УДК 517.518.8

О СХОДИМОСТИ ОБОБЩЕНИЙ СИНК-АППРОКСИМАЦИЙ НА КЛАССЕ ПРИВАЛОВА — ЧАНТУРИЯ

© 2021 **А. Ю. Трынин**[1,2]

[1] *Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского,*
ул. Астраханская, 83, Саратов 410012, Россия;
[2] *Московский центр фундаментальной и прикладной математики,*
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Ленинские горы, 1, г. Москва 119991, Россия

E-mail: tayu@rambler.ru

Поступила в редакцию 23.02.2021 г.; после доработки 23.02.2021 г.;
принята к публикации 24.06.2021 г.

Установлено условие, описываемое в терминах лево- или правостороннего модуля непрерывности и отрицательного или положительного модулей изменения функции f соответственно, являющееся достаточным для равномерной аппроксимации функции f значениями операторов интерполирования функций, построенных по решениям задач Коши с линейным дифференциальным выражением второго порядка внутри интервала. Такие операторы представляют собой обобщение классических синк-аппроксимаций, используемых в теореме отсчётов Уиттекера — Котельникова — Шеннона. Показано также, что это условие является достаточным для равномерной сходимости на всём отрезке одной модификации оператора интерполирования функций, позволяющей избавиться от явления Гиббса вблизи концов отрезка.

Ключевые слова: интерполяционный процесс, синк-аппроксимации, приближение функции, равномерная сходимость.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.309

В [1] предложено выделить класс в пространстве непрерывных периодических функций, описываемый в терминах классических модулей непрерывности и изменения, каждый представитель которого допускает возможность равномерной аппроксимации частичными суммами тригонометрических рядов Фурье. Этот класс более широкий, чем множество функций ограниченной вариации и множество функций, удовлетворяющих условию Дини — Липшица $\lim\limits_{n\to\infty} \omega(f,1/n)\ln n = 0$.

Доказательство равномерной сходимости для более широкого, чем в [1], функционального класса, описываемого с помощью одностороннего модуля непрерывности и классического модуля изменения и последовательности интерполяционных многочленов Лагранжа по матрице узлов Чебышёва можно найти в [2, 3].

В работе [4] впервые были предложены операторы (5), представляющие собой обобщение классических синк-аппроксимаций (7), операторов Лагранжа — Штурма — Лиувилля [5, 6] и классических многочленов Лагранжа по матрице узлов ортогональных многочленов Якоби [7].

Если не оговорено иное, то далее будем считать, что $\rho_\lambda \geqslant 0$, $\rho_\lambda = o\left(\dfrac{\sqrt{\lambda}}{\ln\lambda}\right)$ при $\lambda\to+\infty$, $h(\lambda)\in\mathbb{R}$, и при каждом неотрицательном λ потенциал $q_\lambda(x)$ есть произвольный элемент из шара $V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ радиуса ρ_λ в пространстве функций с ограниченным изменением, исчезающих в нуле. Тогда для любого $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ рассмотрим задачи Коши вида

$$y'' + (\lambda - q_\lambda(x))y = 0, \quad y(0,\lambda) = 1, \quad y'(0,\lambda) = h(\lambda), \tag{1}$$

или при дополнительном условии $h(\lambda) \neq 0$ задачи Коши

$$y'' + (\lambda - q_\lambda(x))y = 0, \quad y(0,\lambda) = 0, \quad y'(0,\lambda) = h(\lambda). \tag{2}$$

Заметим, что даже в случае $\rho_\lambda \geqslant 0$ имеем $\rho_\lambda = o(\lambda)$ при $\lambda \to +\infty$, $h(\lambda) \in \mathbb{R}$ и

$$V_0^\pi[q_\lambda] \leqslant \rho_\lambda, \quad q_\lambda(0) = 0, \quad \rho_\lambda = o(\lambda). \tag{3}$$

Теорема осцилляции или метод контурного интегрирования при условии (3) обеспечивают неограниченное возрастание количества нулей решений задач (1), (2) при $\lambda \to +\infty$. Для любого потенциала $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ при $\lambda \to +\infty$ нули решения задачи Коши (1) или при дополнительном условии $h(\lambda) \neq 0$ задачи Коши (2), попадающие в $[0,\pi]$ и перенумерованные в порядке возрастания, обозначим

$$0 \leqslant x_{0,\lambda} < x_{1,\lambda} < \cdots < x_{n(\lambda),\lambda} \leqslant \pi, \quad x_{-1,\lambda} < 0, \quad x_{n(\lambda)+1,\lambda} > \pi. \tag{4}$$

Здесь $x_{-1,\lambda} < 0$, $x_{n(\lambda)+1,\lambda} > \pi$ обозначают нули продолжения решения задачи Коши (1) или (2) после доопределения каким-либо образом функции q_λ вне отрезка $[0,\pi]$ с сохранением ограниченности вариации. В дальнейшем для краткости будем обозначать $n = n(\lambda)$.

Исследования настоящей работы посвящены изучению аппроксимативных свойств операторов вида

$$S_\lambda(f,x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{y(x,\lambda)}{y'(x_{k,\lambda},\lambda)(x - x_{k,\lambda})} f(x_{k,\lambda}) = \sum_{k=0}^{n} s_{k,\lambda}(x) f(x_{k,\lambda}), \tag{5}$$

$$T_\lambda(f,x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{y(x,\lambda)}{y'(x_{k,\lambda})(x - x_{k,\lambda})} \left[f(x_{k,\lambda}) - \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi} x_{k,\lambda} - f(0) \right] + \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi} x + f(0), \tag{6}$$

построенных по решениям задачи Коши (1) или (2). Они обладают интерполяционным свойством Лагранжа, т. е. $S_\lambda(f, x_{k,\lambda}) = T_\lambda(f, x_{k,\lambda}) = f(x_{k,\lambda})$ для любых $0 \leqslant k \leqslant n$, $n \in \mathbb{N}$.

Свойства операторов интерполирования функций (5) и (6) тесно связаны с поведением синк-приближений

$$L_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(nx - k\pi)}{nx - k\pi} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n} l_{k,n}(x) f\left(\frac{k\pi}{n}\right), \tag{7}$$

представляющих собой частный случай операторов (5) в случае задачи Коши (2). Чтобы убедиться в этом, достаточно положить $q_{\lambda_n} \equiv 0$, $\lambda_n = n^2$, $h(\lambda_n) = n$ в (2). Синк-приближения (7) активно используются при построении различных численных методов математической физики и теории приближения функций как одной, так и нескольких переменных [7–27] в теории вейвлет-преобразований или всплесков, теории вероятностей и математической статистике [17, 21].

В данной работе приводятся полученные с помощью концепций работ [29–40] достаточные условия равномерной внутри интервала $(0,\pi)$ и равномерной на отрезке $[0,\pi]$ сходимостей интерполяционных процессов (5), (6) в терминах односторонних модулей непрерывности и изменения аппроксимируемой функции на компактном связанном подмножестве области определения.

1. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Договоримся обозначать снабжённое чебышёвской нормой пространство непрерывных, исчезающих на концах отрезка $[0,\pi]$ функций следующим образом:

$$C_0[0,\pi] = \{f \mid f \in C[0,\pi], f(0) = f(\pi) = 0\}.$$

Пусть Ω — множество всех действительнозначных, неубывающих, вогнутых на $[0, b-a]$, исчезающих в нуле функций ω. Обозначим через $C(\omega^l, [a,b])$ и $C(\omega^r, [a,b])$ множества элементов пространства $C[a,b]$ таких, что для произвольных x и $x+h$, $a \leqslant x < x+h \leqslant b$, имеют место неравенства

$$f(x+h) - f(x) \geqslant -K_f\omega(h) \text{ или } f(x+h) - f(x) \leqslant K_f\omega(h), \quad \omega \in \Omega, \tag{8}$$

соответственно. В этом случае функцию $\omega(h)$ называют лево- или правосторонним модулем непрерывности. Классический модуль непрерывности функции $f \in C[a,b]$ будем обозначать, как обычно:

$$\omega(f,\delta) = \sup_{|h|<\delta; x, x+h \in [a,b]} |f(x+h) - f(x)|.$$

Модуль непрерывности $f \in C[0,\pi]$ в случае $a = 0$, $b = \pi$ обозначим

$$\omega_1(f,\delta) = \sup_{|h|<\delta; x, x+h \in [0,\pi]} |f(x+h) - f(x)|.$$

По аналогии с положительным (отрицательным) изменением функции будем называть положительным (отрицательным) модулем изменения функции f на отрезке $[a,b]$ соответственно функции натурального аргумента:

$$v^+(n,f) = \sup_{T_n} \sum_{k=0}^{n-1} (f(t_{k+1}) - f(t_k))_+, \quad v^-(n,f) = \inf_{T_n} \sum_{k=0}^{n-1} \big(f(t_{k+1}) - f(t_k)\big)_-,$$

где

$$z_+ = \frac{z+|z|}{2}, \quad z_- = \frac{z-|z|}{2}, \quad T_n = \{a \leqslant t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n \leqslant b\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Будем говорить, что f принадлежит классу $V^+(v)$ или $V^-(v)$, если существует константа M_f такая, что для любого натурального n справедливо неравенство $v^+(n,f) \leqslant M_f v(n)$ или $v^-(n,f) \geqslant -M_f v(n)$ соответственно.

Теорема 1. *Пусть $0 \leqslant a < b \leqslant \pi$, $0 < \varepsilon < (b-a)/2$. Если неубывающая вогнутая функция натурального аргумента $v(n)$ и функция $\omega \in \Omega$ такие, что*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \min_{1\leqslant m\leqslant n} \left(\omega\left(\frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda}}\right) \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} + \sum_{k=m+1}^{n-1} \frac{v(k)}{k^2} \right) = 0, \tag{9}$$

то для любой функции $f \in C(\omega^l[a,b]) \cap V^-(v)$, $f \in C(\omega^r[a,b]) \cap V^+(v)$, выполняется соотношение

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|f - S_\lambda(f,\cdot)\|_{C[a+\varepsilon, b-\varepsilon]} = 0, \tag{10}$$

где оператор $S_\lambda(f,\cdot)$ определён в (5).

Замечание 1. На множестве $[0,\pi]\setminus[a,b]$ соотношение $\lim\limits_{\lambda\to\infty}|f(x)-S_\lambda(f,x)|=0$ может вовсе не выполняться.

Легко реализуемая модификация оператора (5) вида (6) позволяет избавиться от явления Гиббса вблизи концов отрезка при приближении функций $f\in C[0,\pi]\setminus C_0[0,\pi]$.

Теорема 2. *Пусть функция $f\in C[0,\pi]$, $a=0$, $b=\pi$. Если неубывающая вогнутая функция натурального аргумента $v(n)$ и функция $\omega\in\Omega$ такие, что выполняется соотношение (9), то для любой функции $f\in C(\omega^l[0,\pi])\cap V^-(v)$, $f\in C(\omega^r[0,\pi])\cap V^+(v)$, равномерно на всём отрезке $[0,\pi]$, $h(\lambda)\in\mathbb{R}$ и шарах $V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ справедливо соотношение*

$$\lim_{\lambda\to\infty}|T_\lambda(f,x)-f(x)|=0. \tag{11}$$

Здесь оператор $T_\lambda(f,\cdot)$ определён в (6).

Утверждение 1. *Пусть функция $f\in C_0[0,\pi]$, $a=0$, $b=\pi$. Если неубывающая вогнутая функция натурального аргумента $v(n)$ и функция $\omega\in\Omega$ такие, что выполняется условие (9), то для любой функции $f\in C(\omega^l[0,\pi])\cap V^-(v)$, $f\in C(\omega^r[0,\pi])\cap V^+(v)$, равномерно на всём отрезке $[0,\pi]$, $h(\lambda)\in\mathbb{R}$ и шарах $V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ справедливо соотношение*

$$\lim_{\lambda\to\infty}|S_\lambda(f,x)-f(x)|=0. \tag{12}$$

Утверждение 2. *Пусть функция $f\in C[0,\pi]$, $a=0$, $b=\pi$. Если неубывающая вогнутая функция натурального аргумента $v(n)$ и функция $\omega\in\Omega$ такие, что выполняется условие (9), то для любой функции $f\in C(\omega^l[0,\pi])\cap V^-(v)$, $f\in C(\omega^r[0,\pi])\cap V^+(v)$, равномерно внутри отрезка $[0,\pi]$, а также по $h(\lambda)\in\mathbb{R}$ и q_λ в шарах $V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ справедливо соотношение (12).*

Утверждение 3. *Если функция $f\in C[0,\pi]\setminus C_0[0,\pi]$ имеет ограниченную вариацию, то существует задача Коши вида (2) такая, что сходимость в соотношении (12) на всём отрезке $[0,\pi]$, оставаясь квазиравномерной, равномерной не будет. Существуют функция $f\in C[0,\pi]\setminus C_0[0,\pi]$ ограниченной вариации на отрезке $[0,\pi]$ и задача Коши вида (1) такие, что сходимость в соотношении (12) на интервале $(0,\pi)$, оставаясь квазиравномерной, равномерной не будет. А на концах отрезка будет наблюдаться ограниченная расходимость $\overline{\lim\limits_{\lambda\to\infty}}|S_\lambda(f,x)-f(x)|>0$, $x=0$, $x=\pi$.*

Утверждение 4. *Ограниченная вариация непрерывной функции или абсолютная непрерывность функции f на отрезке $[0,\pi]$ так же, как и выполнение более общего условия (9), гарантирует возможность приближения значениями оператора синк-аппроксимаций (7) на всём отрезке $[0,\pi]$, $a=0$, $b=\pi$, тогда и только тогда, когда $f\in C_0[0,\pi]$.*

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Приведём результаты исследований работ [4, 37, 26], которыми будем пользоваться в дальнейшем. Нам потребуются некоторые асимптотические формулы для решений задачи Коши (2). Аналогичную асимптотику для задачи Коши (1) можно найти в [4, 37].

Утверждение 5 [37]. *Пусть $\rho_\lambda\geqslant 0$, $\quad\rho_\lambda=o(\sqrt{\lambda})$ при $\lambda\to\infty$ и $V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ — шар радиуса ρ_λ в пространстве функций с ограниченным изменением, исчезающих в нуле. Тогда существует такое $\lambda_1>4\pi^2\rho_\lambda^2$, что для всех $\lambda\geqslant\lambda_1$, любого потенциала $q_\lambda\in V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ и произвольного $x\in[0,\pi]$ решение задачи Коши (2) удовлетворяет следующим неравенствам:*

$$\left|y(x,\lambda)-\frac{h(\lambda)\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}+\delta(x,\lambda,h)\cos\sqrt{\lambda}x\right|\leqslant\frac{\rho_\lambda(1+\pi\rho_\lambda)|h(\lambda)|}{2\lambda\sqrt{\lambda}}, \tag{13}$$

где

$$\delta(x,\lambda,h)=\frac{h(\lambda)}{2\lambda}\int\limits_0^x q_\lambda(\tau)\,d\tau.$$

Утверждение 6 [37]. *Для перенумерованных согласно* (4) *нулей решений задачи Коши* (2) *с* $h(\lambda)\neq 0$ *и* q_λ, *удовлетворяющими соотношению*

$$V_0^\pi[q_\lambda]\leqslant\rho_\lambda,\quad \rho_\lambda=o\biggl(\frac{\sqrt{\lambda}}{\ln\lambda}\biggr)\ \textit{при}\ \lambda\to\infty,\quad q_\lambda(0)=0,\quad h(\lambda)\neq 0,$$

справедливы асимптотические формулы вида

$$x_{k,\lambda}=\frac{k}{\sqrt{\lambda}}\pi+o\biggl(\frac{\lambda^{-1/2}}{\ln\lambda}\biggr)\quad \textit{при}\quad \lambda\to\infty, \tag{14}$$

$$y'(x_{k,\lambda},\lambda)=h(\lambda)\Biggl((-1)^k+o\biggl(\frac{1}{\ln\lambda}\biggr)\Biggr),\ \textit{при}\ \lambda\to\infty. \tag{15}$$

Стремление к нулю в 0 *равномерно по* $q_\lambda\in V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ *и* k, $0\leqslant k\leqslant n$.

Далее, в предположении $\rho_\lambda\geqslant 0$ при каждом неотрицательном λ считаем, что функция q_λ есть произвольный элемент из шара $V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ радиуса $\rho_\lambda=o\biggl(\frac{\sqrt{\lambda}}{\ln\lambda}\biggr)$ в пространстве функций с ограниченным изменением, исчезающих в нуле, т. е. такая, что

$$V_0^\pi[q_\lambda]\leqslant\rho_\lambda,\quad \rho_\lambda=o\biggl(\frac{\sqrt{\lambda}}{\ln\lambda}\biggr)\quad \text{при}\quad \lambda\to\infty,\quad q_\lambda(0)=0. \tag{16}$$

В случае задачи Коши (2) дополнительно потребуем отличие от нуля функции $h(\lambda)$, т. е.

$$V_0^\pi[q_\lambda]\leqslant\rho_\lambda,\quad \rho_\lambda=o\biggl(\frac{\sqrt{\lambda}}{\ln\lambda}\biggr)\ \text{при}\ \lambda\to\infty,\quad q_\lambda(0)=0,\quad h(\lambda)\neq 0. \tag{17}$$

Утверждение 7 [4]. *Пусть* $y(x,\lambda)$ — *решения задачи Коши* (1) *или* (2). *Пусть для задачи Коши* (1) *выполняются соотношения* (16), *а в случае задачи Коши* (2) — *соотношения* (17). *Если функция* $f\in C_0[0,\pi]$, *то*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\Biggl(f(x)-S_\lambda(f,x)-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\{f(x_{k+1,\lambda})-f(x_{k,\lambda})\}s_{k,\lambda}(x)\Biggr)=0 \tag{18}$$

равномерно по $x\in[0,\pi]$ *и по всем* $q_\lambda\in V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$.

При каждом $\lambda>0$ доопределим функцию

$$q_\lambda(x)=\begin{cases} q_\lambda(x) & \text{при } x\in[0,\pi],\\ q_\lambda(\pi) & \text{при } x>\pi,\\ 0 & \text{при } x<0.\end{cases} \tag{19}$$

Через $x_{k,\lambda}$, $k\in\mathbb{Z}$, будем обозначать нули решения $y(x,\lambda)$ задачи Коши (1) или (2), рассматриваемой на всей действительной оси, перенумерованные в порядке возрастания таким образом, чтобы выполнялись неравенства (4).

Исключив из рассмотрения тривиальный случай $f\equiv 0$, возьмём фиксированную положительную функцию $\vartheta(\lambda)$, удовлетворяющую условиям

$$\vartheta(\lambda)=o(1),\quad \lim_{\lambda\to\infty}\frac{\vartheta(\lambda)}{\omega(f,\pi/\sqrt{\lambda})}=\infty,\quad \varepsilon(\lambda)=\exp\biggl\{-\frac{\vartheta(\lambda)}{\omega(f,\pi/\sqrt{\lambda})}\biggr\}. \tag{20}$$

Для любого положительного λ и $x \in [0, \pi]$ обозначим через k_1, k_2, m_1 и m_2 такие целые числа, что

$$m_1 = [k_1/2] + 1, \quad m_2 = [k_2/2], \tag{21}$$

где номера нулей k_1 и k_2 определяются из неравенств

$$x_{k_1-1,\lambda} < x - \varepsilon(\lambda) \leqslant x_{k_1,\lambda}, \quad x_{k_2,\lambda} \leqslant x + \varepsilon(\lambda) < x_{k_2+1,\lambda}.$$

Утверждение 8 [4]. *Пусть $y(x,\lambda)$ — решения задачи Коши (1) или (2). Положим, что для задачи Коши (1) выполняются соотношения (16), а в случае задачи Коши (2) — соотношения (17). Считаем, что функция $f \in C_0[0,\pi]$ и функции $\vartheta(\lambda)$ и $\varepsilon(\lambda)$ определяются из условий (20). Доопределим функции q_λ и f с помощью определений (19) и условия*

$$f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x \in [0,\pi], \\ 0 & \text{при } x \notin [0,\pi]. \end{cases}$$

Тогда равномерно по $x \in [0,\pi]$ и по всём $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ имеет место соотношение

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left(f(x) - S_\lambda(f,x) - \frac{1}{2}\sum_{k=k_1}^{k_2}\{f(x_{k+1,\lambda}) - f(x_{k,\lambda})\}s_{k,\lambda}(x)\right) = 0. \tag{22}$$

Здесь целые числа k_1 и k_2, являющиеся номерами нулей продолженного на $\mathbb{R}$ решения соответствующей задачи Коши согласно (4), удовлетворяют соотношениям

$$x_{k_1-1,\lambda} < x - \varepsilon(\lambda) \leqslant x_{k_1,\lambda}, \quad x_{k_2,\lambda} \leqslant x + \varepsilon(\lambda) < x_{k_2+1,\lambda}.$$

Если окажется $k_2 < k_1$, то сумма в (22) отсутствует.

Утверждение 9 [4]. *Найдётся такое значение λ_0, выбор которого зависит только от скорости изменения радиусов шаров ρ_λ в (16) или в (17), что для любых потенциала $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ и функции $h(\lambda)$, а также для всех $\lambda > \lambda_0$ константы Лебега оператора (5), построенного по решениям задач Коши (1) или (2), оцениваются следующим образом:*

$$S_\lambda = \max_{x\in[0,\pi]}\sum_{k=0}^{n}\left|s_{k,\lambda}(x)\right| \leqslant \frac{3}{\pi}\ln\lambda + 11. \tag{23}$$

Лемма 1 [4]. *Найдётся такое положительное число λ_0, зависящее только от скорости изменения радиусов шаров ρ_λ в (16) или в (17), что для любого потенциала $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ и произвольного k, $0 \leqslant k \leqslant n$, функции $s_{k,\lambda}(x)$, построенные по решениям задачи Коши (1) или (2), могут быть оценены таким образом:*

$$\max_{x\in[0,\pi]}\left|s_{k,\lambda}(x)\right| = \max_{x\in[0,\pi]}\left|\frac{y(x,\lambda)}{y'(x_{k,\lambda},\lambda)(x - x_{k,\lambda})}\right| \leqslant 3$$

при $\lambda > \lambda_0$.

Утверждение 10 [26, следствие 1]. *Система $\{l_{k,n}\}_{k=0,n=1}^{n,\ \infty}$ полна в $C_0[0,\pi]$, а система функций $\{1,x\} \cup \{l_{k,n}\}_{k=0,n=1}^{n,\ \infty}$ полна в $C[0,\pi]$.*

Утверждение 11 [26, теорема 1]. *Линейные оболочки систем функций $\{l_{k,n}\}_{k=0}^{n}, n \in \mathbb{N}$, не плотны в $C[0,\pi]$.*

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ И СЛЕДСТВИЙ ИЗ НИХ

Доказательство теоремы. После продолжения по непрерывности функции $f(x)$

$$\tilde f(x)=\begin{cases} f(x) & \text{при } x\in[a+\varepsilon/2,b-\varepsilon/2],\\ 0 & \text{при } x\in\mathbb{R}\setminus[a,b],\\ \text{линейная на отрезках } [a,a+\varepsilon/2],[b-\varepsilon/2,b] & \end{cases} \tag{24}$$

функция $\tilde f$ стала равномерно непрерывной на всём множестве действительных чисел с модулем непрерывности $\omega(\tilde f,\delta)$. Кроме того, легко видеть, что $\tilde f\in C_0[0,\pi]$. Сначала рассмотрим случай, когда оператор (5) строится с помощью решений задачи Коши (2). Покажем, что из асимптотических формул (13)–(15) следует равномерная сходимость значений операторов (5) для функций f и $\tilde f$ на $[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$ и шарах (17). В силу инвариантности оператора (5) относительно умножения функции $y(x,\lambda)$ на отличную от нуля константу без потери общности считаем $h\equiv 1$.

Обозначим через $\hat k_1$ и $\hat k_2$ индексы узлов интерполирования, удовлетворяющих соотношениям

$$x_{\hat k_1-1}<a+\varepsilon/2\leqslant x_{\hat k_1}\quad x_{\hat k_2}\leqslant b-\varepsilon/2<\hat x_{k_2+1}.$$

Учитывая, что $x\in[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$, воспользуемся асимптотическими формулами (13), (14). Считаем также, что λ настолько большие, что выполняются соотношения $\frac{a+\varepsilon/2}{\pi}\sqrt{\lambda}\geqslant\hat k_1$ и $|x-x_{2m+1,\lambda}|\geqslant\varepsilon/4$ одновременно. Получаем соотношение

$$\left|\sum_{k=0}^{\hat k_1}\frac{y(x,\lambda)}{y'(x_{k,\lambda},\lambda)(x-x_{k,\lambda})}(f(x_{k,\lambda})-\tilde f(x_{k,\lambda}))\right|=\|f-\tilde f\|_{C[0,\pi]}O(\lambda^{-1/2})+\omega\left(f-\tilde f,\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}\right)O(1).$$

Сумма

$$\left|\sum_{k=\hat k_2}^{n}\frac{y(x,\lambda)}{y'(x_{k,\lambda},\lambda)(x-x_{k,\lambda})}(f(x_{k,\lambda})-\tilde f(x_{k,\lambda}))\right|$$

оценивается аналогично или с помощью замены переменных $t=\pi-x$. Таким образом, имеем равномерную по $x\in[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$ и $q_\lambda\in V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ формулу равномерной сходимости

$$|S_\lambda(f-\tilde f,x)|=\omega\left(f-\tilde f,\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}\right)O(1)+\|f-\tilde f\|_{C[0,\pi]}o(1). \tag{25}$$

Обозначим

$$\psi_{k,\lambda}=\tilde f(x_{k+1,\lambda})-\tilde f(x_{k,\lambda}),\quad k\in\mathbb{Z}. \tag{26}$$

Тогда существует такое λ_1, что при каждом $\lambda\geqslant\lambda_1$ в силу (14)

$$\max_{k\in\mathbb{Z}}|\psi_{k,\lambda}|\leqslant\omega\left(\tilde f,\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}\right)\quad\text{и}\quad\max_{1\leqslant k\leqslant n}(x_{k,\lambda}-x_{k-1,\lambda})<\varepsilon/2. \tag{27}$$

Отсюда и из леммы 1 для достаточно больших λ следует равномерная по $x\in[0,\pi]$, $q_\lambda\in V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ и $k\in\mathbb{Z}$ оценка

$$|(\tilde f(x_{k+1,\lambda})-\tilde f(x_{k,\lambda}))s_{k,\lambda}(x)|\leqslant 3\omega\left(\tilde f,\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

Отсюда и из (13), (27), (22) следует равенство

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(x)-S_\lambda(f,x)-\frac{\sqrt{\lambda}y(x,\lambda)}{2\pi}\sum_{k=k_1}^{k_2}{}'\frac{(-1)^k\psi_{k,\lambda}}{p-k}\right)=0, \tag{28}$$

где штрих у сумм означает отсутствие слагаемого, знаменатель которого обращается в нуль. Это соотношение выполняется равномерно на отрезке $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ и шарах (17). Оценим последнее слагаемое в (28) с помощью соотношений (21), (27) и неравенства треугольника:

$$\left|\frac{\sqrt{\lambda}y(x,\lambda)}{2\pi}\sum_{k=k_1}^{k_2}{}'\frac{(-1)^k\psi_{k,\lambda}}{p-k}\right|=O\left(\omega\left(\tilde{f},\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}\right)\right)\sum_{k=1}^{l(\lambda)}\frac{1}{k}+O(1)\|f\|_{C[a,b]}\sum_{k=l(\lambda)}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=o(1).$$

Отсюда и из(25), (28) и неравенства треугольника получаем оценку

$$\begin{aligned}|f(x)-S_\lambda(f,x)|&\leqslant 2\left|\frac{\sqrt{\lambda}y(x,\lambda)}{2\pi}\sum_{m=m_1}^{m_2}{}'\frac{\psi_{2m,\lambda}}{p-2m}\right|+o(1)\\&=O(1)\max_{p:x_{p,\lambda}\in[a+\varepsilon,b-\varepsilon]}\sum_{m=m_1}^{m_2}{}'\left|\frac{\psi_{2m,\lambda}}{p-2m}\right|+o(1)\end{aligned} \tag{29}$$

в случае, когда оператор (5) строится с помощью решения задачи Коши (2).

В случае, когда оператор (5) строится с помощью решения задачи Коши (1), используя соответствующую асимптотику, которую можно найти в [4, 37], получаем аналогичную (29) оценку:

$$\begin{aligned}|f(x)-S_\lambda(f,x)|&\leqslant 2\left|\frac{\sqrt{\lambda}y(x,\lambda)}{2\pi\sqrt{\lambda+h^2(\lambda)}}\sum_{m=m_1}^{m_2}{}'\frac{\psi_{2m,\lambda}}{p-2m}\right|+o(1)\\&=O(1)\max_{p:x_{p,\lambda}\in[a+\varepsilon,b-\varepsilon]}\sum_{m=m_1}^{m_2}{}'\left|\frac{\psi_{2m,\lambda}}{p-2m}\right|+o(1).\end{aligned} \tag{30}$$

Пусть функции v и ω удовлетворяют условию (9) и $\tilde{f}\in C(\omega^l[a,b])\cap V^-(v)$. Покажем, что выполняется соотношение (10). В силу равномерной непрерывности функции $\tilde{f}$ на отрезке $[0,\pi]$ для любого положительного $\tilde{\varepsilon}$ существуют числа $\nu\in\mathbb{N}$ и $\lambda_1>0$ такие, что для всех $\lambda\geqslant\lambda_1$, $\lambda\in\mathbb{R}$, одновременно справедливы неравенства

$$\omega\left(\tilde{f},\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}\right)\sum_{k=1}^{\nu}\frac{1}{k}\leqslant\omega_1\left(\tilde{f},\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}\right)\sum_{k=1}^{\nu}\frac{1}{k}<\tilde{\varepsilon}/6 \tag{31}$$

$$24\|f\|_{C[a,b]}<\tilde{\varepsilon}\nu. \tag{32}$$

Пусть $\lambda\geqslant\lambda_1$. Найдём индекс p_0, зависящий от λ, a, b, ε и $\tilde{f}$, на котором достигается максимум в соотношении

$$\sum_{m=m_1}^{m_2}{}'\left|\frac{\psi_{2m,\lambda}}{p_0-2m}\right|=\max_{p:x_{p,\lambda}\in[a+\varepsilon,b-\varepsilon]}\sum_{m=m_1}^{m_2}{}'\left|\frac{\psi_{2m,\lambda}}{p-2m}\right|.$$

После добавления к этой сумме неотрицательных слагаемых получим оценку

$$\sum_{m=m_1}^{m_2}{}'\left|\frac{\psi_{2m,\lambda}}{p_0-2m}\right|\leqslant\sum_{k=k_1}^{k_2}{}'\left|\frac{\tilde{f}(x_{k+1,\lambda})-\tilde{f}(x_{k,\lambda})}{p_0-k}\right|. \tag{33}$$

Разобьём получившуюся сумму на два слагаемых:

$$\sum_{k=k_1}^{k_2}{}' \left|\frac{\tilde f(x_{k+1,\lambda})-\tilde f(x_{k,\lambda})}{p_0-k}\right| = \sum_{k=k_1}^{k_2}{}' \frac{\tilde f(x_{k+1,\lambda})-\tilde f(x_{k,\lambda})}{|p_0-k|}$$
$$-2\sum_{k=k_1}^{k_2}{}'' \frac{\tilde f(x_{k+1,\lambda})-\tilde f(x_{k,\lambda})}{|p_0-k|} = S_1(p_0)+S_2(p_0). \quad (34)$$

Здесь и далее два штриха означают отсутствие в сумме неотрицательных слагаемых и слагаемого с индексом $k=p_0$.

Сначала оценим первую сумму. Для этого представим её в виде

$$S_1(p_0) = \sum_{\substack{k:k\in[k_1,k_2]\\ 0<|p_0-k|<\nu}} \frac{\tilde f(x_{k+1,\lambda})-\tilde f(x_{k,\lambda})}{|p_0-k|} + \sum_{\substack{k:k\in[k_1,k_2]\\ 0<|p_0-k|\geqslant\nu}} \frac{\tilde f(x_{k+1,\lambda})-\tilde f(x_{k,\lambda})}{|p_0-k|} = S_{1,1}(p_0)+S_{1,2}(p_0). \quad (35)$$

В случае $\{k \mid k\in[k_1,k_2], 0<|p_0-k|\geqslant\nu\}=\varnothing$ считаем второе слагаемое равным нулю.

Из неравенства (31) для всех $\lambda\geqslant\lambda_1$ имеем соотношение

$$|S_{1,1}(p_0)| \leqslant 2\omega\left(\tilde f, \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}\right)\sum_{k=1}^{\nu}\frac{1}{k} < \tilde\varepsilon/3. \quad (36)$$

Теперь оценим $S_{1,2}(p_0)$. Если p_0 удовлетворяет соотношению $k_1\leqslant p_0-\nu<p_0<p_0+\nu\leqslant k_2$, то имеют место неравенства $p_0-k_1\geqslant\nu$ и $k_2-p_0\geqslant\nu$. Используем (32) и после преобразования Абеля получим оценку

$$|S_{1,2}(p_0)| \leqslant \left|\sum_{k=k_1}^{p_0-\nu}\frac{\tilde f(x_{k+1,\lambda})-\tilde f(x_{k,\lambda})}{p_0-k}\right| + \left|\sum_{k=p_0+\nu}^{k_2}\frac{\tilde f(x_{k+1,\lambda})-\tilde f(x_{k,\lambda})}{k-p_0}\right|$$
$$\leqslant 4\|f\|_{C[a,b]}\sum_{i=\nu}^{\infty}\frac{1}{i(i+1)} + \frac{4\|f\|_{C[a,b]}}{\nu} \leqslant \frac{8\|f\|_{C[a,b]}}{\nu} < \tilde\varepsilon/3. \quad (37)$$

Точно так же доказывается (37) в ситуации, когда индекс p_0 удовлетворяет одному из соотношений $p_0-\nu<k_1\leqslant p_0<p_0+\nu\leqslant k_2$ или $k_1\leqslant p_0-\nu<p_1\leqslant k_2<p_0+\nu$. Из возможных вариантов остался случай, когда $p_0-\nu<k_1\leqslant p_1\leqslant k_2<p_0+\nu$. В этой ситуации $|S_{1,2}(p_0)|=0$. Из (35)–(37) для всех $\lambda\geqslant\lambda_1$ имеем оценку

$$|S_1(p_0)| \leqslant 2\tilde\varepsilon/3. \quad (38)$$

Перейдём к изучению свойств суммы $S_2(p_0)$. Возьмём произвольное целое m, $1\leqslant m\leqslant k_2-k_1-2$, и представим $S_2(p_0)$ в виде

$$0\leqslant S_2(p_0) = -2\sum_{\substack{k:k\in[k_1,k_2]\\ |p_0-k|\leqslant m}}{}'' \frac{\tilde f(x_{k+1,\lambda})-\tilde f(x_{k,\lambda})}{|p_0-k|}$$
$$-2\sum_{\substack{k:k\in[k_1,k_2]\\ |p_0-k|>m}}{}'' \frac{\tilde f(x_{k+1,\lambda})-\tilde f(x_{k,\lambda})}{|p_0-k|} = S_{2,1}(p_0)+S_{2,2}(p_0). \quad (39)$$

Выберем достаточно большое $\lambda_2 \geqslant \lambda_1$, зависящее только от параметров задач (1), (2), начиная с которого в силу (14) будут выполняться неравенства

$$\max_{0\leqslant k\leqslant n-1} |x_{k+1,\lambda} - x_{k,\lambda}| \leqslant \frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda}}.$$

Функция $\tilde{f} \in C(\omega^l[a,b])$, следовательно, согласно определению (8), начиная с λ_2 будем иметь соотношение

$$\tilde{f}(x_{k+1,\lambda}) - \tilde{f}(x_{k,\lambda}) \geqslant -10K_f\omega\Big(\frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda}}\Big). \tag{40}$$

Поэтому

$$0 \leqslant S_{2,1}(p_0) = -2 \sum_{\substack{k:k\in[k_1,k_2]\\ |p_0-k|\leqslant m}}{}'' \frac{\tilde{f}(x_{k+1,\lambda}) - \tilde{f}(x_{k,\lambda})}{|p_0-k|} \leqslant 10K_f\omega\Big(\frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda}}\Big)\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}. \tag{41}$$

Далее оценим сумму $S_{2,2}(p_0)$:

$$\begin{aligned} 0 \leqslant S_{2,2}(p_0) &= -2 \sum_{\substack{k:k\in[k_1,k_2]\\ |p_0-k|> m}}{}'' \frac{\tilde{f}(x_{k+1,\lambda}) - \tilde{f}(x_{k,\lambda})}{|p_0-k|} \\ &\leqslant 2\sum_{k=k_1}^{p_0-m-1} \frac{-(\tilde{f}(x_{k+1,\lambda}) - \tilde{f}(x_{k,\lambda}))_-}{p_0-k} + 2\sum_{k=p_0+m+1}^{k_2} \frac{-(\tilde{f}(x_{k+1,\lambda}) - \tilde{f}(x_{k,\lambda}))_-}{k-p_0}. \end{aligned} \tag{42}$$

Если $p_0 - m \leqslant k_1$ или $p_0 + m \geqslant k_2$, то в (42) исчезает первое или второе слагаемое. В случае $p_0 - m < k_1 < k_2 < p_0 + m$ суммы $S_{2,2}(p_0)$ в (39) вообще нет. Принимая во внимание то, что $\tilde{f} \in V^-(v)$, с помощью преобразования Абеля и (40) оценим (42):

$$\begin{aligned} 0 \leqslant S_{2,2}(p_0) &\leqslant 2M_f\Bigg(\sum_{k=m+1}^{p_0-k_1-1}\frac{v(k-m)}{k(k+1)} + \sum_{k=m+1}^{k_2-p_0-1}\frac{v(k-m)}{k(k+1)}\Bigg) + 10K_f\omega\Big(\frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda}}\Big) \\ &\leqslant 4M_f\sum_{k=m+1}^{k_2-k_1-1}\frac{v(k)}{k^2} + 10K_f\omega\Big(\frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda}}\Big). \end{aligned}$$

Отсюда и из (39), (41), (42) имеем

$$0 \leqslant S_2(p_0) \leqslant 10K_f\omega\Big(\frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda}}\Big)\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k} + 4M_f\sum_{k=m+1}^{k_2-k_1-1}\frac{v(k)}{k^2} + 10K_f\omega\Big(\frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda}}\Big). \tag{43}$$

В силу (43) условие (9) гарантирует существование такого $\lambda_4 \in \mathbb{R}$, $\lambda_4 \geqslant \lambda_3$, что для произвольного $\lambda \geqslant \lambda_4$ имеет место оценка

$$0 \leqslant S_2(p_0) \leqslant \tilde{\varepsilon}/3. \tag{44}$$

Выбирая наибольшую константу равномерности в o-символике $O(1)$ соотношений (30) и (29), из (30), (29), (33), (34), (35), (38) и (44) получаем, что для произвольного $\tilde{\varepsilon} > 0$ существует $\lambda_4 \in \mathbb{R}$ такое, что для всех $\lambda \geqslant \lambda_4$ одновременно в случае задач Коши (1) и (2) имеет место оценка $\|f - S_\lambda(f,\cdot)\|_{C[a+\varepsilon,b-\varepsilon]} < \tilde{\varepsilon}$. Теперь для $f \in C(\omega^l[a,b]) \cap V^-(v)$ утверждение теоремы 1 доказано одновременно в случае задач Коши (1) и (2).

Для доказательства теоремы 1 в случае $f \in C(\omega^r[a,b]) \cap V^+(v)$ достаточно заметить, что если $f \in C(\omega^r[a,b]) \cap V^+(v)$, то $-f \in C(\omega^l[a,b]) \cap V^-(v)$ и оператор $S_\lambda(f,\cdot)$ — линейный. Теорема 1 доказана. $\square$

Замечание 2. Из теоремы 1 следует, что если $f_1 \in C\big(\omega_1^r[a,b]\big) \cap V^+(v_1)$ и $f_2 \in C\big(\omega_2^l[a,b]\big) \cap V^-(v_2)$, а пары функций $(v_i,\ \omega_i)$, где $i = 1, 2$, удовлетворяют соотношению (9), то несмотря на то, что линейная комбинация $f = \alpha f_1 + \beta f_2$ может не принадлежать ни одному из этих классов, интерполяционный процесс (5) будет приближать функцию f из (10).

Замечание 3. Если $f \in C[0,\pi]$, то для классического модуля изменения $v(n, f)$ имеют место двусторонние оценки

$$v^+(n,f) \leqslant v(n,f) \leqslant 2(v^+(n,f) + \|f\|_{C[0,\pi]}),$$
$$-v^-(n,f) \leqslant v(n,f) \leqslant 2(-v^-(n,f) + \|f\|_{C[0,\pi]}).$$

Следствие 1. *Каждый из классов функций Дини — Липшица* $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \omega(f, 1/\sqrt{\lambda}) \ln \sqrt{\lambda} = 0$ *и Крылова (непрерывные функции ограниченной вариации) являются собственным подмножеством функционального класса, определяемым соотношением* (9).

Следствие 2. *Из теоремы следует, что любое из условий* $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \omega^l(f, 1/\sqrt{\lambda}) \ln \sqrt{\lambda} = 0$ *или* $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \omega^r(f, 1/\sqrt{\lambda}) \ln \sqrt{\lambda} = 0$ *гарантирует справедливость соотношения* (10).

Доказательство утверждений 1–4. Равномерная аппроксимация (12) на всём отрезке $[0,\pi]$, $a = 0$, $b = \pi$, непрерывной функции ограниченной вариации, исчезающей на концах отрезка $[0,\pi]$ с помощью операторов (5), следует из доказательства теоремы 1, в котором вместо утверждения 8 используется утверждение 7. В этом случае переопределение функции (24) не требуется, т. е. $f \equiv \tilde{f}$ на $[0,\pi]$. Так как в этом случае все оценки (27)–(43), в формулах которых суммирование будет осуществляться не в пределах от k_1 до k_2, а по всему набору узлов с индексами от 0 до $n-1$, будут равномерными на всём отрезке $[0,\pi]$, $h(\lambda) \in \mathbb{R}$ и шарах $V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ из (16), (17). Утверждение 1 доказано.

Чтобы убедиться в справедливости утверждений 2 и 4, достаточно положить $q_{\lambda_n} \equiv 0$, $\lambda_n = n^2$, $h(\lambda_n) = n$ в (2). Утверждение 4 следует при таких обозначениях из утверждений 1 и 11.

Положив $q_{\lambda_n} \equiv 0$, $\lambda_n = n^2$, $h(\lambda_n) = n$ в (2), из теоремы 1, утверждений 10 и 11 устанавливаем справедливость утверждения 3 в случае задачи Коши (2). Положив $f \equiv 1$ и $q_{\lambda_n} \equiv 0$, $\lambda_n = n^2$, $h(\lambda_n) = 0$ в (1), из теоремы 1 и соотношений

$$\lim_{\lambda\to\infty} |S_{\lambda_n}(f,x) - f(x)| = 0{,}5 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad x = \pi$$

устанавливаем справедливость утверждения 3 в случае задачи Коши (1).

Доказательство теоремы 2. Если заметить, что $f(\cdot) - \dfrac{f(\pi) - f(0)}{\pi} + f(0) \in C_0[0,\pi]$, то утверждение теоремы 2 следует из утверждения 1.

Из следствия 1 получаем результаты работы [7, теоремы 1 и 2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чантурия З. А.* О равномерной сходимости рядов Фурье // Мат. сб. 1976. Т. 100(142), № 4(8). С. 534–554; http://mi.mathnet.ru/msb3016

2. *Привалов А. А.* О равномерной сходимости интерполяционных процессов Лагранжа // Мат. заметки. 1986. Т. 39, № 2. С. 228–244; http://mi.mathnet.ru/mz4939

3. *Привалов А. А.* Теория интерполирования функций. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1990.

4. *Трынин А. Ю.* Обобщение теоремы отсчётов Уиттекера — Котельникова — Шеннона для непрерывных функций на отрезке // Мат. сб. 2009. Т. 200, № 11. С. 61–108.

5. *Трынин А. Ю.* Оценка погрешности равномерной аппроксимации интерполяционными процессами Лагранжа — Штурма — Лиувилля // Проблемы мат. анализа. 2020. Т. 102. С. 165–180.
6. *Трынин А. Ю.* Достаточное условие сходимости процессов Лагранжа — Штурма — Лиувилля в терминах одностороннего модуля непрерывности // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2018. Т. 58, № 11. С. 1780–1793; http://mi.mathnet.ru/zvmmf10851
7. *Трынин А. Ю.* О равномерном приближении интерполяционными многочленами Лагранжа по матрице узлов Якоби $\mathcal{L}_n^{(\alpha_n,\beta_n)}$ функций ограниченной вариации // Изв. РАН. Сер. математическая. 2020. Т. 84, № 6. С. 197–222.
8. *Richardson M., Trefethen L.* A sinc function analogue of Chebfun // SIAM J. Sci. Comput. 2011. V. 33, N 5. P. 2519–2535.
9. *Stenger F., El-Sharkawy H. A. M., Baumann G.* The Lebesgue constant for sinc approximations // Appl. Numer. Harmon. Anal. 2014. N 9783319088006. P. 319–335.
10. *Costarelli D., Vinti G., Krivoshein A., Skopina M.* Quasi-projection operators with applications to differential-difference expansions // Appl. Math. Comput. 2019. V. 363. P. 124623.
11. *Kolomoitsev Y., Skopina M.* Around kotelnikov-shannon formula // 12 Internat. Conf. on Sampling Theory and Applications (SampTA 2017). 2017. P. 279–282.
12. *Krivoshein A., Skopina M.* Multivariate sampling-type approximation // Anal. Appl. 2017. V. 15, N 4. P. 521–542.
13. *Marwa M. Tharwat.* Sinc approximation of eigenvalues of Sturm—Liouville problems with a Gaussian multiplier // Quarterly on Numerical Analysis and Theory of Computation. 2014. V. 51, N 3. P. 465–484.
14. *Солиев Ю. С.* О квадратурных формулах с кратными узлами для особых интегралов по действительной оси с периодическими плотностями // Материалы Межд. конф. «Воронежская весенняя математическая школа. Понтрягинские чтения — XXXI». Воронеж, 2020. С. 205.
15. *Солиев Ю. С.* О синк-аппроксимации сингулярных интегралов Гильберта // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Материалы Межд. конф. «Воронежская зимняя математическая школа» Воронеж, 2019. С. 241–242.
16. *Bede B., Coroianu L., Gal S. G.* Introduction and Preliminaries // Approximation by Max-Product Type Operators. 2016. P. 1–24.
17. *Крыжановский А. Д., Пастушков А. А.* Непараметрический метод восстановления плотности вероятности по наблюдениям случайной величины // Российский технолог. журн. 2018. Т. 6, № 3(23). С. 31–38.
18. *Coroianu L, Sorin G. Gal.* Localization results for the non-truncated max-product sampling operators based on Fejer and sinc-type kernels // Demonstratio Math. 2016. V. 49, N 1. P. 38–49.
19. *Livne Oren E., Brandt Achi E.* MuST: The multilevel sinc transform // SIAM J. Sci. Comput. 2011. V. 33, N 4. P. 1726–1738.
20. *Tharwat M.* Sinc approximation of eigenvalues of Sturm—Liouville problems with a Gaussian multiplier // Calcolo. 2014. V. 51, N 09. P. 465-484; DOI: 10.1007/s10092-013-0095-3
21. *Новиков И. Я., Стечкин С. Б.* Основы теории всплесков // Успехи мат. наук. 1998. Т. 53, вып. 6(324). С. 53–128.
22. *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001.
23. *Шмуклер А. И., Шульман Т. А.* О некоторых свойствах рядов Котельникова // Изв. вузов. Математика. 1974. № 3. С. 93–103.
24. *Sklyarov V. P.* On the best uniform sinc-approximation on a finite interval // East J. Approx. 2008. V. 14, N 2. P. 183–192.
25. *Умаханов А. Я., Шарапудинов И. И.* Интерполяция функций суммами Уиттекера и их модификациями: условия равномерной сходимости // Владикавказ. мат. журн. 2016. Т. 18, № 4. С. 61–70.
26. *Трынин А. Ю.* О необходимых и достаточных условиях сходимости синк-аппроксимаций // Алгебра и анализ. 2015. Т. 27, № 5. С. 170–194.
27. *Trynin A. Yu.* One functional class of uniform convergence on a segment of truncated whittaker cardinal functions // Internat. J. Math. Syst. Sci. 2018. V. 1, N 3. P. 1-9; DOI:10.24294/ijmss.v1i3.527

28. *Трынин А. Ю.* Приближение непрерывных на отрезке функций с помощью линейных комбинаций синков // Изв. вузов. Математика. 2016. № 3. С. 72–81.

29. *Голубов Б. И.* Сферический скачок функции и средние Бохнера — Рисса сопряжённых кратных рядов и интегралов Фурье // Мат. заметки. 2012. Т. 91, № 4. С. 506–514.

30. *Голубов Б. И.* Двоичные обобщённые функции // Мат. сб. 2007. Т. 198, № 2. С. 67–90; http://mi.mathnet.ru/msb3780

31. *Дьяченко М. И., Муканов А. Б., Тихонов С. Ю.* Гладкость функций и коэффициенты Фурье // Мат. сб. 2019. Т. 210, № 7. С. 94–119; http://mi.mathnet.ru/msb9096

32. *Джумабаева Д. Г., Дьяченко М. И., Нурсултанов Е. Д.* О сходимости кратных тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 2. С. 270–280; http://mi.mathnet.ru/smj2858

33. *Кривошеин А. В., Скопина М. А.* Построение многомерных фреймов всплесков с использованием полифазного метода // Мат. заметки. 2016. Т. 100, № 3. С. 473–476; http://mi.mathnet.ru/mz11167

34. *Новиков И. Я., Скопина М. А.* Почему в разных структурах базисы Хаара одинаковые // Мат. заметки. 2012. Т. 91, № 6. С. 950–953; http://mi.mathnet.ru/mz9392

35. *Mochizuki K., Trooshin I. Yu.* Evolution equations of hyperbolic and Schrödinger type. Asymptotics, estimates and nonlinearities // Internat. Workshop «Asymptotic properties of solutions to hyperbolic equations». London, 2012. P. 227–245.

36. *Борисов Д. И., Знойил М.* О собственных значениях PTPT-симметричного оператора в тонком слое // Мат сб. 2017. Т. 208, № 2. С. 3–30.

37. *Трынин А. Ю.* Об асимптотике решений и узловых точек дифференциальных выражений Штурма — Лиувилля // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 3. С. 662–675.

38. *Шакиров И. А.* О двусторонней оценке нормы оператора Фурье // Уфим. мат. журн. 2018. Т. 10, № 1. С. 96–117.

39. *Baranov A. D.* Spectral theory of rank one perturbations of normal compact operators // Алгебра и анализ. 2018. Т. 30, № 5. С. 1–56.

40. *Фарков Ю. А.* О наилучшем линейном приближении голоморфных функций // Фундамент. и приклад. математика. 2014. Т. 19, № 5. С. 185–212.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 517.518.8

ON THE CONVERGENCE OF GENERALIZATIONS OF THE SINC APPROXIMATIONS ON THE PRIVALOV–CHANTURIA CLASS

© 2021 A. Yu. Trynin[1,2]

[1] *Chernyshevskii Saratov State University,*
ul. Astrakhanskaya 83, Saratov 410012, Russia,
[2] *Moscow Centre for Fundamental and Applied Mathematics,*
Lomonosov Moscow State University,
Leninskie gory 1, Moscow 119991, Russia

E-mail: tayu@rambler.ru

Received 23.02.2021, revised 23.02.2021, accepted 24.06.2021

Abstract. We establish a condition described in terms of the left- or right modulus of continuity and the negative or positive modulus of variation of a function f respectively, which is sufficient for uniform approximation of f by the values of the function interpolation operators constructed from the solutions of the Cauchy problem with a linear differential expression of the second order inside an interval. These operators are some generalization of the classical sinc approximations used in the Whittaker—Kotelnikov—Shannon Sampling Theorem. We also show that this condition is sufficient for uniform convergence over the entire segment of one modification of the function interpolation operator, which allows us to eliminate the Gibbs phenomenon near the ends of the segment.

Keywords: interpolation process, sinc approximation, function approximation, uniform convergence.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.309

REFERENCES

1. Chanturiya Z.A. O ravnomernoi skhodimosti ryadov Fur'e [On the uniform convergence of Fourier series]. *Sb. Math.*, 1976, Vol. 29, No. 4, pp. 475–495.
2. Privalov A.A. Uniform convergence of Lagrange interpolation processes. *Math. Notes*, 1986, Vol. 39, No. 2, pp. 124–133.
3. Privalov A.A. Theory of functions interpolation. Saratov: Izd. Saratov. un-ta, 1990 (in Russian).
4. Trynin A.Yu. A generalization of the Whittaker–Kotel'nikov–Shannon sampling theorem for continuous functions on a closed interval. *Sb. Math.*, 2009, Vol. 200, No. 11, pp. 1633–1679.
5. Trynin A.Yu. Error estimate of the uniform approximation by Lagrange—Sturm—Liouville interpolation processes. *Problemy Mat. Analiza*, 2020, Vol. 102, pp. 165–180 (in Russian).
6. Trynin A.Yu. Sufficient condition for convergence of Lagrange–Sturm–Liouville processes in terms of one-sided modulus of continuity. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2018, Vol. 58, No. 11, pp. 1716–1727.
7. Trynin A. Yu. On the uniform approximation of functions of bounded variation by Lagrange interpolation polynomials with a matrix $\mathcal{L}_n^{(\alpha_n,\beta_n)}$ of Jacobi nodes. *Izv. Math.*, 2020, Vol. 84, No. 6, pp. 1224–1249.
8. Richardson M., Trefethen L. A sinc function analogue of Chebfun. *SIAM J. Sci. Comput.*, 2011, Vol. 33, No. 5, pp. 2519–2535.
9. Stenger F., El-Sharkawy H. A. M., Baumann G. The Lebesgue constant for sinc approximations. *Appl. Numer. Harmon. Anal.*, 2014, No. 9783319088006, pp. 319–335.

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2021, Vol. 15, No. 3.

10. Costarelli D., Vinti G., Krivoshein A., Skopina M. Quasi-projection operators with applications to differential-difference expansions. *Appl. Math. Comput.*, 2019, Vol. 363, pp. 124623.

11. Kolomoitsev Y., Skopina M. Around kotelnikov-shannon formula. *12 Internat. Conf. on Sampling Theory and Applications (SampTA 2017)*, 2017, pp. 279–282.

12. Krivoshein A., Skopina M. Multivariate sampling-type approximation. *Anal. Appl.*, 2017, Vol. 15, No. 4, pp. 521–542.

13. Marwa M. Tharwat. Sinc approximation of eigenvalues of Sturm—Liouville problems with a gaussian multiplier. *Quarterly on Numerical Analysis and Theory of Computation*, 2014, Vol. 51, No. 3, pp. 465–484.

14. Soliev Yu.S. On quadrature formulas with multiple nodes for singular integrals along the real axis with periodic densities. *Modern methods of theory of boundary value problems.* Proc. Internat. Conf. «Spring Mathematical School in Voronezh. Pontryagin's Readings–XXXI», 2020. Voronezh, 2020, pp. 205.

15. Soliev Yu. S. On Sinc-Approximation of Singular Hilbert Integrals. *Modern methods of function theory and allied problems*, Proc. Internat. Conf. «Winter Mathematical School in Voronezh». Voronezh, 2019, pp. 241–242.

16. Bede B., Coroianu L., Gal S. G. Introduction and Preliminaries. *Approximation by Max-Product Type Operators*, 2016, pp. 1–24.

17. Kryzhanovskii A.D., Pastushkov A.A. Nonparametric technique for the probability density recovering by observations of a random quantity. *Ross. Tekhnolog. Zh.*, 2018, Vol. 6, No. 3(23), pp. 31–38.

18. Coroianu L, Sorin G. Gal. Localization results for the non-truncated max-product sampling operators based on Fejer and sinc-type kernels. *Demonstratio Math.*, 2016, Vol. 49, No. 1, pp. 38–49.

19. Livne Oren E., Brandt Achi E. MuST: The multilevel sinc transform. *SIAM J. Sci. Comput.*, 2011, Vol. 33, No. 4, pp. 1726–1738.

20. Tharwat M. Sinc approximation of eigenvalues of Sturm–Liouville problems with a Gaussian multiplier. *Calcolo*, 2014, Vol. 51, No. 09, pp. 465-484; DOI: 10.1007/s10092-013-0095-3

21. Novikov I.Ya., Stechkin S.B. Basics of splash theory. *Uspekhi Mat. Nauk*, 1998, Vol. 53, No 6(324), pp. 53–128 (in Russian).

22. Dobeshi I. Ten Lectures on Wavelets. Philadelphia: SIAM, 1992.

23. Shmukler A.I., Shul'man T.A. Some properties of Kotel'nikov series. *Izv. VUZ'ov. Ser. Mat.*, 1974, No. 3, pp. 93–103 (in Russian).

24. Sklyarov V.P. On the best uniform sinc-approximation on a finite interval. *East J. Approx.*, 2008, Vol. 14, No. 2, pp. 183–192.

25. Umakhanov A.Ya., Sharapudinov I.I. Interpolation of functions by whittaker sums and their modifications: conditions for uniform convergence. *Vladikavkaz. Mat. Zh.*, 2016, Vol. 18, No. 4, pp. 61–70 (in Russian).

26. Trynin A.Yu. On necessary and sufficient conditions for the convergence of sinc approximations. *Algebra i Analiz*, 2015, Vol. 27, No. 5, pp. 170–194 (in Russian).

27. Trynin A.Yu. One functional class of uniform convergence on a segment of truncated whittaker cardinal functions. *Internat. J. Math. Syst. Sci.*, 2018, Vol. 1, No. 3, pp. 1-9; DOI:10.24294/ijmss.v1i3.527

28. Trynin A.Yu. Approximation of continuous on a segment functions with the help of linear combinations of sincs. *Russ. Math.*, 2016, No. 3, pp. 63–71.

29. Golubov B.I. Spherical jump of a function and the Bochner–Riesz means of conjugate multiple Fourier series and Fourier integrals. *Math. Notes*, 2012, Vol. 91, No. 4, pp. 479–486.

30. Golubov B.I. Dyadic distributions. *Sb. Math.*, 2007, Vol. 198, No. 2, pp. 207–230.

31. D'yachenko M.I., Mukanov A.B., Tikhonov S.Yu. Smoothness of Functions and Fourier coefficients. *Sb. Math.*, 2019. T. 210, No. 7. pp. 994–1018.

32. Dzhumabaeva D.G., D'yachenko M.I., Nursultanov E.D. On convergence of multiple trigonometric series with monotone coefficients. *Siberian Math. J.*, 2017, Vol. 58, No. 2, pp. 205–214.

33. Krivoshein A.V., Skopina M.A. Construction of multivariate frames using the polyphase method. *Math. Notes*, 2016, Vol. 100, No. 3, pp. 495–498.

34. Novikov I.Ya., Skopina M.A. Why are haar bases in various structures the same? *Math. Notes*, 2012, Vol. 91, No. 6, pp. 895–898.

35. Mochizuki K., Trooshin I. Yu. Evolution equations of hyperbolic and Schrödinger type. Asymptotics, estimates and nonlinearities. *Internat. Workshop «Asymptotic properties of solutions to hyperbolic equations»*. London, 2012, pp. 227–245.

36. Borisov D.I., Znoiil M. On eigenvalues of a $\mathcal{PT}$-symmetric operator in a thin layer. *Sb. Math.*, 2017, Vol. 208, No. 2, pp. 173–199.

37. Trynin A.Yu. Asymptotic behavior of the solutions and nodal points of Sturm—Liouville differential expressions. *Siberian Math. J.*, 2010, Vol. 51, No. 3, pp. 525–536.

38. Shakirov I.A. Some two-sided estimate of the norm of a Fourier operator. *Ufim. Mat. Zh.*, 2018, Vol. 10, No. 1, pp. 96–117 (in Russian).

39. Baranov A.D. Spectral theory of rank one perturbations of normal compact operators. *Algebra and Analiz*, 2018, Vol. 30, No. 5, pp. 1–56.

40. Farkov Yu.A. On the best linear approximation of holomorphic functions. *Fundam. Prikl. Mat.*, 2014, Vol. 19, No. 5, pp. 185–212.