэффициентов до $O(P)$. В частности, нам потребуется вычислить поворотные коэффициенты для фиксированных углов $\{0, \pi/2, 0\}$ и $\{0, -\pi/2, 0\}$. Эти коэффициенты вычисляются лишь один раз перед началом построения дерева кластеров, например по формуле (58). По этой причине их расчёт слабо влияет на сложность вычислительного процесса. При этом для каждого переноса центров мультипольного разложения между кластерами нам потребуется вычислять поворотные коэффициенты только вида (59). Построим множество \widetilde{M} всех допустимых значений коэффициентов (59) при фиксированном угле α :

$$\widetilde{M}(\alpha) = \{e^{-iP\alpha}, e^{-i(P-1)\alpha}, \dots, 1, e^{i\alpha}, \dots, e^{iP\alpha}\}. \quad (60)$$

Легко видеть, что все возможные коэффициенты вида (59) лежат во множестве \widetilde{M} при $n < P$. Поскольку число элементов \widetilde{M} равно $2P + 1$, построение коэффициентов вида (59) обладает линейной асимптотической сложностью относительно P .

Схема нашего поворотного алгоритма выглядит следующим образом: вектор \mathbf{t} проецируется на плоскость OXY . Затем осуществляется поворот вокруг оси OZ с использованием коэффициентов вида (59) таким образом, чтобы новая ось OX повёрнутой координатной системы, которую мы обозначим OX_1 , совпала с направлением проекции вектора \mathbf{t} . Новая ось OY после первого поворота обозначается нами OY_1 , аналогично строится ось OZ_1 . В результате первого поворота вектор \mathbf{t} оказывается лежащим в плоскости OX_1Z_1 .

Далее осуществляется поворот $\{0, \pi/2, 0\}$ (вокруг оси OX_1), в результате которого новая ось OY_2 оказывается направленной по оси OZ исходной системы координат. Ось OZ после второго поворота координатной системы обозначается нами OZ_2 . Далее вновь вычисляется угол поворота вокруг оси OZ_2 . Этот угол должен быть таким, чтобы в результате поворота ось OY_2 стала сонаправленной вектору \mathbf{t} . Поворот вокруг оси OZ_2 вычисляется аналогично тому, как это было сделано для первого этапа алгоритма. Новые оси повёрнутой системы обозначаются OX_3 , OY_3 и OZ_3 . Наконец, осуществляется преобразование $\{0, -\pi/2, 0\}$, в результате которого ось OZ_4 результирующей, повёрнутой системы координат оказывается сонаправленной оси OY_3 и одновременно вектору переноса \mathbf{t} . Этапы алгоритма отражены на рис. 1.

4. ИССЛЕДОВАНИЕ РАБОТЫ АЛГОРИТМА НА МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ

Для демонстрации работоспособности вычислительного метода сравним численное решение с аналитическим, полученным для модельной задачи. Пусть имеется сфера радиуса 1,5 м, находящаяся в среде, где есть падающая волна Ψ_{inc} , представляемая в виде

$$\Psi_{\text{inc}} = e^{i(-\mathbf{v} \cdot \mathbf{x})}, \quad (61)$$

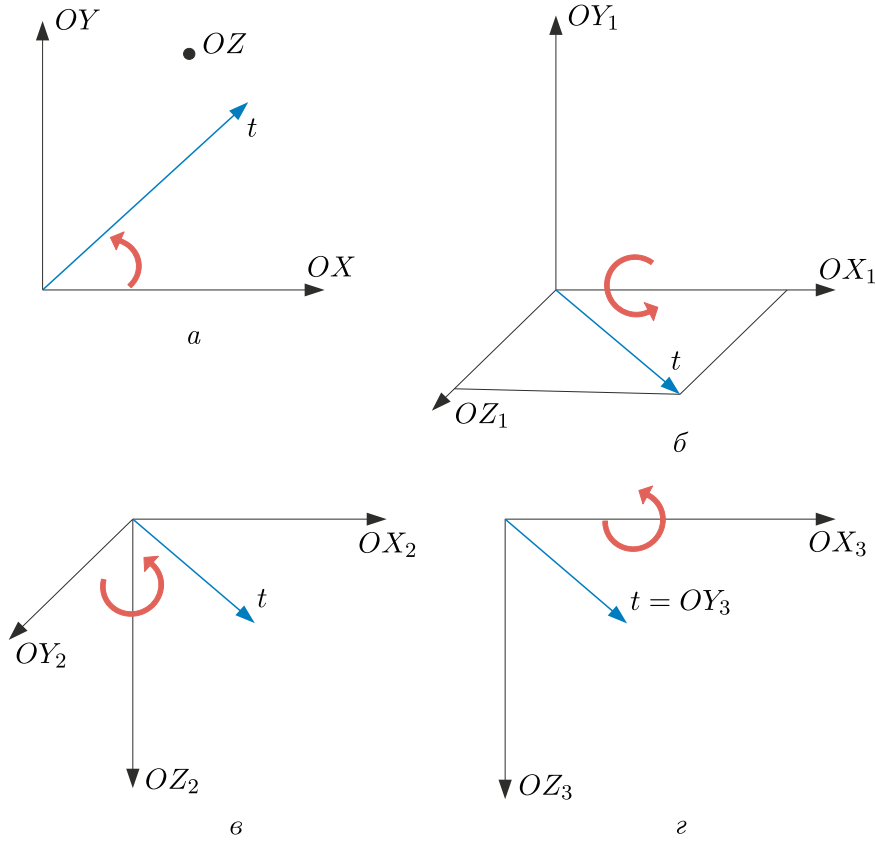


Рис. 1. Этапы алгоритма вращения коэффициентов мультипольного разложения

где i — мнимая единица, \mathbf{v} — вектор направления распространения звуковой волны, \mathbf{x} — вектор положения в пространстве. Поверхность сферы является источником отражённой волны Ψ_{sc} . Сумму указанных волн Ψ_{sc} и Ψ_{inc} обозначим Ψ . Пусть на границе выполняется условие Дирихле, а именно:

$$\Psi|_{\Gamma_s} = \Psi_{inc} + \Psi_{sc}|_{\Gamma_s} = 0, \quad \Psi_{sc}|_{\Gamma_s} = -\Psi_{inc}|_{\Gamma_s} = 0, \quad (62)$$

где Γ_s — это граница сферы.

При выполнении граничных условий (62) отражённая волна Ψ_{sc} будет иметь вид (см. [22])

$$\Psi_{sc}(\mathbf{x}) = \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)i^{-m} P_m(\cos(\theta)) \left(j_m(v\|\mathbf{x}\|) - \frac{j_m(va)}{h_m(va)} h_m(v\|\mathbf{x}\|) \right) - \Psi_{inc}(\mathbf{x}), \quad (63)$$

где θ — угол между векторами \mathbf{x} и \mathbf{v} , a — радиус сферы, v — модуль вектора \mathbf{v} , j_m — сферическая функция Бесселя порядка m , h_m — сферическая функция Ханкеля порядка m , P_m — полином Лежандра порядка m . Для последующего сравнения было выбрано 20 первых слагаемых суммы (63) для приближения аналитического решения. Это обеспечило шесть знаков точности приближённой аналитики.

Таким образом, методом граничных элементов решается внешняя задача Дирихле с граничными условиями (62). Для модельной задачи мы выбрали $\mathbf{x} = (1, 0, 0)$. Значения $v = k$ были выбраны равными $0,1 \text{ м}^{-1}$ и 2 м^{-1} .

Вычисления производились на трёх равномерных сетках разной степени подробности. Грубая сетка состояла из 1808 треугольников и 906 узлов. Более подробная сетка содержала 7232 элемента и 3618 узлов. Самая подробная сетка состояла из 28960 элементов и 14482 узлов. В обозначениях на рисунках и в таблицах $X1$ соответствует грубой сетке, $X2$ — более

подробной и $X4$ — самой подробной. Все сетки являлись равномерными. Анализ сходимости проводился для указанных сеток.

В программной реализации МГЭ использовались кусочно-постоянные базисные функции для аппроксимации следа Неймана (5). Кусочно-линейные базисные функции использовались для аппроксимации следа Дирихле (4). Код программной реализации был написан на языке C#, тестирование проводилось на персональном компьютере с процессором Intel(R) Core(TM) i7-3770. Заполнение матрицы СЛАУ производилось на четырёх потоках. Для решения СЛАУ применялся итерационный решатель BiCGStab. Механизм предобуславливания СЛАУ МГЭ описан в [33].

На рис. 2 и 3 представлены кривые относительных отклонений решений, полученных численными методами, от приближения аналитического решения конечным числом слагаемых ряда (63). В подписях к этим рисункам буквой P обозначается величина порядка функций S_n^m и R_n^m мультипольного разложения, где $m \in \{-n, \dots, n\}$ и $0 \leq n \leq P$. Значения отклонений выданы внутри расчётной области в точках, расположенных на оси OX . Величина отклонения δ в точке \mathbf{x} рассчитывается по формуле

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{\Psi_K(\mathbf{x}) - \Psi_K^*(\mathbf{x})}{\max |\Psi_K|}, \quad (64)$$

где Ψ_K^* — решение, полученное численным методом, а точки \mathbf{x} расположены на отрезке прямой B параллельной вектору распространения падающей волны (61). Длина данного отрезка 10 м. Графики отклонений, изображённые на рис. 2 и 3, были построены для указанных точек.

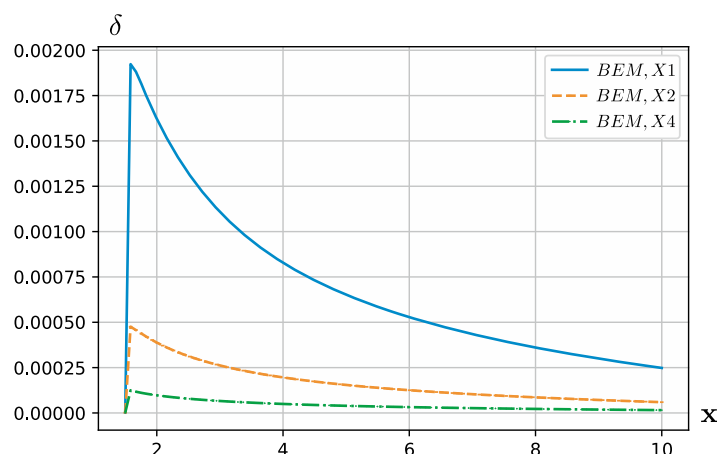


Рис. 2. График функции $\delta(\mathbf{x})$ при $P = 20$, $k = 0,1 \text{ м}^{-1}$ для точек \mathbf{x} , расположенных на оси OX

В табл. 1 и 2 указано время решения задач с применением МБМ. В табл. 3 представлены данные расхода памяти при использовании МБМ и число неизвестных СЛАУ соответствующих задач и приводятся данные расхода памяти. Как можно видеть из неё, имеет место линейный рост расхода памяти в зависимости от подробности сетки расчётной области.

Ниже приводятся данные, полученные при аналогичных расчётах с порядком функций мультипольного разложения, равным десяти. Как можно видеть, результаты оказались существенно менее точными по сравнению с результатами для 20-ти порядков, что отражено на рис. 4 и 5.

Из таблиц 4 и 5 видно, что время расчётов меняется пропорционально квадрату отношения порядков, а именно, для десяти порядков СЛАУ решается примерно в четыре раза быстрее. Это связано с влиянием числа коэффициентов конечной суммы мультипольного разложения на скорость вычисления приближения для матрично-векторного произведения.

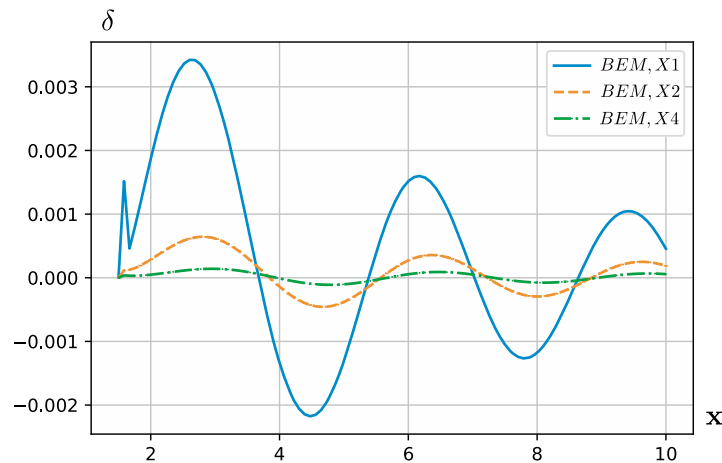


Рис. 3. График функции $\delta(x)$ при $P = 20$, $k = 2 \text{ м}^{-1}$ для точек x , расположенных на оси OX

Таблица 1

Время решения задачи при $P = 20$, $k = 0,1 \text{ м}^{-1}$ (ч:м:с)

$k = 0,1 \text{ м}^{-1}$	X1	X2	X4
Общее время решения задачи	00:04:51	00:29:03	02:30:19
Время заполнения матрицы	00:02:53	00:14:03	00:59:34
Время решения СЛАУ	00:01:52	00:14:48	01:30:39
Число итераций при решении СЛАУ (BiCGStab)	28	41	55

Таблица 2

Время решения задачи при $P = 20$, $k = 2 \text{ м}^{-1}$ (ч:м:с)

$k = 2 \text{ м}^{-1}$	X1	X2	X4
Общее время решения задачи	00:06:02	00:36:12	03:00:04
Время заполнения матрицы	00:02:47	00:13:00	00:44:15
Время решения СЛАУ	00:03:07	00:23:10	02:15:42
Число итераций при решении СЛАУ (BiCGStab)	48	70	96

Таблица 3

Потребляемая память при расчёте с использованием быстрых мультиполей при $P = 20$

Параметр расчёта	X1	X2	X4
Ближнее поле, Мб	5,91	1,42	1,50
Дальнее поле, Мб	45,27	147,21	594,25
Кол-во неизвестных весов следа Неймана	1808	7232	28960
Кол-во неизвестных весов следа Дирихле	906	3618	14482

Анализ показал эффективность применения метода быстрых мультиполей к решению уравнения Гельмгольца в неограниченных однородных средах на модельной задаче. Приве-

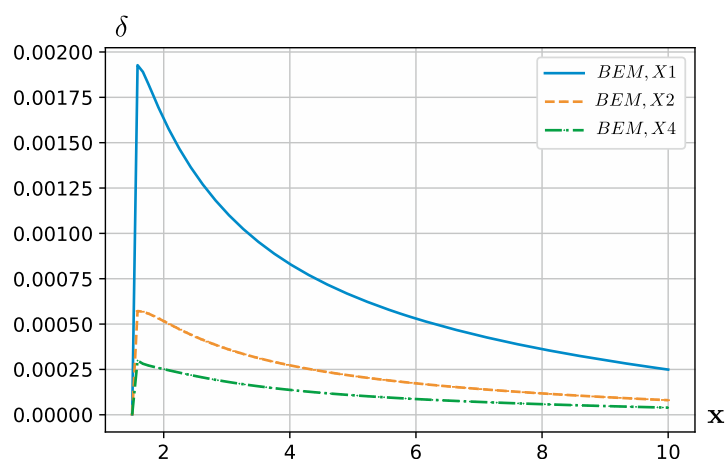
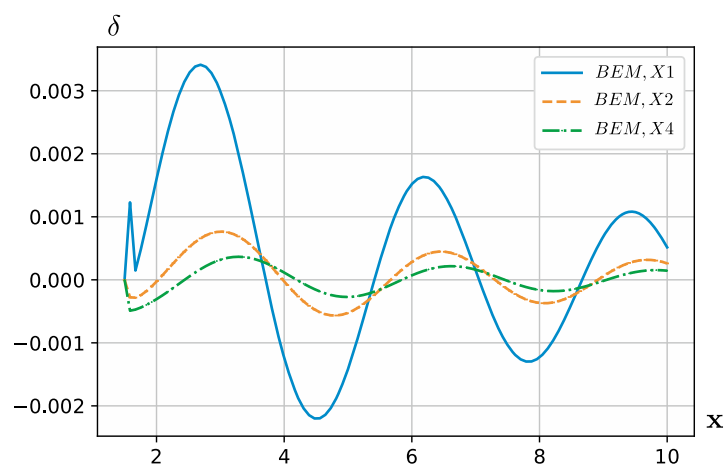
Рис. 4. График функции $\delta(x)$ при $P = 10$, $k = 0,1 \text{ м}^{-1}$ Рис. 5. График функции $\delta(x)$ при $P = 10$, $k = 2 \text{ м}^{-1}$

Таблица 4

Время решения задачи при $P = 10$, $k = 0,1 \text{ м}^{-1}$ (ч:м:с)

$k = 0,1 \text{ м}^{-1}$	X1	X2	X4
Общее время решения задачи	00:01:57	00:09:52	00:43:05
Время заполнения матрицы	00:01:40	00:07:36	00:29:51
Время решения СЛАУ	00:00:16	00:02:15	00:13:08
Число итераций при решении СЛАУ (BiCGStab)	23	33	49

Таблица 5

Время решения задачи при $P=10$, $k = 2 \text{ м}^{-1}$ (ч:м:с)

$k = 2 \text{ м}^{-1}$	X1	X2	X4
Общее время решения задачи	00:02:18	00:13:59	01:09:10
Время заполнения матрицы	00:01:37	00:08:45	00:31:37
Время решения СЛАУ	00:00:40	00:05:08	00:37:28
Число итераций при решении СЛАУ (BiCGStab)	54	70	130

дённое время решения для модельных задач демонстрирует почти линейную зависимость от числа неизвестных.

Проведены численные эксперименты на различных сетках и получены оценки времени работы программ, проведено сравнение полученного решения с аналитическим. Представленный в нашей работе алгоритм оптимизации получения поворотных коэффициентов мультипольного разложения показал свою эффективность при решении модельной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Simpson R. N., Scott M. A., Taus M., Thomas D. C., Lian H.* Acoustic isogeometric boundary element analysis // *Computer Meth. Appl. Mech. Engrg.* 2014. V. 269. P. 265–290; DOI: 10.1016/j.cma.2013.10.026
2. *Liu Z., Majeed M., Cirak F., Simpson R.* Isogeometric FEM-BEM coupled structural-acoustic analysis of shells using subdivision surfaces // *Internat. J. Num. Meth. Engrg.* 2018. V. 113, N 9. P. 1507–1530; DOI: 10.1002/nme.5708
3. *Harbrecht H., Moor M.* Wavelet boundary element methods: adaptivity and goal-oriented error estimation // *Adv. Finite Element Meth. Appl.* 2017. V. 128. P. 143–164; DOI: 10.1007/978-3-030-14244-5₈
4. *Harbrecht H., Utzinger M.* On adaptive wavelet boundary element methods // *J. Comput. Math.* 2018. V. 36, N 1. P. 90–109; DOI: 10.4208/jcm.1610-m2016-0496
5. *Dahlke S., Harbrecht H., Utzinger M., Weimar M.* Adaptive wavelet BEM for boundary integral equations: theory and numerical experiments // *Num. Funct. Anal. Optim.* 2018. V. 39, N 2. P. 208–232; DOI: 10.1080/01630563.2017.1359623
6. *Deng J., Guasch O., Maxit L., Zheng L.* Transmission loss of plates with multiple embedded acoustic black holes using statistical modal energy distribution analysis // *Mechanical Systems and Signal Processing.* 2021. V. 150; DOI: 10.1016/j.ymssp.2020.107262
7. *Rjasanow S., Weggler L.* Matrix valued adaptive cross approximation. Mathematical methods in the applied sciences // *Math. Meth. Appl. Sci.* 2017. V. 40, N 7. P. 2522–2531; DOI: 0.1002/mma.4174
8. *Kravčenko M., Zapletal J., Claeys X., Merta M.* Parallel adaptive cross approximation for the multi-trace formulation of scattering problems // *Internat. Conf. Parallel Processing and Applied Mathematics.* 2019. V. 12043. P. 141–150; DOI: 10.1007/978-3-030-43229-4₁₃
9. *Kravčenko M., Merta M., Zapletal J.* Distributed fast boundary element methods for Helmholtz problems // *Appl. Math. Comput.* 2019. V. 362; DOI: 10.1016/j.amc.2019.06.017
10. *Takahashi T., Coulier P., Darve E.* Application of the inverse fast multipole method as a preconditioner in a 3D Helmholtz boundary element method // *J. Comput. Phys.* 2017. V. 341. P. 406–428; DOI: 10.1016/j.jcp.2017.04.016
11. *Shen L., Liu Y. J.* An adaptive fast multipole boundary element method for three-dimensional acoustic wave problems based on the Burton–Miller formulation // *Comput. Mechanics.* 2007. V. 40, N 3. P. 461–472; DOI: 10.1007/s00466-006-0121-2
12. *Liu Z., Wang D., Liang J., Wu F., Wu C.* The fast multi-pole indirect BEM for solving high-frequency seismic wave scattering by three-dimensional superficial irregularities // *Engrg. Analysis with Boundary Elements.* 2018. V. 90, N 2. P. 86–99; DOI: 10.1016/j.enganabound.2018.02.009
13. *Chen L., Marburg S., Zhao W., Liu C., Chen H.* Implementation of isogeometric fast multipole boundary element methods for 2D half-space acoustic scattering problems with absorbing boundary condition // *J. Theor. Comput. Acoustics.* 2020. V. 27; DOI: 10.1142/S259172851850024X
14. *Wilkes D., Duncan A., Marburg S.* A parallel and broadband Helmholtz FMBEM model for large-scale target strength modeling // *J. Theor. Comput. Acoustics.* 2020. V. 28, N 3; DOI: 10.1142/S2591728520500012
15. *Li J., Fu Z., Chen W., Liu X.* A dual-level method of fundamental solutions in conjunction with kernel-independent fast multipole method for large-scale isotropic heat conduction problems // *Adv. Appl. Math. Mech.* 2019. V. 11, N 2. P. 501–517; DOI: 10.4208/aamm.OA-2018-0148

16. *Li J., Chen W., Qin Q.* A modified dual-level fast multipole boundary element method based on the Burton–Miller formulation for large-scale three-dimensional sound field analysis // *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 2018. V. 340. P. 121-146; DOI: 10.1016/j.cma.2018.05.016
17. *Qu W., Zheng C., Zhang Y., Gu Y., Wang F.* A wideband fast multipole accelerated singular boundary method for three-dimensional acoustic problems // *Computers & Structures.* 2018. V. 206. P. 82–89; DOI: 10.1016/j.compstruc.2018.06.002
18. *Takahashi T., Chen C., Darve E.* Parallelization of the inverse fast multipole method with an application to boundary element method // *Comput. Phys. Comm.* 2020. V. 247; DOI: 10.1016/j.cpc.2019.106975
19. *Amlani F., Chaillat S., Loseille A.* An efficient preconditioner for adaptive fast multipole accelerated boundary element methods to model time-harmonic 3D wave propagation // *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 2019. V. 352. P. 189–210; DOI: 10.1016/j.cma.2019.04.026
20. *Gumerov N. A., Duraiswami R.* Fast Multipole Methods for the Helmholtz Equation in Three Dimensions. Maryland: Elsevier, 2005.
21. *Gumerov N. A., Duraiswami R.* Fast, exact, and stable computation of multipole translation and rotation coefficients for the 3-d Helmholtz equation // <https://drum.lib.umd.edu/bitstream/handle/1903/1141/CS-TR-4264.pdf?sequence=1>
22. *Лепендин Л. Ф.* Акустика. М.: Высш. школа, 1978.
23. *Rjasanow S., Steinbach O.* The fast solution of boundary integral equations. Springer Sci. & Business Media, 2007.
24. *Adams R. A., Fournier J. J. F.* Sobolev Spaces. N. Y.: Acad. Press, 2003.
25. *Stolper M.* Computing and compression of the boundary element matrices for the Helmholtz equation // *J. Numer. Math.* 2004. V. 12, N 1. P. 55–75; DOI: 10.1515/1569395041172935
26. *Beatson R., Greengard L.* A short course on fast multipole methods // *Wavelets, multilevel methods and elliptic PDEs.* 1997. V. 1. P. 1–37.
27. *Steinbach O.* Numerical approximation methods for elliptic boundary value problems: finite and boundary elements // Springer Sci. & Business Media, 2007.
28. *Keller P.* A method for indefinite integration of oscillatory and singular functions // *Numer. Algorithms.* 2007. V. 46, N 3. P. 219–251; DOI: 10.1007/s11075-007-9134-y
29. *Nair N. V., Pray A. J., Villa-Giron J., Shanker B., Wilton D. R.* A singularity cancellation technique for weakly singular integrals on higher order surface descriptions // *IEEE Trans. Antennas and Propagation.* 2013. V. 61, N 4. P. 2347–2352; DOI: 10.1109/TAP.2013.2238880
30. *Vasconcelos A. C. A., Cavalcante I., Labaki J.* On the accuracy of adaptive quadratures in the numerical integration of singular Green’s functions for layered media // *Proc. Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering.* 2017; DOI: 10.20906/cps/cilamce2017-0063
31. *Järvenpää S., Taskinen M., Ylä-Oijala P.* Singularity extraction technique for integral equation methods with higher order basis functions on plane triangles and tetrahedra // *Internat. J. Numer. Meth. Engrg.* 2003. V. 58, N 8. P. 1149–1165; DOI: 10.1002/nme.810
32. *Wigner E.* Group Theory: and its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra. Elsevier, 2012.
33. *Buchau A., Rucker W. M.* Preconditioned fast adaptive multipole boundary-element method // *IEEE Trans. Magnetics.* 2002. V. 38, N 2. P. 461-464; DOI: 10.1109/20.996122

UDC 519.633.6:519.642.2

**ON THE APPLICATION OF THE FAST MULTIPOLE METHOD
TO THE OPTIMIZATION OF THE BOUNDARY ELEMENT METHOD
FOR THE HELMHOLTZ EQUATION**

© 2021 S. A. Sivak^a, M. E. Royak^b, I. M. Stupakov^c

*Novosibirsk State Technical University,
pr. Karla Marksa 20, Novosibirsk, 630073 Russia*

E-mails: ^asiwakserg@yandex.ru, ^broyak@ami.nstu.ru, ^cistupakov@gmail.com

Received 22.03.2021, revised 08.05.2021, accepted 24.06.2021

Abstract. Solving the Helmholtz equation by means of the boundary element method applied in conjunction with the fast multipole method is the subject of this paper. The accuracy analysis is presented for the model problem with known analytics. Also, we present an original approach to the computation of the rotation coefficients for the spherical harmonic decomposition of the multipole series.

Keywords: boundary element method, fast multipole method, the Helmholtz equation.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.307

REFERENCES

1. Simpson R. N., Scott M. A., Taus M., Thomas D. C., Lian H. Acoustic isogeometric boundary element analysis. *Computer Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 2014, Vol. 269, pp. 265–290; DOI: 10.1016/j.cma.2013.10.026
2. Liu Z., Majeed M., Cirak F., Simpson R. Isogeometric FEM-BEM coupled structural-acoustic analysis of shells using subdivision surfaces. *Internat. J. Num. Meth. Engrg.*, 2018, Vol. 113, No. 9, pp. 1507–1530; DOI: 10.1002/nme.5708
3. Harbrecht H., Moor M. Wavelet boundary element methods: adaptivity and goal-oriented error estimation. *Adv. Finite Element Meth. Appl.*, 2017, Vol. 128, pp. 143–164; DOI: 10.1007/978-3-030-14244-5₈
4. Harbrecht H., Utzinger M., On adaptive wavelet boundary element methods. *J. Comput. Math.*, 2018, Vol. 36, No. 1, pp. 90–109; DOI: 10.4208/jcm.1610-m2016-0496
5. Dahlke S., Harbrecht H., Utzinger M., Weimar M. Adaptive wavelet BEM for boundary integral equations: theory and numerical experiments. *Num. Funct. Anal. Optim.*, 2018, Vol. 39, No. 2, pp. 208–232; DOI: 10.1080/01630563.2017.1359623
6. Deng J., Guasch O., Maxit L., Zheng L. Transmission loss of plates with multiple embedded acoustic black holes using statistical modal energy distribution analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2021, Vol. 150; DOI: 10.1016/j.ymssp.2020.107262
7. Rjasanow S., Weggler L. Matrix valued adaptive cross approximation. Mathematical methods in the applied sciences. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2017, Vol. 40, No. 7, pp. 2522–2531; DOI: 0.1002/mma.4174
8. Kravčenko M., Zapletal J., Claeys X., Merta M. Parallel adaptive cross approximation for the multi-trace formulation of scattering problems. *Internat. Conf. Parallel Processing and Applied Mathematics*, 2019, Vol. 12043, pp. 141–150; DOI: 10.1007/978-3-030-43229-4₁₃

9. Kravčenko M., Merta M., Zapletal J. Distributed fast boundary element methods for Helmholtz problems. *Appl. Math. Comput.* 2019, Vol. 362; DOI: 10.1016/j.amc.2019.06.017
10. Takahashi T., Coulier P., Darve E. Application of the inverse fast multipole method as a preconditioner in a 3D Helmholtz boundary element method, *Journal of Computational Physics // J. Comput. Phys.* 2017. V. 341. P. 406–428; DOI: 10.1016/j.jcp.2017.04.016
11. Shen L., Liu Y. J. An adaptive fast multipole boundary element method for three-dimensional acoustic wave problems based on the Burton–Miller formulation. *Comput. Mechanics*, 2007, Vol. 40, No. 3, pp. 461–472; DOI: 10.1007/s00466-006-0121-2
12. Liu Z., Wang D., Liang J., Wu F., Wu C. The fast multi-pole indirect BEM for solving high-frequency seismic wave scattering by three-dimensional superficial irregularities. *Engrg. Analysis with Boundary Elements*, 2018, Vol. 90, No. 2, pp. 86–99; DOI: 10.1016/j.enganabound.2018.02.009
13. Chen L., Marburg S., Zhao W., Liu C., Chen H. Implementation of isogeometric fast multipole boundary element methods for 2D half-space acoustic scattering problems with absorbing boundary condition. *J. Theor. Comput. Acoustics*, 2020, Vol. 27; DOI: 10.1142/S259172851850024X
14. Wilkes D., Duncan A., Marburg S. A parallel and broadband Helmholtz FMBEM model for large-scale target strength modeling. *J. Theor. Comput. Acoustics*, 2020, Vol. 28, No. 3; DOI: 10.1142/S2591728520500012
15. Li J., Fu Z., Chen W., Liu X. A dual-level method of fundamental solutions in conjunction with kernel-independent fast multipole method for large-scale isotropic heat conduction problems. *Adv. Appl. Math. Mech.*, 2019, Vol. 11, No. 2, pp. 501–517; DOI: 10.4208/aamm.OA-2018-0148
16. Li J., Chen W., Qin Q. A modified dual-level fast multipole boundary element method based on the Burton–Miller formulation for large-scale three-dimensional sound field analysis. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 2018, Vol. 340, pp. 121–146; DOI: 10.1016/j.cma.2018.05.016
17. Qu W., Zheng C., Zhang Y., Gu Y., Wang F. A wideband fast multipole accelerated singular boundary method for three-dimensional acoustic problems. *Computers & Structures*, 2018, Vol. 206, pp. 82–89; DOI: 10.1016/j.compstruc.2018.06.002
18. Takahashi T., Chen C., Darve E. Parallelization of the inverse fast multipole method with an application to boundary element method. *Comput. Phys. Comm.*, 2020, Vol. 247; DOI: 10.1016/j.cpc.2019.106975
19. Amlani F., Chaillat S., Loseille A. An efficient preconditioner for adaptive fast multipole accelerated boundary element methods to model time-harmonic 3D wave propagation. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 2019, Vol. 352, pp. 189–210; DOI: 10.1016/j.cma.2019.04.026
20. Gumerov N. A., Duraiswami R. *Fast Multipole Methods for the Helmholtz Equation in Three Dimensions*. Maryland: Elsevier, 2005.
21. Gumerov N. A., Duraiswami R. *Fast, Exact, and Stable Computation of Multipole Translation and Rotation Coefficients for the 3-D Helmholtz Equation*. <https://drum.lib.umd.edu/bitstream/handle/1903/1141/CS-TR-4264.pdf?sequence=1>
22. Lependin L. F. *Akustika*. Moscow: Vyssh. shkola, 1978.
23. Rjasanow S., Steinbach O. *The Fast Solution of Boundary Integral Equations*. Springer Sci. & Business Media, 2007.
24. Adams R. A., Fournier J. J. F. *Sobolev Spaces*. N. Y.: Acad. Press, 2003.
25. Stolper M. Computing and compression of the boundary element matrices for the Helmholtz equation. *J. Numer. Math.*, 2004, Vol. 12, No. 1, pp. 55–75; DOI: 10.1515/1569395041172935
26. Beatson R., Greengard L. A short course on fast multipole methods. *Wavelets, multilevel methods and elliptic PDEs*, 1997, Vol. 1, pp. 1–37.
27. Steinbach O. *Numerical approximation methods for elliptic boundary value problems: finite and boundary elements*. Springer Science & Business Media, 2007.
28. Keller P. A method for indefinite integration of oscillatory and singular functions. *Numer. Algorithms*, 2007, Vol. 46, No. 3, pp. 219–251; DOI: 10.1007/s11075-007-9134-y
29. Nair N. V., Pray A. J., Villa-Giron J., Shanker B., Wilton D. R. A singularity cancellation technique for weakly singular integrals on higher order surface descriptions. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 2013, Vol. 61, No. 4, pp. 2347–2352; DOI: 10.1109/TAP.2013.2238880

30. Vasconcelos A. C. A., Cavalcante I., Labaki J. On the accuracy of adaptive quadratures in the numerical integration of singular Green's functions for layered media. *Proc. Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, 2017; DOI: 10.20906/cps/cilamce2017-0063
31. Järvenpää S., Taskinen M., Ylä-Oijala P. Singularity extraction technique for integral equation methods with higher order basis functions on plane triangles and tetrahedra. *Internat. J. Numer. Meth. Engrg.*, 2003, Vol. 58, No. 8, pp. 1149–1165; DOI: 10.1002/nme.810
32. Wigner E. *Group Theory and its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra*. Elsevier, 2012.
33. Buchau A., Rucker W. M. Preconditioned fast adaptive multipole boundary-element method. *IEEE Trans. on Magnetism*, 2002, Vol. 38, No. 2, pp. 461-464; DOI: 10.1109/20.996122