

УДК 517.98:519.677

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ СКОРОСТНЫХ И УПРУГИХ ПАРАМЕТРОВ СРЕДЫ ФОКАЛЬНОЙ ЗОНЫ ПО ГОДОГРАФАМ ОТ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ

© 2021 Ю. Е. Аниконов^a, В. В. Богданов^b, Ю. С. Волков^c,
Е. Ю. Деревцов^d

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
просп. Акад. Коптюга, 4, г. Новосибирск 630090, Россия*

E-mails: ^aanikon@math.nsc.ru, ^bbogdanov@math.nsc.ru, ^cvolkov@math.nsc.ru,
^ddert@math.nsc.ru

Поступила в редакцию 25.05.2021 г.; после доработки 09.07.2021 г.;
принята к публикации 21.10.2021 г.

Рассматривается обратная кинематическая задача сейсмологии с внутренними источниками, состоящая в определении скоростей продольных и поперечных волн по временам пробега от очагов землетрясений, происходящих в фокальной зоне, до группы сейсмических приёмников. Предложен алгоритм численного решения задачи, основанный на уравнении эйконала и технологии сглаживающих многомерных сплайнов, которые дают аппроксимацию скоростного строения фокальной зоны. Приведены теоретические результаты, обосновывающие алгоритм решения задачи методами аппроксимации сглаживающими многомерными сплайнами по данным на нерегулярных сетках. Описаны результаты численного решения задачи, расчёты с реальными данными о землетрясениях в фокальной зоне, приведены оценки скоростных и упругих параметров среды.

Ключевые слова: кинематическая задача сейсмологии, внутренние источники, обратные задачи, уравнение эйконала, интерполяция, аппроксимация, сплайны.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.401

ВВЕДЕНИЕ

Обратная кинематическая задача сейсмологии (ОКЗС), начало исследований которой положили Г. Герглотц [1] и Е. Вихерт [2], сыграла важную роль как в теории обратных задач математической физики [3, 4], так и в практической геофизике [5, 6].

Уравнения движения в анизотропной упругой среде [5, 7] выглядят следующим образом:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = c_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x^j \partial x^k}, \quad i = 1, 2, 3,$$

где ρ — плотность среды, $u = (u_i)$ — векторное поле смещения, c_{ijkl} — тензор модулей упругости с симметриями $c_{ijkl} = c_{jikl}$, $c_{ijkl} = c_{ijlk}$. Здесь и далее под разновысоким одноимённым индексом в одном мономе подразумевается суммирование от одного до трёх.

В изотропной среде модули упругости выражаются через параметры Ламе λ , μ :

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}),$$

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проекты 0314-2019-0011, 0314-2019-0013) и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект РФФИ-ННИО 19-51-12008).

δ_{jk} — символ Кронекера. Оставляя в стороне механизмы распространения поверхностных волн Рэлея и Лява, ограничимся следующими уравнениями движения в изотропной упругой среде:

$$\frac{\partial^2 u_i^p}{\partial t^2} = v_p^2 \Delta u_i^p, \quad \frac{\partial^2 u_i^s}{\partial t^2} = v_s^2 \Delta u_i^s, \quad i = 1, 2, 3,$$

где Δ — оператор Лапласа, u^p , u^s — векторы смещений в продольном и поперечном направлениях, v_p — скорость распространения продольной волны (волны сжатия), v_s — скорость распространения поперечной (сдвиговой) волны:

$$v_p^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad v_s^2 = \frac{\mu}{\rho}. \quad (1)$$

В упругой среде распространяются обе эти волны. Волна сжатия приводит к относительному изменению объёма, равному $\operatorname{div} u^p$. Сдвиговая волна характеризуется соотношением $\operatorname{div} u^s = 0$. Иными словами, векторное поле u^s смещений в поперечном направлении соленоидально.

Приведём выражения для таких параметров упругой среды, как модуль Юнга (коэффициент упругости) E и коэффициент Пуассона (деформации) σ (см. [8]):

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} = \rho \frac{v_s^2(3\kappa - 1)}{\kappa - 1}, \quad \sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} = \frac{\kappa - 2}{2(\kappa - 1)}, \quad (2)$$

где $\kappa = \left(\frac{v_p}{v_s}\right)^2$. Например, для горных пород $\sqrt{\kappa} \approx \sqrt{3} \approx 1,73$.

Рассмотрим математическую модель [9], в рамках которой возникает уравнение эйконала, играющее значительную роль в ОКЗС. Пусть в среде распространяется монохроматическая волна, описываемая уравнением Гельмгольца

$$\Delta u(x) + k_0^2 n^2(x) u(x) = 0, \quad (3)$$

где $x \in \mathbb{R}^3$, $k_0 = \omega/c$ — волновое число, ω — частота, c — характерное значение скорости распространения волны в среде, $n(x)$ — коэффициент преломления. В неоднородной среде, свойства которой незначительно изменяются по сравнению с длиной волны, фронт волны также мало меняется с расстоянием, оставаясь «почти плоским». Решение уравнения (3) ищется в виде плоской волны

$$u(x) = a(x) e^{ik_0 \psi(x)}, \quad (4)$$

в которой амплитуда $a(x)$ и волновой вектор $k(x) = k_0 \nabla \psi(x)$, $k = (k_1, k_2, k_3)$, также слабо меняются по сравнению с длиной волны.

Представляя поле $u(x)$ в виде ряда

$$u(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j(x)}{(ik_0)^j} e^{ik_0 \psi(x)} \quad (5)$$

и подставляя (5) в (3), получаем бесконечную систему уравнений

$$\begin{aligned} \langle \nabla \psi, \nabla \psi \rangle &= n^2, \quad 2\langle \nabla a_0, \nabla \psi \rangle + a_0 \Delta \psi = 0, \\ 2\langle \nabla a_j, \nabla \psi \rangle + a_j \Delta \psi &= -\Delta a_{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Функция ψ носит название эйконала, первое уравнение системы (6) — уравнение эйконала. Уравнения, связывающие амплитуды a_0, a_1, \dots , — уравнения переноса нулевого, первого, второго и т. д. порядков аппроксимации.

Сформулируем ОКЗС [4]. Пусть D — полупространство $x^3 > 0$ пространства \mathbb{R}^3 с границей ∂D — координатной плоскостью OXY . Область D заполнена упругой средой, в которой распространяются волны со скоростью $v(x) = 1/n(x)$, $x = (x^1, x^2, x^3)$. В качестве v выступают скорости v_p продольных или v_s поперечных волн. Пусть $\tau(x_0, x)$ — время, за которое волна из точки x_0 приходит в точку x . Функция $\tau(x, x_0)$ (равная $\tau(x_0, x)$) удовлетворяет уравнению эйконала и условию на бесконечности:

$$|\nabla_x \tau(x, x_0)| = \frac{1}{v(x)} \equiv n(x), \quad \tau(x, x_0) = O(|x - x_0|) \quad x \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Ставится задача определения скорости $v(x)$ при $x \in D$, если известна функция $\tau(x, x_0)$, удовлетворяющая (7) для $x \in \partial D$, $x_0 \in B$ для некоторого множества B , $B \subset \overline{D}$.

Замечание. Обычно в обратной кинематической задаче сейсмологии предполагается, что подмножество B принадлежит границе ∂D , $B \subset \partial D$. Если же B есть область, $B \subset D$, то говорят об обратной кинематической задаче сейсмологии с внутренними источниками.

В рамках представлений аналитической механики интерпретация задачи описана в [10]. Рассмотрим лагранжиан $\mathcal{L}(x, \dot{x}) = n^2(x)|\dot{x}|^2/2$. Тогда $p_i \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} = n^2(x)\dot{x}^i$, гамильтониан совпадает с лагранжианом

$$\mathcal{H}(x, p) = p_i \dot{x}^i - \mathcal{L}(x, \dot{x}) = n^2(x)|\dot{x}|^2/2,$$

и каноническая система уравнений Гамильтона запишется в виде

$$\dot{x}^i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \frac{p_i}{n^2(x)} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^i} = \frac{|p|^2}{n^2(x)} \frac{\partial \ln n}{\partial x^i}. \quad (8)$$

Пусть не зависящая от времени функция $f(x, p)$ является первым интегралом системы (8), тогда уравнение Лиувилля для данного гамильтониана и функции f таково, что

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^i} = \frac{p_i}{n^2} \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{|p|^2}{n^2} \frac{\partial \ln n}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial p_i}. \quad (9)$$

Путь распространения возмущения рассматривается как экстремаль вариационного функционала Ферма и интерпретируется как геодезическая римановой метрики конформного вида [11], заданной в области D :

$$ds^2 = n^2(x)|dx|^2, \quad (10)$$

где $n(x) = 1/v(x)$ и v — скорость либо продольных v_p , либо поперечных v_s волн; $|dx|^2$ — элемент длины евклидовой метрики. Следует отметить, что использование лагранжиана более общего вида $\mathcal{L}(x, \dot{x}) = g_{ij}(x)\dot{x}^i \dot{x}^j/2$ приводит к римановой метрике

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j. \quad (11)$$

Система уравнений, задающая геодезическую метрики (11) такова, что

$$\ddot{x}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{x}^j \dot{x}^k - \dot{x}^i \ddot{s}/\dot{s} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (12)$$

Здесь геодезическая параметризована произвольным параметром t , а через s обозначен канонический параметр, пропорциональный длине дуги. Ясно, что если $s = at + b$, то последний член слева в (12) обращается в нуль и система приобретает канонический вид с параметром s , пропорциональным длине дуги. Через Γ_{ij}^k , как обычно, обозначены символы Кристоффеля метрики (11):

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kp} \left(\frac{\partial g_{jp}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{pi}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^p} \right), \quad (13)$$

которые для метрики (10) существенно упрощаются:

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = -\Gamma_{22}^1 = -\Gamma_{33}^1 = \frac{\partial \ln n(x)}{\partial x^1}, \\ \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{22}^2 = \Gamma_{23}^3 = -\Gamma_{11}^2 = -\Gamma_{33}^2 = \frac{\partial \ln n(x)}{\partial x^2}, \\ \Gamma_{13}^1 &= \Gamma_{23}^2 = \Gamma_{33}^3 = -\Gamma_{11}^3 = -\Gamma_{22}^3 = \frac{\partial \ln n(x)}{\partial x^3}.\end{aligned}\tag{14}$$

ОКЗС может быть сформулирована следующим образом. Требуется по известным временам пробега (расстояниям в смысле римановой метрики (10)) между точками $x_0, x_1 \in \partial D$, которые соединяются геодезической $\gamma(x_0, x_1)$, $x \in \gamma(x_0, x_1)$, параметризованной естественным параметром s :

$$\tau(x_0, x_1) = \int_{\gamma(x_0, x_1)} n(x(s)) \sqrt{(\dot{x}^1)^2 + (\dot{x}^2)^2 + (\dot{x}^3)^2} ds,\tag{15}$$

найти функцию $n(x) = 1/v(x)$, определяющую конформную метрику (10). В (15) дифференцирование переменных x^j , $x \in \gamma(x_0, x_1)$, производится по s . Величину (15) часто называют годографом. Обратим внимание на то, что «источник» x_0 , как и «приёмник» x_1 , расположены на поверхности ∂D . Если же источники располагаются в некоторой ограниченной области B (фокальной зоне) полупространства D , то это — ОКЗС с внутренними источниками. Именно в рамках такой постановки и предлагается её решение в настоящей работе. Считаются известными координаты очагов и времена начала землетрясений, которые достаточно густо располагаются в фокальной зоне. Предполагаются выполненными условия, при которых возможно использование уравнения эйконала (7). На первом этапе решения задачи по имеющемуся набору значений зафиксированных времён пробега путём многомерной сплайн аппроксимации строится функция времён пробега (15) в фокальной зоне B . Затем на основе уравнения эйконала определяются скорости v_p и v_s . Наконец, с привлечением априорной информации проводится оценивание упругих параметров среды в фокальной зоне.

Разд. 1 посвящен обсуждению более общих постановок ОКЗС с внутренними источниками и некоторых подходов к её решению. В разд. 2 содержатся основные сведения об используемой технологии аппроксимации сплайнами по многомерным хаотическим данным на основе радиальных базисных функций. Последний раздел работы содержит описание и визуальное представление результатов обработки реальных данных о землетрясениях, полученных на группе сейсмологических станций Камчатки. Анализ, выводы из результатов и дальнейшие перспективы развития содержатся в заключении.

1. ОКЗС С ВНУТРЕННИМИ ИСТОЧНИКАМИ

Постановкам многомерных ОКЗС с внутренними источниками предшествовали постановки одномерной задачи, продолжающие и обобщающие работы [1, 2]. Наряду с исследованием годографов от поверхностных и глубинных источников одномерная модель задачи с внутренними источниками рассматривалась в [12, 13]. Показано, что для шара Ω радиуса R , источника в точке x_0 , $|x_0| = r_0 < R$ и функции $m(r) = \frac{r}{v(r)}$ такой, что на отрезке $[r_0, R]$ она строго монотонна, по годографу (15) однозначно определяются r_0 и скорость $v(r)$ для $r \in [r_0, R]$. Отметим, что в одномерной модели (в отличие от многомерной) координаты эпицентра легко определяются, так как годографы $\tau(x_0, y_1)$, $x_0 \in \Omega$, $y_1 \in \partial\Omega$, симметричны относительно прямой, проходящей через центр шара Ω и точку x_0 .

Математическая модель многомерной ОКЗС с внутренними источниками в более общей постановке рассмотрена в работах [14, 15]. Опишем один из подходов к её исследованию более подробно. Строго говоря, как эпицентры землетрясений, так и времена их начала определены

с некоторой точностью. Более того, как уже отмечалось во введении, само уравнение эйконала справедливо лишь при определённых условиях. Имеется и ещё ряд факторов, не поддающихся строгому учёту, но влияющих на точность измерения времён пробега. Поэтому в формулу (15) вносится аддитивная составляющая $E(x)$, аккумулирующая все неточности, влияющие на годограф:

$$\tau(x, y_1) = \int_{\gamma(x, y_1)} n(y) |dy| + E(x), \quad y \in \gamma(x, y_1), \quad (16)$$

где $x = (x^1, x^2, x^3) \in B$, $y_1 = (y_1^1, y_1^2, 0) \in \partial D$. Таким образом, по данным (16) требуется, вообще говоря, определить не только скорость $v(x)$ в области B , но и оценить величину $E(x)$. Принимаем следующую гипотезу. Предположим, что метрика (10) вместе с добавкой $E(x)$ в полупространстве D интерпретируется как риманова метрика общего вида (11). Тогда время пробега (16) может быть представлено также и в виде

$$\tau(x, y_1) = \int_{\gamma(x, y_1)} \sqrt{g_{ij}(y(s)) \dot{y}^i \dot{y}^j} ds, \quad y(s) \in \gamma(x, y_1). \quad (17)$$

Таким образом мы от годографов, зависящих от двух функций $n(x)$ и $E(x)$, переходим к годографу, зависящему, вообще говоря, уже от шести функций, а именно, от компонент $g_{11}, g_{21}, g_{31}, g_{22}, g_{32}, g_{33}$ метрического тензора. Принимается во внимание его симметричность, $g_{21} = g_{12}, g_{31} = g_{13}, g_{32} = g_{23}$.

Будем считать, что $n(x) \in C^2(\bar{D})$ и любые две точки $x, y \in \bar{D}$ можно соединить единственной геодезической $\gamma(x, y)$ как метрики (10), так и метрики (11). Рассмотрим функцию

$$R(x, y_1, y_2) = \tau(x, y_1) - \tau(x, y_2), \quad x \in B, \quad y_1, y_2 \in \partial D.$$

Заметим, что функция R , представляющая собой разность времён пробега фронта волны между точками x, y_1 и x, y_2 , уже не содержит величину $E(x)$. Через g^{ij} обозначается метрический тензор g , выраженный через контравариантные компоненты. В матричной терминологии (g^{ij}) — это обратная к (g_{ij}) матрица. Напомним, что матрицы (g_{ij}) и (g^{ij}) невырождены, положительно определены и симметричны. Возможно представление элементов матриц (g_{ij}) и (g^{ij}) в векторной форме, а именно, паре индексов (ij), $i \leq j$, сопоставляется один индекс (l) следующим образом:

$$(11) \leftrightarrow (1), \quad (12) \leftrightarrow (2), \quad (13) \leftrightarrow (3), \quad (22) \leftrightarrow (4), \quad (23) \leftrightarrow (5), \quad (33) \leftrightarrow (6), \quad (18)$$

$$g^{ij} \leftrightarrow c^l, \quad c = (c^1, \dots, c^6).$$

Пусть y_k , $k = 1, 2, \dots, 6$, — фиксированные точки на плоскости $OXY \equiv \partial D$. Для дифференцируемой функции $\tau(x, y)$ симметричную матрицу $M(x) = (M_{kl}(x))$ размера 6×6 определим как

$$M_{kl}(x) = \frac{\partial \tau(x, y_k)}{\partial x^i} \frac{\partial \tau(x, y_k)}{\partial x^j}, \quad (ij) \equiv (ji) \leftrightarrow (l), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad k, l = 1, 2, \dots, 6.$$

Поясним, что значение индекса k соответствует номеру точки y , принадлежащей границе ∂D , индекс l нумерует соответствующую компоненту метрического тензора.

При невырожденной матрице $M(x)$, $x \in B$, матрица $M^{-1}(x)$ — обратная к M . Вектор $I_6 = (1, 1, 1, 1, 1, 1)^T$ состоит из шести единичных компонент. Справедливы соотношения, связывающие компоненты метрического тензора g_{ij} , функцию R и годограф $\tau(x, y)$ (см. [15]). Предполагается непрерывная дифференцируемость соответствующих функций по переменным x^j , $j = 1, 2, 3$.

Справедливо соотношение

$$g_{ii}(x) + g_{jj}(x) + 2g_{ij}(x) = \frac{1}{4} \left[\max \left(\frac{\partial R}{\partial x^i} + \frac{\partial R}{\partial x^j} \right) \right]^2, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Пусть $E(x)$ непрерывно дифференцируема. Тогда

$$g_{ii}(x) + g_{jj}(x) + 2g_{ij}(x) = \frac{1}{4} \left[\max_y \frac{\partial \tau}{\partial x^i} - \min_y \frac{\partial \tau}{\partial x^j} \right]^2,$$

$$\frac{\partial E}{\partial x^i} = \frac{1}{2} \left[\max_y \frac{\partial \tau}{\partial x^i} + \min_y \frac{\partial \tau}{\partial x^i} \right]^2, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Если $E(x) = 0$, то существуют точки $y_1, \dots, y_6 \in \partial D$ такие, что $c(x) = M^{-1}(x)I_6$. Здесь $c(x)$ — вектор, образованный из компонент метрического тензора g^{ij} в соответствии с (18).

С использованием результатов, полученных в [16–18], сделаем выводы из приведённых выше соотношений. Так, если многообразие представляет собой риманову область, то функция $n(x)$ единственным и устойчивым образом определяется функцией $\tau(x, y_1)$, $x \in B$, $y_1 \in \partial D$, с точностью до конформных преобразований области B . В частности, если ω — замкнутая выпуклая поверхность уровня функции $n(x)$, $\omega = \{x \in D \mid n(x) = c\}$, то ω единственным и устойчивым образом определяется функцией $\tau(x, y_1)$ с точностью до преобразования подобия и положения в D .

Оказалось, что, вообще говоря, плоские и пространственные задачи существенно отличаются друг от друга. Так, в первом случае функцию $n(x)$ можно найти однозначно лишь тогда, когда область B (соответствующая фокальной зоне) известна. В пространственном же случае для однозначного определения области достаточно знать положение нескольких точек области B . Наконец, ещё раз подчеркнём, что приведённый подход позволяет уточнить время начала землетрясений и координаты его гипоцентра. Независимо от распределения источников и времени начала возмущения метрика $ds^2 = g_{jk}dx^j dx^k$, тесно связанная со скоростью распространения возмущения, находится однозначно. Этот вывод оказывается важным при численном решении задачи с внутренними источниками. В работе [19] предложен алгоритм решения ОКЗС с внутренними источниками, основанный на результатах настоящего раздела и идеях обращения волновых фронтов и их аппроксимаций фронтами плоских или сферических волн. Оказалось, что даже если гипоцентры землетрясений известны с большой погрешностью, определяемая в результате работы алгоритма скорость среды восстанавливалась устойчиво. Следует отметить, что в алгоритме, далее развиваемом в настоящей работе, времена начала и гипоцентры землетрясений считаются известными.

Упомянем ещё одну проблему, возникающую в тесной связи с рассматриваемой. Это задача определения скоростных характеристик среды, расположенной между фокальной зоной и сейсмическими приёмниками. В современной терминологии это задача сейсмической томографии. С томографической точки зрения она характеризуется как задача с ограничениями по «углам обзора» и является сильно некорректной. Кроме того, как отмечалось ранее, задача нелинейна из-за того, что неизвестны скоростные характеристики среды, от которых зависят компоненты метрического тензора g_{ij} , а от них, в свою очередь, зависят геодезические. Таким образом, ни подынтегральная функция, ни кривая интегрирования в (15) неизвестны.

В рамках описанной постановки возможно связать задачу продолжения скоростного строения среды вплоть до границы (задачу сейсмической томографии) с задачей исследования функционалов F_1 , возникающего из (16), и F_2 , возникающего с заменой времён пробега в рамках конформной метрики, метрикой (17) общего вида и, наконец, функционала F_3 , представляющего собой разность времён пробега в рамках моделей конформной и произвольной римановых метрик. В функционалах функция $n(x)$ считается заданной в области B . (Получена

аппроксимацией хаотически расположенных данных о годографе и затем с использованием уравнения эйконала.) Имеется возможность строить функционалы с использованием скоростей v_p и v_s , тогда получатся две функции n_p , n_s и две «искомые метрики» $g_{ij}(x)$ и $h_{ij}(x)$. В задаче экстраполяции метрик вплоть до границы ∂D естественным представляется использовать эмпирические данные о скоростях продольных и поперечных волн в приповерхностном слое.

Наиболее распространённый подход к решению ОКЗС состоит в линейризации задачи (см. [5, 6]). Именно, скорость распространения волн в среде представляется в виде $v(x) = v_0(x) + v_1(x)$, $x \in \bar{D}$, где $v_0(x)$ представляет собой известную (априори заданную) функцию, а $v_1(x)$ — малую добавку к ней. Переходя к функции $n(x)$, получаем

$$n(x) = \frac{1}{v(x)} = \frac{1}{v_0(x) \left(1 + v_1(x)/v_0(x)\right)} = \frac{1}{v_0(x)} - \frac{v_1(x)}{v_0^2(x)} + o(v_1) \approx n_0(x) + n_1(x).$$

Тогда, в предположении $v_1/v_0 \ll 1$, для невязки времён пробега получаем

$$\tau(x, y) = - \int_{\gamma(x, y)} \frac{v_1(z(s))}{v_0^2(z(s))} ds = \int_{\gamma(x, y)} n_1(z(s)) ds \equiv \mathcal{A}n_1, \quad z(s) \in \gamma(x, y), \quad (19)$$

где $x, y \in \bar{D}$, интегрирование проводится вдоль геодезической конформной метрики, определяемой известной функцией $n_0(z)$, $z \in D$; геодезические этой метрики определяются символами Кристоффеля (14). Таким образом, ОКЗС линейризована, и необходимо найти лишь малую добавку v_1 к априори заданной скорости v_0 . Соотношение (19) определяет линейный томографический оператор \mathcal{A} . В работе [20] показано, что он компактен из L_2 в L_2 , проведена его дискретизация и обращение на данных физической модели.

2. СПЛАЙН-АППРОКСИМАЦИЯ

В данном разделе описывается алгоритм численного решения ОКЗС с внутренними источниками. Для простоты рассматривается вариант задачи с одним приёмником. Используются обозначения, отличные от принятых выше, но обычно используемые в теории аппроксимации. Пусть в точке $P_0(x_0, y_0, 0)$ на поверхности земли расположен приёмник, регистрирующий приходящие сигналы от определённых точек $P_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, \dots, n$, называемых источниками возмущений. Источники некоторым образом, вообще говоря хаотично, заполняют пространственную область внутри Земли (фокальную зону). Предполагаются известными времена $\tau(P_i, P_0)$ прихода волны от источника P_i до приёмника P_0 . Поскольку расположение приёмника фиксировано, нам известны значения t_i функции $T(P)$ в точках $P = P_i$, т. е. $t_i = \tau(P_i, P_0) = T(P_i)$.

Уравнение эйконала связывает градиент функции $T(P)$ с функцией $v(P)$ скорости распространения сигнала в точке P . Наша задача — определить распределение скорости в области фокальной зоны. Если бы координаты источников имели регулярное расположение, например в узлах трёхмерной прямоугольной сетки, то было бы достаточно легко вычислить приближённые значения частных производных функции T в узлах сетки и, следовательно, значения градиента.

Однако в реальной задаче источники возмущений расположены в гипоцентрах землетрясений и, конечно, ни о какой регулярности не может быть и речи. Кроме того, данные содержат значительную погрешность. В этом случае разностные методы не дают приемлемых результатов. Необходимо строить какую-либо функцию, не только хорошо приближающую имеющиеся значения $t_i = T(P_i)$, но и обладающую хорошим приближением производных. Ясно, что локальные методы, например на основе триангуляции, здесь вряд ли приемлемы. «Хорошими»

методами для такой задачи представляются глобальные методы аппроксимации сплайнами на основе радиальных базисных функций [21, 22].

Сплайны такого типа могут получаться в результате минимизации какого-либо функционала $J(f)$ на множестве функций f из некоторого пространства (условие минимальности нормы) при условии интерполяции заданного набора значений или их сглаживания [23, 24]. В итоге сплайн представляется в виде

$$s(P) = \sum_{i=1}^n \lambda_i R(P, P_i) + \pi(P). \quad (20)$$

Здесь $P_i, i = 1, \dots, n$, — опорные узлы сплайна, точки в пространстве (в общем случае многомерном, но нас интересует только \mathbb{R}^3), где заданы данные; $R(P, P') = \phi(|P - P'|)$ — радиальная базисная функция, ϕ — функция одной переменной, $|P - P'|$ — евклидово расстояние между точками P и P' пространства; $\lambda_i \in \mathbb{R}$ — коэффициенты сплайна; $\pi \in \mathcal{P}$, где \mathcal{P} — заданное конечномерное пространство функций в рассматриваемом многомерном пространстве, называемое трендом сплайна. Обычно \mathcal{P} — пространство алгебраических многочленов некоторой степени.

Коэффициенты $\lambda_i, i = 1, \dots, n$, интерполяционного сплайна $s(P)$ определяются из условий интерполяции

$$s(P_i) = t_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (21)$$

и условий аннуляции тренда сплайна

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \pi(P_i) = 0 \quad \text{для любого } \pi \in \mathcal{P}.$$

Выбрав некоторый базис $u_j \in \mathcal{P}, j = 1, \dots, k, k = \dim \mathcal{P}$, и записывая функцию π тренда \mathcal{P} в виде $\pi(p) = \sum_{j=1}^k \mu_j u_j(P)$, получаем систему линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^T & \mathbf{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Здесь \mathbf{B} — симметрическая матрица размерности $(n \times n)$ с коэффициентами $b_{ij} = R(P_i, P_j)$; \mathbf{C} — матрица размерности $(n \times k)$ с коэффициентами $c_{ij} = u_j(P_i)$; \mathbf{O} — нулевая матрица; $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$ и $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)^T$ — векторы неизвестных коэффициентов сплайна, $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)^T$ — задаваемые значения функции, $\mathbf{0}$ — столбец нулей. Для однозначной разрешимости задачи определения коэффициентов сплайна необходимо также выполнение условий $n \geq k$ и $\text{rank } \mathbf{C} = k$. Эти условия будут и достаточными, если функция $R(P, P')$ — условно положительно определённая (см. [25]), следовательно, она служит воспроизводящим ядром некоторого функционального пространства.

Условие минимума нормы для сплайна позволяет сформулировать также задачу построения сглаживающего сплайна $s_\alpha(P)$, как результат минимизации функционала:

$$J_\alpha(f) = \alpha J(f) + \sum_{i=1}^n (f(P_i) - t_i)^2, \quad (23)$$

где $\alpha > 0$ — параметр сглаживания, который можно варьировать. В предположении, что система уравнений (22) имеет единственное решение ($n \geq k$ и $\text{rank } \mathbf{C} = k$), сглаживающий сплайн $s_\alpha(P)$ также определяется однозначно, его коэффициенты удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B} + \alpha \mathbf{I} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^T & \mathbf{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Здесь \mathbf{I} — единичная матрица. Очевидно, что при $\alpha \rightarrow 0$ сглаживающий сплайн s_α стремится к интерполяционному, а при $\alpha \rightarrow \infty$ в пределе получается функция из тренда \mathcal{P} , минимизирующая функционал $\sum_{i=1}^n (f(P_i) - t_i)^2$.

Примеры используемых радиальных базисных функций с приведением вида минимизируемого функционала и указанием функционального пространства содержатся в [25]. Мы будем рассматривать радиальную базисную функцию вида

$$\phi(r) = \begin{cases} (-1)^{m/2+1} r^m \ln r, & m \text{ чётное,} \\ (-1)^{(m+1)/2} r^m, & m \text{ нечётное,} \end{cases} \quad (25)$$

приводящую к так называемым D^m -сплайнам или натуральным сплайнам (тонких пластин), которые иногда также называются полигармоническими или псевдополиномиальными сплайнами (см., например, [22, 23]). Трендом при этом выступает множество многочленов от трёх переменных степени $m - 1$. Число m мы называем степенью сплайна, что хорошо согласуется с понятием степени для классического сплайна одной переменной.

Как следует из [25], векторное пространство тренда \mathcal{P} может быть расширено добавлением в него некоторого набора линейно независимых базисных функций. Условная положительная определённая выбранной радиальной функции сохраняется, и она также будет воспроизводящим ядром пространства с расширенным трендом. Таким образом, снимаются ограничения на размерность пространства многочленов для тренда. Пространство тренда определяет поведение сплайна вне области с данными, поэтому при использовании, например, классических кубических сплайнов тонких пластин трендом является множество многочленов первой степени. А это означает, что за пределами области с данными сплайн будет вести себя близко к плоскости. Однако такое поведение нас может не устроить, если мы из каких-либо соображений знаем, что аппроксимируемая функция, например, колоколообразная, т. е. нам хотелось бы, чтобы тренд мог содержать многочлены второй степени или выше. Как мы видим, в нашем случае это возможно. В ряде задач нами уже была опробована аппроксимация такими сплайнами с расширенным трендом в двумерном и трёхмерном случаях [26–28], показавшая достаточно хорошие результаты.

Практическое построение интерполяционного сплайна сводится к решению системы уравнений (22). Вопросы существования и единственности сплайнов общего вида исследовались в [29]. Отметим, что ограничения на исходные данные, обеспечивающие существование и единственность рассматриваемых сплайнов, необременительны и сводятся к вопросу о существовании в множестве точек с данными набора из k точек, для которого интерполяционный полином $\pi(P)$ существует и единственен, например, для тренда, состоящего из многочленов первой степени; для существования и единственности сплайна от трёх переменных достаточно, чтобы среди n точек с исходными данными существовало три точки, не лежащие на одной прямой.

Если исходные данные обладают погрешностью, то, как правило, интерполяционные сплайны не дают приемлемого результата. В таких случаях необходимо строить сглаживающие сплайны, т. е. вместо системы уравнений (22) следует решать систему (24) с изменениями в матрице только лишь в элементах главной диагонали первого блока.

Построение как интерполяционного, так и сглаживающего сплайна сводится к решению системы линейных уравнений с практически плотной симметрической матрицей, размер которой в основном определяется количеством точек интерполяции P_i . Для достаточно больших значений n такая система может быть плохо обусловлена. Несмотря на то, что матрица системы (22) или (24) симметрическая, метод Холецкого для её решения использовать нельзя, так как эти матрицы не являются положительно определёнными. Мы используем метод Аазена [30], в котором при разложении диагональная матрица заменяется трехдиагональной.

Отметим, что хотя сложности и трудности построения интерполяционных и сглаживающих сплайнов с радиальными базисными функциями подобны, однако ненулевой параметр сглаживания α улучшает обусловленность системы уравнений. Параметр сглаживания регулирует уровень сглаживания данных. Значение $\alpha = 0$ соответствует интерполяционному сплайну, т. е. $s(P) = s_0(P)$. С увеличением α поведение сплайна становится более гладким, уменьшаются или даже исчезают осцилляции, но вместе с тем, вообще говоря, растёт отклонение от исходных данных. Как уже отмечалось, в пределе при $\alpha \rightarrow \infty$ сплайн стремится к некоторому элементу тренда. Добавим, что степень сглаживания можно регулировать в каждой точке, для этого в минимизируемом функционале (23) в каждое слагаемое нужно добавить соответствующие веса, что не приводит к каким-либо усложнениям при вычислениях.

3. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФОКАЛЬНОЙ ЗОНЫ

3.1. Данные для реализации алгоритма

Для численного решения задачи определения скоростного строения среды фокальной зоны ранее был разработан алгоритм и программный комплекс SEISMIC, протестированный на синтетических данных, полученных посредством решения прямой задачи распространения волнового фронта в средах с известной скоростной структурой.

Данными для предложенного здесь алгоритма с целью решения ОКЗС с внутренними источниками являются координаты гипоцентров землетрясений $P_i(x_i, y_i, z_i)$, $i \in I$, времена начала землетрясений и времена вступления продольной и поперечной волн, зафиксированные на различных сейсмоприёмниках на поверхности Земли, координаты которых $Q_j(x_j, y_j, z_j)$, $j \in J$, также известны. В данных содержится и ряд других измеренных или вычисленных величин, которые могут сыграть роль сравнительных характеристик, но для алгоритма SEISMIC являющихся избыточными.

Разность времён $\tau(P_i, Q_j)$ между началом землетрясений в гипоцентрах P_i и моментом прихода волн к приёмникам Q_j определяет дискретные значения годографа — функцию времени прохождения волн от источников к приёмникам. Эта функция для каждого Q_j задана своими значениями на конечном, хаотически расположенном множестве точек в фокальной зоне B , причём для разных приёмников Q_j наборы таких точек P_i , в которых определены значения $\tau(P_i, Q_j)$, вообще говоря, различны (см. рис. 1).

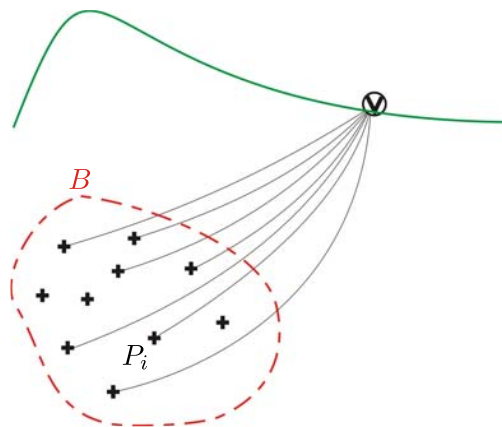


Рис. 1. Фокальная зона B . Приёмник на дневной поверхности. Источники землетрясений в области отмечены крестиками

Достаточный для адекватной работы алгоритма объём данных выбирается из некоторого временного интервала, характеризующегося отсутствием резких изменений сейсмической активности в регионе исследования. Этот «спокойный» интервал времени позволяет получить

результаты для оценки состояния среды в фокальной зоне в течение этого интервала. Исследование сейсмической активности в динамике может проводиться на основе анализа нескольких таких временных интервалов, а синтез этих результатов даёт основание для текущей оценки и прогнозирования поведения внутренних структур Земли.

3.2. Фокальная зона Камчатки

В районе вулканов Карымский и Академии наук 1 января 1996 произошло сильное землетрясение, которое привело к экологическим последствиям. В частности, бывшее пресным Карымское озеро заполнилось солёным раствором высокой концентрации. С целью проверить работу алгоритма при оценке влияния на состояние подземных структур сильных толчков это событие и было задано в качестве границы временных интервалов для выборки данных. Ниже, упоминая это землетрясение, мы будем именовать его Событие. Фокальная зона представляет собой регион в окрестности Карымского озера, где были зарегистрированы землетрясения в период с 1995 по 1997 годы.

Вычисления проводились в декартовой прямоугольной системе координат. Начало O системы координат расположено в точке на поверхности Земли (вблизи вулкана Карымский). Ось Oz направлена к центру Земли. Оси Ox и Oy расположены в плоскости, касательной в точке O к земной поверхности. Направления осей выбраны так, что плоскость Oyz ($x = 0$) проходит через эпицентр События, сильного землетрясения 01.01.1996 г., находящегося примерно в десяти километрах южнее начала координат, с направлением оси Oy на север. Ось Ox направлена к востоку. В этой системе координат линия А1–А2 определяет сечение $x = 0$ (см. рис. 2, б).

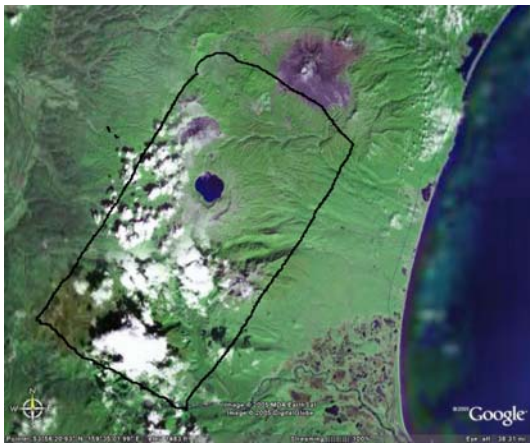
Расчёты проводились по данным с трёх станций, расположенных вне фокальной зоны на удалении порядка 100 км от эпицентра События. С помощью программы SEISMIC, алгоритм которой основан на описанных выше математических методах, построена 3D-модель скоростных характеристик фокальной зоны по данным о годографах P -волн и S -волн, зарегистрированных на каждой станции. Модель даёт возможность получать значения скоростей $v_p(x, y, z)$ и $v_s(x, y, z)$ уже в любой точке фокальной зоны. Следовательно, появляется возможность определить в каждой точке упругие характеристики пород такие, как отношение $\sqrt{\varkappa} = v_p/v_s$, коэффициент Пуассона $\sigma = \frac{\varkappa - 2}{2(\varkappa - 1)}$, модуль Юнга E , $\frac{E}{\rho} = \frac{v_s^2(3\varkappa - 1)}{\varkappa - 1}$, параметры Ламе λ и μ , $\frac{\mu}{\rho} = v_s^2$, $\frac{\lambda}{\rho} = \frac{\mu}{\rho}(\varkappa - 2)$ (подробнее см. (1), (2)). Значение плотности обычно определяется зависимостью от глубинного строения и некоторых эмпирических соображений. На больших глубинах без потери общности можно полагать $\rho = 3 \text{ т/м}^3$ и вычислять упругие коэффициенты в единицах такого значения ρ .

Поскольку источники зарегистрированных землетрясений располагаются на глубинах до 60 км, то фокальную зону по глубине естественно определять границами $0 \leq z \leq 60$ км. Нас интересовало состояние среды в сечении А1–А2 ($x = 0$) до и после События. Результаты расчётов иллюстрируются именно в этом сечении по латерали на глубинах 10, 15 и 50 км и по глубине вдоль прямых $x = y = 0$, $x = 0$, $y = -8$ и $x = 0$, $y = -40$ км.

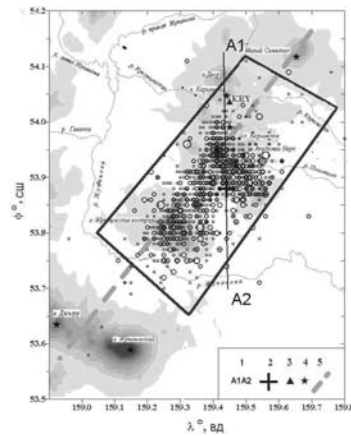
На рис. 2 изображена область в окрестности Карымского озера, вулканов Карымский и Академии наук (рис. 2, а) и линия А1–А2 вертикального сечения на поверхности (рис. 2, б), крестиком здесь отмечен эпицентр События, треугольниками — вулканы.

На рис. 2, в и г кружками изображён графический вывод программы SEISMIC одного из горизонтальных сечений и соответственно вертикального сечения функции скорости v_p вдоль А1–А2. Кружками отмечены проекции гипоцентров землетрясений на горизонтальную плоскость (в) и соответствующую вертикальную (г).

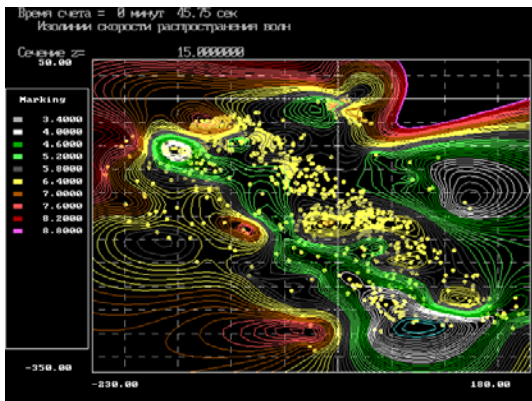
Всюду ниже, без дополнительных напоминаний, все вычисленные и приведённые на графиках величины являются усреднением по трём сейсмическим станциям. На рис. 3, а, рис. 5, а



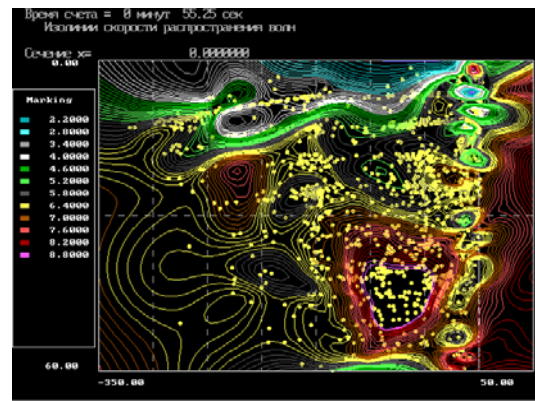
а



б



в



г

Рис. 2. Фокальная зона с эпицентрами землетрясений:

(а), (б) — дислокация фокальной зоны на карте; крестиком в (б) отмечен эпицентр События;
 (в) и (г) — графический вывод комплекса SEISMIC.

Проекция гипоцентров (кружки) на горизонтальную плоскость (в)
 и на вертикальное сечение А1–А2 (г)

приведены графики скоростей (в км/с) v_p (сплошная линия) и v_s (пунктирная линия) до События, а на рис. 3, б, рис. 5, б — графики тех же величин после События. На остальных рисунках из серии рис. 3–6 сплошной линией отмечены значения величин до События, пунктирной линией — после него.

Дополнительно графики маркированы следующим образом.

На рис. 3, 4 приведены графики величин в зависимости от y . Вдоль латералей, параллельных А1–А2, они отмечены соответственно: вдоль латералей на глубине 10 км — кружочками, на глубине 20 км — треугольниками и на глубине 50 км — звёздочками.

На рис. 5, 6 приведены графики величин в зависимости от z вдоль трёх вертикальных линий сечения А1–А2. Графики всех величин вдоль линии, проходящей через начало координат, отмечены кружочками, вдоль линии на удалении 8 км от начала координат ($x = 0, y = -8$) треугольниками и вдоль линии на удалении 40 км ($x = 0, y = -40$) звёздочками.

Таким образом, на рис. 3, а приведены шесть графиков скоростей v_p (три верхних) и v_s (три нижних) вдоль прямых линий, параллельных А1–А2, на указанных глубинах до События. На рис. 3, б приведены шесть графиков скоростей v_p (три верхних) и v_s (три нижних) вдоль

тех же прямых после События.

На рис. 3, в, г изображены графики значений отношения v_p/v_s и коэффициента Пуассона σ соответственно: вдоль линии $x = 0, z = 10$ (т. е. на глубине 10 км параллельно линии А1–А2), вдоль линии $x = 0, z = 20$ (т. е. на глубине 20 км) и вдоль линии $x = 0, z = 50$ (т. е. на глубине 50 км).

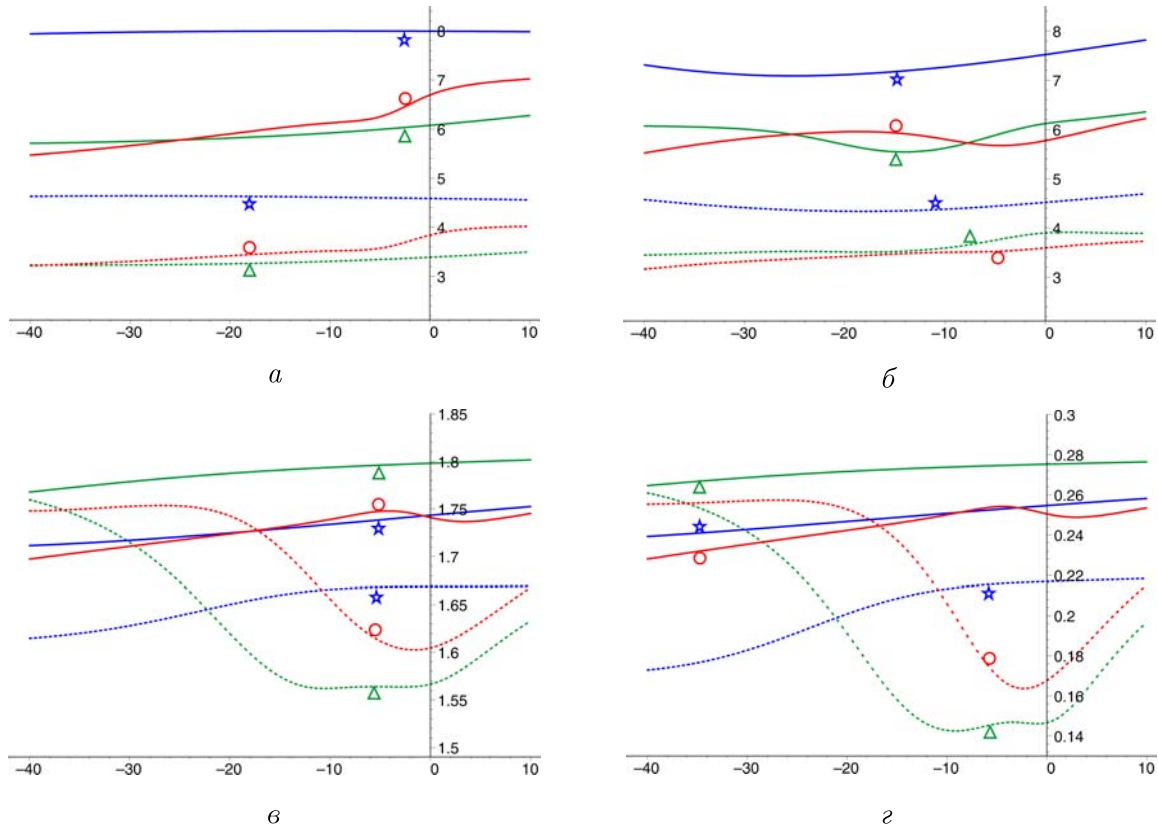


Рис. 3. Вдоль латералей параллельных А1–А2 на глубинах 10 км (кружочки), 20 км (треугольники), 50 км (звёздочки) приведены графики следующих величин:
 (а) скорости до События v_p (три верхних) и v_s (три нижних);
 (б) скорости после События v_p (три верхних) и v_s (три нижних);
 (в) отношение v_p/v_s до и после События;
 (г) коэффициент Пуассона σ до и после События

На рис. 4 представлены графики параметров Ламе: параметра λ (а) и параметра μ (б) вдоль латералей, параллельных А1–А2 на глубинах 10, 20 и 50 км. Плотность ρ меняется с глубиной. На характерных для фокальной зоны глубинах считается, что ρ имеет значение порядка 3, оно и использовалось при расчётах на всех глубинах. При наличии априорной информации о структуре грунтов несложно внести поправку. По оси абсцисс отложены расстояния (в км), по оси ординат — значения коэффициентов упругости (в ГПа).

Отметим, что отношение v_p/v_s и коэффициент Пуассона σ до События меняются незначительно на протяжении всего отрезка $[-40, 10]$ (сплошные линии на рис. 4). После События их значения на глубинах 10 и 20 км согласованно резко меняются вблизи отрезка $[-20, 5]$, который соответствует зоне эпицентра События и действующего вулкана Карымский. На интервалах $(-40, -20)$ и $(5, 10)$ и глубине 50 км указанные значения меняются незначительно.

Опишем поведение величин «по глубине». На рис. 5, 6 вдоль вертикальных линий $x = 0, y = 0$ (в районе вулкана Карымский), вдоль линии $x = 0, y = -8$ (в районе Карымского озера) и вдоль линии $x = 0, y = -40$ (на расстоянии 30 км от эпицентра События к югу) линии

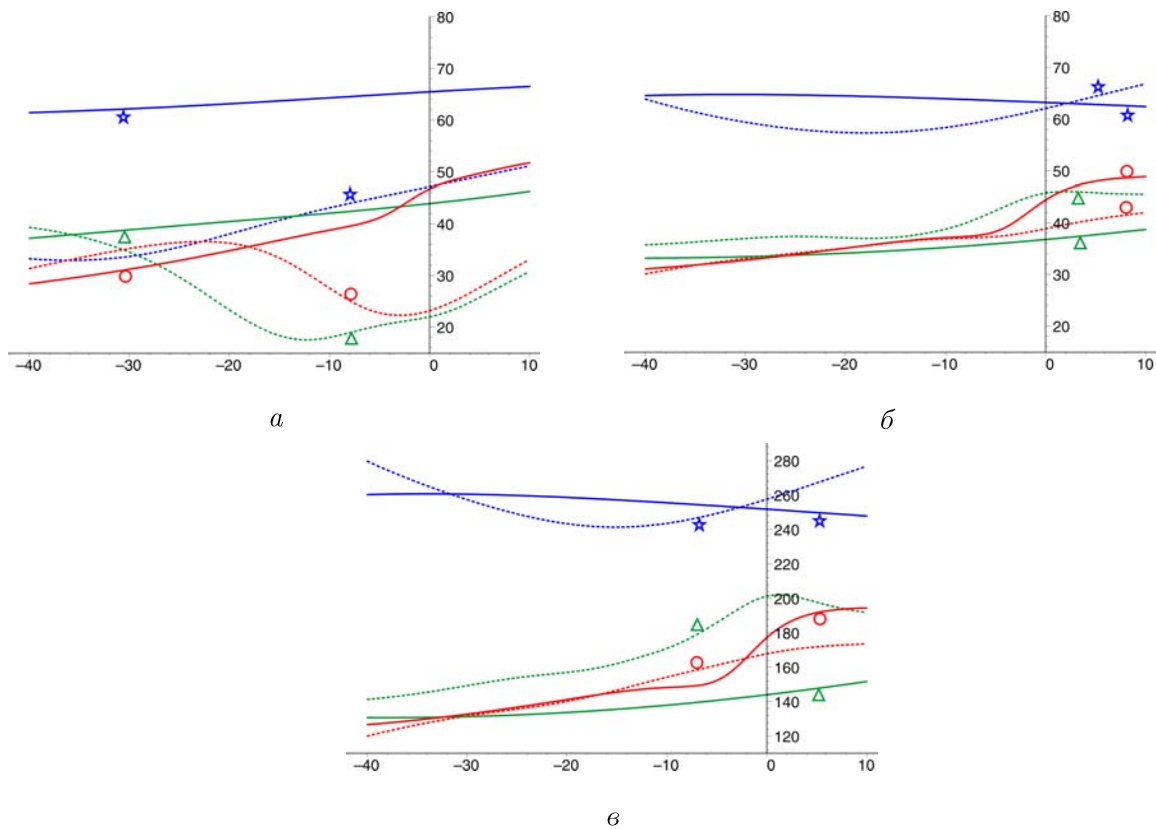


Рис. 4. По латералиям параллельно А1–А2 на глубинах 10, 20, 50 км (линии помечены кружочками, треугольниками и звёздочками соответственно) представлены графики величин:

- (а) параметр Ламе λ до и после События;
- (б) параметр Ламе μ до и после События;
- (в) модуль упругости E до и после События

отмечены кружочками, треугольниками и звёздочками соответственно.

На рис. 6, а и б приведены графики параметров Ламе, λ и μ соответственно, в зависимости от глубины: в начале координат (район вулкана Карымский $x = 0$, $y = 0$), на удалении от него вдоль вертикальной линии (в эпицентре главного толчка $x = 0$, $y = -8$) и на большом удалении от начала координат вдоль линии $x = 0$, $y = -40$ км. Плотность ρ меняется в соответствии с гипотезой о возрастании с глубиной. При отсутствии информации о плотности считаем её равной трём. По оси абсцисс отложены расстояния (в км), по оси ординат значения коэффициентов упругости (в ГПа).

Анализ расчётов показывает, что до События (рис. 5, а) функции меняются мало. На отметке 10 км по глубине наблюдаются согласованные всплески v_p и v_s как вблизи эпицентра События $y = -8$, так и вблизи вулкана Карымский (начало координат), а в целом с глубиной значения скоростей растут.

После События (рис. 5, б) функции v_p и v_s на линии $x = 0$, $y = 0$ и $x = 0$, $y = -8$ довольно согласованно сильно осциллируют, что сказывается на поведении графиков отношения v_p/v_s и коэффициента Пуассона σ , изображённых на рис. 5, в, г.

Аналогично ведут себя и функции λ и μ параметров Ламе, представленные графиками на рис. 5, а, б, и модуля Юнга, график которого изображён на рис. 6, в. Заметим, что до События по глубине они меняются мало. Лишь на отметке 10 км как вблизи эпицентра События $y = -8$, так и вблизи вулкана Карымский наблюдается всплеск. А на удалении (отметка $z = -40$)

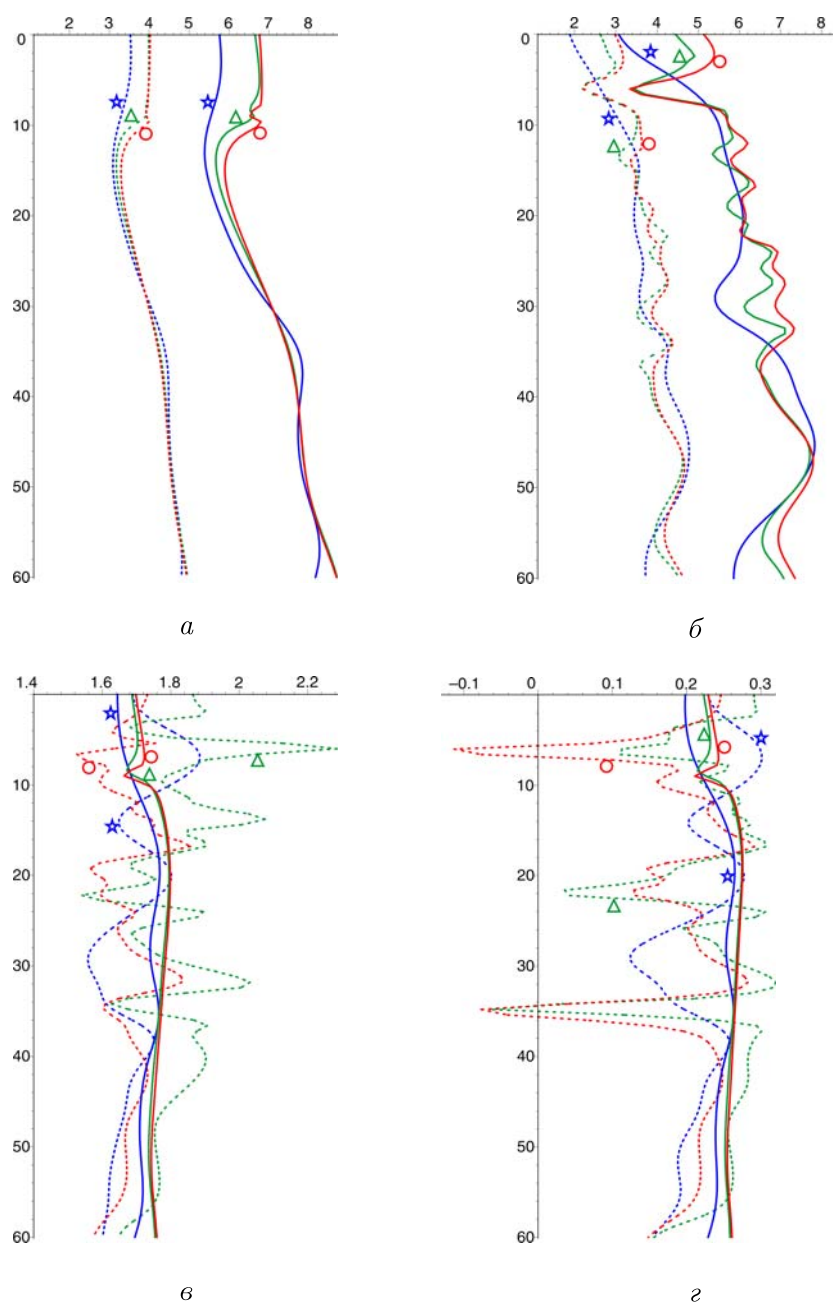


Рис. 5. По глубине (вертикальная ось) показаны значения величин (горизонтальная ось) вдоль трёх прямых, одна из которых проходит через вулкан Карымский (кружочки), вторая — через эпицентр, т. е. в 8 км к югу от начала координат (треугольники), и третья удалена на расстояние 40 км от начала координат (звёздочки):
 (а) скорости v_p (три правых линии) и v_s (три левых линии) до События;
 (б) скорости v_p (три правых линии) и v_s (три левых линии) после События;
 (в) отношение v_p/v_s до События и после;
 (г) коэффициент Пуассона σ до События и после

функции меняются довольно плавно. После События все функции сильно осциллируют вплоть до глубин 50 км.

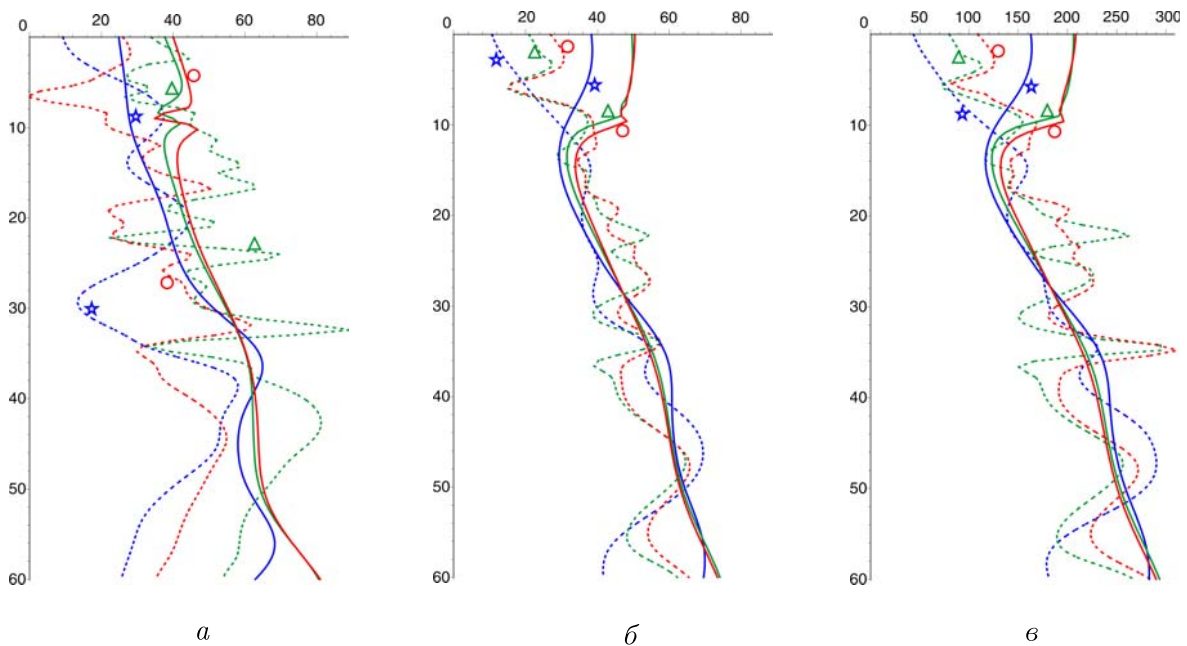


Рис. 6. По глубине (вертикальная ось) показаны значения величин вдоль трёх прямых, одна из которых проходит через вулкан Карымский (кружочки), вторая — через эпицентр, т. е. в 8 км к югу от начала координат (треугольники), и третья удалена на расстояние 40 км от начала координат (звёздочки):

- (а) параметр Ламе λ до и после События;
- (б) параметр Ламе μ до и после События;
- (в) модуль Юнга E до и после События

3.3. Фокальная зона Камчатки. Выводы

1. Поскольку скорости продольных и поперечных волн, вычисленные по данным каждой из трёх станций, имеют свои характерные особенности в некоторых областях фокальной зоны как в период до События, так и после него, то усреднение естественно проводить, предварительно вычислив все параметры по данным каждой станции.

2. На каждой станции сбор данных осуществляется независимо, поэтому множества источников для сбора данных по разным станциям зачастую не совпадают, однако скоростные характеристики фокальной зоны похожи, это говорит об адекватности математической постановки задачи и хорошем её решении.

3. Изменение скоростной картины по времени может дать основания для геофизической интерпретации динамики процессов в среде.

4. Отношение v_p/v_s находится в приемлемых для интерпретации упругих характеристик среды границах.

5. Имеются основания расширить постановку задачи аппроксимации с учётом ограничений на производные аппроксимационного многомерного сплайна.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Математические модели процессов, сред и объектов, когда по разным причинам возможно лишь их дистанционное исследование, строятся на основе доступных для измерений параметров. К таким моделям относится и ОКЗС с внутренними источниками. Регистрация сейсмоприёмниками времени событий, связанных с землетрясениями, позволяет в рамках таких моделей строить и проверять гипотезы о положении гипоцентров, картине распространения

фронтов продольных и поперечных волн, характеристиках глубинных структур таких, как коэффициент деформации Пуассона, модуль упругости Юнга, параметры Ламе.

Разработана технология сплайн-аппроксимации многомерных данных на нерегулярных сетках, позволяющая строить функции годографа с контролируемым сглаживанием дискретных зашумлённых данных о временах пробега упругих волн от гипоцентров землетрясений до сейсмоприёмников. Задача аппроксимации сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений с плотной матрицей значительной размерности. Для решения системы применены надёжные и быстрые методы с контролем обусловленности системы. Использование уравнения эйконала к построенной достаточно гладкой аппроксимации времён пробега даёт аппроксимации скоростей продольных и поперечных волн в фокальной зоне.

Представлены результаты численного эксперимента, проведённого на основе данных о землетрясениях, произошедших в исследуемой фокальной зоне в период с 1995 по 1998 гг. Расчёты показали, что представленная математическая модель распространения волновых фронтов оказалась чувствительной к сильному землетрясению (Событию) в районе Кроноцкого залива. Изменения скоростной структуры как вблизи эпицентра, так и на разном удалении от него, существенны как по глубине, так и по «горизонтали», но не выпадают из разумных рамок значений кинематических и упругих параметров. Такая чувствительность даёт основание считать, что рассмотренная модель может быть использована в прогностических целях.

Представляется, что перспективы дальнейших исследований задач, вытекающих из полученных результатов, выглядят многообещающе. С чисто математической точки зрения основной результат работы — построение, исходя из реальных данных, достаточно гладкой римановой области с двумя метриками, соответствующими скоростям продольных и поперечных волн. Приведены оценки упругих параметров среды, но не меньший интерес представляют и чисто геометрические величины и объекты такие, как геодезические линии, тензоры кривизны Римана — Кристоффеля, Риччи, скалярной кривизны, тензор Коттона и др.

В работе времена начала землетрясений и координаты гипоцентров считались известными, но было бы интересно осуществить процедуру уточнения данных на основе подходов, описанных в разд. 2. Представляется, что исследование предложенных там же функционалов поможет решить задачу экстраполяции фокальной зоны, в том числе и вплоть до дневной поверхности, в комбинации с аппаратом сейсмической томографии и априорных данных о скоростях волн в приповерхностной зоне. Перспективным выглядит включение в модель временной переменной с целью мониторинга в реальном времени состояния глубинных структур Земли, в том числе и с целью прогноза возможности сильных землетрясений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Herglotz G.* Über das Benndorfsche Problem der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Erdbebenstrahlen // *Zeitschr. Geophys.* 1907. V. 8. P. 145–147.
2. *Wiechert E.* Bestimmung des Weges der Erdbebenwelle an Erdinnern. L. Theoretisches // *Phys. Zeitschr.* 1910, V. 11. P. 294–304.
3. *Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
4. *Романов В. Г.* Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984.
5. *Гольдин С. В.* Геометрическая сейсмика. Новосибирск: Изд-во ИНГГ СО РАН, 2017.
6. *Нолет Г.* Сейсмическая томография. М.: Мир, 1990.
7. *Дьеласан Э., Руайе Д.* Упругие волны в твёрдых телах. М.: Наука, 1982.
8. *Андреев В. К.* Математические модели механики сплошных сред. СПб.: Лань, 2015.
9. *Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И.* Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980.
10. *Бутенин Н. В., Фуфаев Н. А.* Введение в аналитическую механику. М.: Наука, 1991.

11. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1986.
12. Гервер М. Л., Маркушевич В. М. Свойства годографа от поверхностного источника // Некоторые прямые и обратные задачи сейсмологии. М.: Наука, 1968. С. 15–63. (Вычислительная сейсмология; вып. 4).
13. Маркушевич В. М. Характеристические свойства годографа от глубинного источника // Некоторые прямые и обратные задачи сейсмологии. М.: Наука, 1968. С. 64–77. (Вычислительная сейсмология; вып. 4).
14. Аниконов Ю. Е. Об одной задаче определения римановой метрики // Докл. АН СССР. 1972. Т. 204, № 6. С. 1287–1288.
15. Аниконов Ю. Е. Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1978.
16. Белинский П. П. О непрерывности пространственных квазиконформных отображений и теорема Лиувилля // Докл. АН СССР. 1962. Т. 147, № 5. С. 1003–1004.
17. Решетняк Ю. Г. Об устойчивости в теории Лиувилля о конформных отображениях пространства // Докл. АН СССР. 1963. Т. 152, № 2. С. 286–287.
18. Погорелов А. В. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М.: Наука, 1969.
19. Аниконов Ю. Е., Пивоварова Н. Б., Славина Л. Б. Трёхмерное поле скоростей фокальной зоны Камчатки // Математические проблемы геофизики. Новосибирск: изд. ВЦ СО АН СССР. 1974. Вып. 5, Ч. 1. С. 92–117.
20. Кабанник А. В., Орлов Ю. А., Чеверда В. А. Численное решение задачи линейной сейсмической томографии на проходящих волнах: случай неполных данных // Сиб. журн. индустр. математики. 2004. Том 7, № 2(18). С. 54–67.
21. Wendland H. Scattered Data Approximation. Cambridge: Cambridge Univ. Press. 2005.
22. Роженко А. И. Теория и алгоритмы вариационной сплайн-аппроксимации. Новосибирск: изд. ИВМиМГ СО РАН, 2005.
23. Игнатов М. И., Певный А. Б. Натуральные сплайны многих переменных. Л.: Наука, 1991.
24. Schaback R. Native Hilbert Spaces for Radial Basis Functions. I. New Developments in Approximation Theory. Basel: Birkhauser, 1999. P. 255–282.
25. Роженко А. И. Сравнение радиальных базисных функций // Сиб. журн. вычисл. математики. 2018. Т. 21, № 3. С. 273–292.
26. Волков Ю. С., Мирошниченко В. Л. Построение математической модели универсальной характеристики радиально-осевой гидротурбины // Сиб. журн. индустр. математики. 1998. Т. 1, № 1. С. 77–88.
27. Anikonov Yu. E., Bogdanov V. V., Derevtsov E. Yu., Miroshnichenko V. L., Pivovarova N. B., Slavina L. B. Some approaches to a numerical solution for the multidimensional inverse kinematic problem of seismics with inner sources // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2009. V. 17, N 3. P. 209–238.
28. Bogdanov V. V., Karsten W. V., Miroshnichenko V. L., Volkov Yu. S. Application of splines for determining the velocity characteristic of a medium from a vertical seismic survey // Central European J. Math. 2013. V. 11, N 4. P. 779–786.
29. Роженко А. И., Шайдоров Т. С. О построении сплайнов методом воспроизводящих ядер // Сиб. журн. вычисл. математики. 2013. Т. 16. № 4. С. 365–376.
30. Aasen J. O. On the reduction of a symmetric matrix to tridiagonal form // BIT. 1971. V. 11, N 3. P. 233–242.

UDC 517.98:519.677

**ON THE DETERMINATION OF THE VELOCITY AND ELASTIC
PARAMETERS OF THE FOCAL ZONE MEDIUM
FROM THE EARTHQUAKE HODOGRAPHS**

© 2021 Yu. E. Anikonov^a, V. V. Bogdanov^b, Yu. S. Volkov^c,
E. Yu. Derevtsov^d

*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
pr. Acad. Koptyuga 4, Novosibirsk 630090, Russia*

E-mails: ^aanikon@math.nsc.ru, ^bbogdanov@math.nsc.ru, ^cvolkov@math.nsc.ru,
^ddert@math.nsc.ru

Received 25.05.2021, revised 09.07.2021, accepted 21.10.2021

Abstract. We consider an inverse kinematic problem of seismic (IKPS) with internal sources. It consists in determining the velocities of longitudinal and transverse waves by the travel times from earthquake sources, occurring in the focal zone, to a group of seismic stations. We propose an algorithm for the numerical solution to the problem, based on the eikonal equation and the technology of smoothing multidimensional splines, which give an approximation of the velocity structure of the focal zone. The paper presents theoretical results that substantiate the algorithm for solving the problem by approximation methods by smoothing with multidimensional splines from data on irregular grids. We describe the results of the numerical solution to the problem, the calculations with real data on earthquakes in the focal zone, and give the estimates of the velocity and elastic parameters of the medium.

Keywords: kinematic problem of seismic, internal sources, inverse problems, eikonal equation, interpolation, approximation, splines.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.401

REFERENCES

1. Herglotz G. Über das Benndorfsche Problem der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Erdbebenstrahlen. *Zeitschr. Geophys.*, 1907, Vol. 8, No. 5, pp. 145–147.
2. Wiechert E. Bestimmung des Weges der Erdbebenwelleh on Erdinnern. L. Theoretisches. *Phys. Zeitschr.*, 1910, Vol. 11, pp. 294–304.
3. Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., Shishatskii S.P. Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis. Providence: Amer. Math. Soc., 1986.
4. Romanov V.G. Inverse Problems of Mathematical Physics. Utrecht: VNU Sci. Press, 1987.
5. Gol'din S.V. Geometricheskaya seismika [Geometrical seismic]. Novosibirsk: izd-vo INGG SO RAN, 2017 (in Russian).
6. Nolet G. Seismic Tomography. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1987.
7. D'elasan E., Ruaie D. Elastic Waves in Solids. Berlin: Springer-Verl., 1996.
8. Andreev V.K. Matematichesie modeli mekhaniki sploshnykh sred [Mathematical models of continuum mechanics]. St. Petersburg: Lan', 2015 (in Russian).
9. Kravtsov Yu.A., Orlov Yu.I. Geometrical optics of inhomogeneous media. Wave phenomena. Berlin: Springer-Verl., 1990.

10. Butenin N.V., Fufaev N.A. Vvedenie v analiticheskuyu mekhaniku [Introduction to Analytical Mechanics]. Moscow: Nauka, 1991 (in Russian).
11. Dubrovin B.A., Novikov S.P., Fomenko A.T. Sovremennaya geometriya [Modern geometry]. Moscow: Nauka, 1986 (in Russian).
12. Gerger M.L., Markushevich V.M. Svoistva godografa ot poverkhnostnogo istochnika. Nekotorye pryamyie i obratnye zadachi seismologii [Properties of the hodograph from a surface source. Some direct and inverse problems of seismology]. *Comput. Seismology*, 1968, No. 4, pp. 15–63 (in Russian).
13. Markushevich V.M. Kharakteristicheskie svoistva godografa ot glubinnogo istochnika. Nekotorye pryamyie i obratnye zadachi seismologii [Characteristic properties of the hodograph from a deep source. Some direct and inverse problems of seismology]. *Comput. Seismology*, 1968, No. 4, pp. 64–77 (in Russian).
14. Anikonov Yu.E. Ob odnoi zadache opredeleniya rimanovoi metriki [On one problem of determining the Riemannian metric]. *Dokl. Acad. Sci. USSR*, 1972, Vol. 204, No. 6, pp. 1287–1288 (in Russian).
15. Anikonov Yu.E. Nekotoryye metody issledovaniya mnogomernykh obratnykh zadach dlya differentsial'nykh uravneniy [Some methods for investigating multivariate inverse problems for differential equations]. Novosibirsk: Nauka, 1978 (in Russian).
16. Belinskii P.P. On continuity of spatial quasiconformal mappings and Liouville's theorem. *Dokl. Acad. Sci. USSR*, 1962, Vol. 147, No. 5, pp. 1003–1004 (in Russian).
17. Reshetnyak Yu.G. Ob ustoychivosti v teorii Liuvillya o konformnykh otobrazheniyakh prostranstva [On stability in Liouville's theory of conformal mappings of space]. *Dokl. Acad. Sci. USSR*, 1963, Vol. 152, No. 2, pp. 286–287 (in Russian).
18. Pogorelov A.V. Vneshnyaya geometriya vypuklykh poverkhnostei [External geometry of convex surfaces]. Moscow: Nauka, 1969 (in Russian).
19. Anikonov Yu. E., Pivovarova N. B., Slavina L. B. Three-dimensional velocity field of the focal zone of Kamchatka, *Mathematical problems of geophysics*. Novosibirsk: Comput. Center SB USSR Acad. Sci., 1974, No. 5, Part 1, pp. 92–117 (in Russian).
20. Kabannik A.V., Orlov Yu.A., Cheverda V.A. Numerical solution of the problem of linear seismic tomography on transmitted waves: the case of incomplete data. *Sib. Zhurn. Industr. Math.*, 2004, Vol. 7, No. 2, pp. 54–67.
21. Wendland H. Scattered Data Approximation. Cambridge: Univ. Press. 2005.
22. Rozhenko A.I. Theory and algorithms of variational spline approximation. Novosibirsk: ICM&MG SB RAS, 2005 (in Russian).
23. Ignatov M.I., Pevnyi A.B. Natural'nye splainy mnogikh peremennykh [Natural splines of many variables]. Leningrad: Nauka, 1991 (in Russian).
24. Schaback R. Native Hilbert Spaces for Radial Basis Functions. I. New Developments in Approximation Theory. Basel: Birkhauser, 1999, pp. 255–282.
25. Rozhenko A.I. Comparison of radial basis functions. *Numer. Analysis Appl.*, 2018, Vol. 11, No. 3, pp. 220–235.
26. Volkov Yu.S., Miroshnichenko V.L. Construction of a mathematical model of the universal characteristic of a radial-axial hydraulic turbine. *Sib. Zhurn. Industr. Math.*, 1998, Vol. 1, No. 1, pp. 77–88.
27. Anikonov Yu.E., Bogdanov V.V., Derevtsov E.Yu., Miroshnichenko V.L., Pivovarova N.B., Slavina L.B. Some approaches to a numerical solution for the multidimensional inverse kinematic problem of seismics with inner sources. *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 2009, Vol. 17, No. 3, pp. 209–238.
28. Bogdanov V.V., Karsten W.V., Miroshnichenko V.L., Volkov Yu.S. Application of splines for determining the velocity characteristic of a medium from a vertical seismic survey. *Central European J. Math.*, 2013, Vol. 11, No. 4, pp. 779–786.
29. Rozhenko A.I., Shaidorov T.S. On spline approximation with a reproducing kernel method. *Numer. Analysis Appl.*, 2013, Vol. 6, No. 4, pp. 314–323.
30. Aasen J.O. On the reduction of a symmetric matrix to tridiagonal form. *BIT*, 1971, Vol. 11, No. 3, pp. 233–242.