УДК 517.956.6

РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В ПЯТИУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

© 2021 Ю. П. Апаков[1,2a], С. М. Мамажонов[1b]

[1] *Институт математики им. В. И. Романовского, г. Ташкент 100170, Узбекистан;*
[2] *Наманганский инженерно-строительный институт,*
ул. Ислама Каримова, 12, Наманган 160103, Узбекистан,

E-mails: [a]yusupjonapakov@gmail.com, [b]sanjarbekmamajonov@gmail.com

Поступила в редакцию 22.06.2021 г.; после доработки 18.08.2021 г.;
принята к публикации 21.10.2021 г.

Ставятся корректные краевые задачи для уравнения четвёртого порядка параболо-гиперболического типа в пятиугольной области. Доказывается однозначная разрешимость поставленной задачи методами непосредственного построения решения.

Ключевые слова: дифференциальные и интегральные уравнения, метод построения решения, краевая задача, уравнения параболо-гиперболического типа, однозначная разрешимость.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.402

ВВЕДЕНИЕ

Во второй половине прошлого столетия интенсивно развивалось исследование неклассических уравнений математической физики, в частности уравнений смешанного, составного и смешанно-составного типов. Одной из основных причин этого процесса является обнаружение прикладных применений краевых задач, поставленных для таких уравнений. Первоначально изучались смешанные уравнения второго порядка эллиптико-гиперболического типа. Фундаментальные исследования по таким уравнениям проведены в 1920-е годы итальянским математиком Ф. Трикоми [1] и развиты С. Геллерстедтом [2], А. В. Бицадзе [3], К. И. Бабенко [4], И. Л. Каролем [5], Ф. И. Франклем [6], М. М. Смирновым [7], М. С. Салахитдиновым [8] и др. Затем понятие уравнений смешанного типа значительно расширилось и включает всевозможные комбинации двух или трёх классических типов уравнений. Интенсивное исследование уравнений смешанного эллиптико-параболического и параболо-гиперболического типов обусловлено тем, что, с одной стороны, новые типы смешанных уравнений ещё мало исследованы в теоретическом плане, с другой — они находят широкое применение в важных вопросах механики, физики и техники.

На необходимость рассмотрения задач сопряжения, когда на одной части области задано параболическое уравнение, на другой — гиперболическое, было указано в 1959 году И. М. Гельфандом [9]. Он приводит пример, связанный с движением газа в канале, окружённом пористой средой: в канале движение газа описывается волновым уравнением, вне его — уравнением диффузии.

Одной из первых работ, посвящённых изучению краевых задач для параболо-гиперболических уравнений, явилась работа Г. М. Стручиной [10]. Затем Я. С. Уфлянд задачу распространения электрических колебаний в составных линиях, когда на участке полубесконечной линии пренебрегается потерями, а остальная часть линии рассматривается как кабель без утечки, свёл к решению краевых задач для параболо-гиперболических уравнений [11] (см. также [12]).

Некоторые задачи на сопряжения уравнений параболического и гиперболического типов изучены в работах [13, 14].

О. А. Ладыженская и Л. Ступялис [15] в многомерном пространстве рассмотрели начально-краевые задачи на сопряжения эллиптических, гиперболических и параболических уравнений, которые возникают при изучении задачи о движении проводящей жидкости в электромагнитном поле.

Отметим также работу [16], где совместно-раздельные течения вязкоупругой и вязкой жидкостей сводятся к изучению краевой задачи для параболо-гиперболического уравнения. В работе [17] исследована задача Трикоми для параболо-гиперболического уравнения в трёхмерном пространстве. Затем в 70–80 годах двадцатого века начаты исследования по уравнениям третьего и высокого порядков параболо-гиперболического типа. Краевые задачи для таких уравнений поставлены и изучены впервые Т. Д. Джураевым [18] и его учениками [19].

За прошедшее время исследования по краевым задачам для уравнений третьего и высокого порядков параболо-гиперболического типа развивались в широком плане, а в настоящее время они расширяются по направлениям усложнения уравнений и областей их рассмотрения, а также обобщения рассматриваемых для них задач (см., например, [20–23] и др.).

В настоящей работе рассматриваются новые корректные краевые задачи для параболо-гиперболического уравнения четвёртого порядка в нестандартной пятиугольной области, где один из трёх рассматриваемых областей является нехарактеристическим четырёхугольником для гиперболического уравнения. Доказывается однозначная разрешимость задачи при $1 < \gamma_1 < +\infty$, $1 < \gamma_2 < +\infty$, где $\gamma_i = b_i/a_i,\ i = 1, 2,\ k = a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для уравнения четвёртого порядка параболо-гиперболического типа вида

$$\left(a_1\frac{\partial}{\partial x} + b_1\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(a_2\frac{\partial}{\partial x} + b_2\frac{\partial}{\partial y}\right)(Lu) = 0 \tag{1}$$

ставится краевая задача в пятиугольной области G плоскости xOy, где $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup J_1 \cup J_2$; $a_1, b_1, a_2, b_2 \in R$, $a_i^2 + b_i^2 \neq 0$, $i = 1, 2$, $k = a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$; G_1 — прямоугольник с вершинами в точках $A(0,0)$, $B(0,1)$, $B_0(1,1)$, $A_0(0,1)$; G_2 — треугольник с вершинами в точках B, $C(0,-1)$, $D(-1,0)$; G_3 — прямоугольник с вершинами в точках A, D, $D_0(-1,1)$, A_0; J_1 — открытый отрезок с вершинами в точках B, D; J_2 — открытый отрезок с вершинами в точках A, A_0;

$$Lu = \begin{cases} u_{xx} - u_y, & (x,y) \in G_1, \\ u_{xx} - u_{yy}, & (x,y) \in G_i, \quad i = 2, 3. \end{cases}$$

Задача. Найти функцию $u(x,y)$, которая:

1) непрерывна в $\overline{G}$ и в области $G \setminus J_1 \setminus J_2$ имеет непрерывные производные, участвующие в уравнении (1), причём u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} непрерывны в G вплоть до части границы области G, указанной в краевых условиях;

2) удовлетворяет уравнению (1) в области $G \setminus J_1 \setminus J_2$;

3) удовлетворяет краевым условиям

$$u(1, y) = \varphi_1(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \tag{2}$$
$$u(-1, y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \tag{3}$$
$$u_x(-1, y) = \varphi_3(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \tag{4}$$
$$u_{xx}(-1, y) = \varphi_4(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \tag{5}$$
$$u|_{BC} = \psi_1(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{6}$$
$$u|_{DF} = \psi_2(x), \quad -1 \leqslant x \leqslant -1/2, \tag{7}$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{BC} = \psi_3(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{8}$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{DC} = \psi_4(x), \quad -1 \leqslant x \leqslant 0, \tag{9}$$
$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\right|_{BC} = \psi_5(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{10}$$
$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\right|_{DC} = \psi_6(x), \quad -1 \leqslant x \leqslant 0, \tag{11}$$

и условиям склеивания на линиях изменения типа

$$u(x, +0) = u(x, -0) = T(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1; \tag{12}$$
$$u_y(x, +0) = u_y(x, -0) = N(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1; \tag{13}$$
$$u_{yy}(x, +0) = u_{yy}(x, -0) = M(x), \quad x \in (-1, 0) \cup (0, 1); \tag{14}$$
$$u_{yyy}(x, +0) = u_{yyy}(x, -0) = \Theta(x), \quad x \in (-1, 0) \cup (0, 1); \tag{15}$$
$$u(+0, y) = u(-0, y) = \tau_3(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1; \tag{16}$$
$$u_x(+0, y) = u_x(-0, y) = \nu_3(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1; \tag{17}$$
$$u_{xx}(+0, y) = u_{xx}(-0, y) = \mu_3(y), \quad 0 < y < 1; \tag{18}$$
$$u_{xxx}(+0, y) = u_{xxx}(-0, y) = \theta_3(y), \quad 0 < y < 1, \tag{19}$$

где

$$T(x) = \begin{cases} \tau_1(x), & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \tau_2(x), & -1 \leqslant x \leqslant 0; \end{cases} \qquad N(x) = \begin{cases} \nu_1(x), & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \nu_2(x), & -1 \leqslant x \leqslant 0; \end{cases}$$
$$M(x) = \begin{cases} \mu_1(x), & 0 < x < 1, \\ \mu_2(x), & -1 < x < 0; \end{cases} \qquad \Theta(x) = \begin{cases} \theta_1(x), & 0 < x < 1, \\ \theta_2(x), & -1 < x < 0, \end{cases}$$

φ_i, $i = \overline{1,4}$, ψ_j, $j = \overline{1,6}$, — заданные достаточно гладкие функции; τ_i, ν_i, μ_i, θ_i, $i = \overline{1,3}$, — неизвестные пока, достаточно гладкие функции; n — внутренняя нормаль к прямой $x+y = -1$ или $x - y = 1$, а $F(-1/2, -1/2)$.

Теорема. *Если* $\varphi_1, \varphi_2 \in C^4[0,1]$, $\varphi_3 \in C^3[0,1]$, $\varphi_4 \in C^2[0,1]$, $\psi_1 \in C^4[0,1]$, $\psi_2 \in C^4[-1,-1/2]$, $\psi_3 \in C^3[0,1]$, $\psi_4 \in C^3[-1,0]$, $\psi_5 \in C^2[0,1]$, $\psi_6 \in C^2[-1,0]$, *причём выполняются условия согласования* $\varphi_2(0) = \psi_2(-1)$, $\varphi_1(0) = \psi_1(1)$, $\psi'_4(0) = -\psi'_3(0)$, *то задача имеет единственное решение.*

Доказательство. Теорему докажем методом непосредственного построения решения. Используя обратный оператор $\left(a_2\dfrac{\partial}{\partial x}+b_2\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^{-1}\left(a_1\dfrac{\partial}{\partial x}+b_1\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^{-1}$ из уравнения (1), получим

$$u_{1xx}-u_{1y}=\omega_{11}(b_1x-a_1y)+\omega_{12}(b_2x-a_2y),\quad (x,y)\in G_1, \tag{20}$$

$$u_{jxx}-u_{jyy}=\omega_{j1}(b_1x-a_1y)+\omega_{j2}(b_2x-a_2y),\quad (x,y)\in G_j\quad j=2,3, \tag{21}$$

где введено обозначение $u_j(x,y)=u(x,y)$, $(x,y)\in G_j$, $j=\overline{1,3}$, причём $\omega_{j1}(b_1x-a_1y)$, $\omega_{j2}(b_2x-a_2y)$, $j=\overline{1,3}$, — неизвестные пока, достаточно гладкие функции, подлежащие определению.

Исследование будем проводить сначала в области G_2. Решение уравнения (21) при $j=2$, удовлетворяющее условиям (12), (13), представляется в виде

$$u_2(x,y)=\frac{1}{2}[T(x+y)+T(x-y)] \\ +\frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}N(t)\,dt-\frac{1}{2}\int\limits_0^y d\eta\int\limits_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}[\omega_{21}(b_1\xi-a_1\eta)+\omega_{22}(b_2\xi-a_2\eta)]\,d\xi. \tag{22}$$

Подставляя (22) в условия (8) и (9), после упрощений имеем

$$\omega_{21}((b_1-a_1)x+a_1)+\omega_{22}((b_2-a_2)x+a_2)=-\sqrt{2}\psi'_3(x),\quad 0\leqslant x\leqslant 1, \tag{23}$$

$$\omega_{21}((b_1+a_1)x+a_1)+\omega_{22}((b_2+a_2)x+a_2)=\sqrt{2}\psi'_4(x),\quad -1\leqslant x\leqslant 0. \tag{24}$$

Из этих равенств следует $\psi'_4(0)=-\psi'_3(0)$.

Теперь подставляя (21) в условия (10) и (11), после некоторых выкладок находим

$$\frac{b_1}{b_1-a_1}\omega_{21}((b_1-a_1)x+a_1)+\frac{b_2}{b_2-a_2}\omega_{22}((b_2-a_2)x+a_2)=\psi_5(x) \\ +\frac{b_1}{b_1-a_1}\omega_{21}(b_1)+\frac{b_2}{b_2-a_2}\omega_{22}(b_2)-T''(-1)+N'(-1),\quad 0\leqslant x\leqslant 1, \tag{25}$$

$$\frac{b_1}{b_1+a_1}\omega_{21}((b_1+a_1)x+a_1)+\frac{b_2}{b_2+a_2}\omega_{22}((b_2+a_2)x+a_2)=\psi_6(x) \\ +\frac{b_1}{b_1+a_1}\omega_{21}(b_1)+\frac{b_2}{b_2+a_2}\omega_{22}(b_2)-T''(-1)-N'(-1),\quad -1\leqslant x\leqslant 0. \tag{26}$$

Решая системы (23), (25) и (24), (26), после некоторых вычислений и преобразований находим

$$\omega_{21}(b_1x-a_1y)+\omega_{22}(b_2x-a_2y)=\frac{\sqrt{2}}{k}\left[b_2(b_1-a_1)\psi'_3\left(\frac{b_1x-a_1y-a_1}{b_1-a_1}\right)\right. \\ \left.-b_1(b_2-a_2)\psi'_3\left(\frac{b_2x-a_2y-a_2}{b_2-a_2}\right)\right]+\frac{(b_1-a_1)(b_2-a_2)}{k}\left[\psi_5\left(\frac{b_1x-a_1y-a_1}{b_1-a_1}\right)\right. \\ \left.-\psi_5\left(\frac{b_2x-a_2y-a_2}{b_2-a_2}\right)\right],\quad a_i\leqslant b_ix-a_iy\leqslant b_i,\quad i=1,2; \tag{27}$$

$$\omega_{21}(b_1x-a_1y)+\omega_{22}(b_2x-a_2y)=\frac{\sqrt{2}}{k}\bigg[b_2(b_1+a_1){\psi'}_4\bigg(\frac{b_1x-a_1y-a_1}{b_1+a_1}\bigg)$$
$$-b_1(b_2+a_2){\psi'}_3\bigg(\frac{b_2x-a_2y-a_2}{b_2+a_2}\bigg)\bigg]-\frac{(b_1+a_1)(b_2+a_2)}{k}\bigg[\psi_6\bigg(\frac{b_1x-a_1y-a_1}{b_1+a_1}\bigg)$$
$$-\psi_6\bigg(\frac{b_2x-a_2y-a_2}{b_2+a_2}\bigg)\bigg],\quad -b_i\leqslant b_ix-a_iy\leqslant a_i,\quad i=1,2. \tag{28}$$

Подставляя (22) в (6) и (7), имеем следующие соотношения между неизвестными функциями $T(x)$ и $N(x)$:

$$T'(x)+N(x)=\alpha_1(x),\quad -1\leqslant x\leqslant 1, \tag{29}$$
$${\tau'}_2(x)-\nu_2(x)=\delta_1(x),\quad -1\leqslant x\leqslant 0, \tag{30}$$

где $\alpha_1(x)$ и $\delta_1(x)$ — известные функции.

а) При $-1\leqslant x\leqslant 0$ уравнение (29) имеет вид

$${\tau'}_2(x)+\nu_2(x)=\alpha_1(x),\quad -1\leqslant x\leqslant 0. \tag{31}$$

Из (30) и (31) находим функции ${\tau'}_2(x)$ и $\nu_2(x)$:

$${\tau'}_2(x)=[\alpha_1(x)+\delta_1(x)]/2,\quad \nu_2(x)=[\alpha_1(x)-\delta_1(x)]/2. \tag{32}$$

Интегрируя первое из равенств (32) от -1 до x, находим

$$\tau_2(x)=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{x}[\alpha_1(t)+\delta_1(t)]\,dt+\psi_2(-1). \tag{33}$$

б) При $0\leqslant x\leqslant 1$ из (29) имеем

$${\tau'}_1(x)+\nu_1(x)=\alpha_1(x),\quad 0\leqslant x\leqslant 1. \tag{34}$$

Переходя в уравнении (21) при $j=2$ к пределу при $y\to -0$, в силу (12) и (14) получим соотношение между неизвестными функциями $\tau_1(x)$ и $\mu_1(x)$:

$${\tau''}_1(x)-\mu_1(x)=\omega_{21}(b_1x)+\omega_{22}(b_2x). \tag{35}$$

Дифференцируя уравнение (21) ($j=2$) по y и переходя в полученном уравнении к пределу при $y\to -0$ в силу (13) и (15) при $0\leqslant x\leqslant 1$, получим соотношение между неизвестными функциями $\nu_1(x)$ и $\theta_1(x)$:

$${\nu''}_1(x)-\theta_1(x)=-a_1{\omega'}_{21}(b_1x)-a_2{\omega'}_{22}(b_2x). \tag{36}$$

Далее, уравнение (20) можно переписать в виде

$$a_1a_2u_{1xxxx}+a_1b_2u_{1xxxy}+a_2b_1u_{1xxxy}+b_1b_2u_{1xxyy}-a_1a_2u_{1xxy}$$
$$-a_1b_2u_{1xyy}-a_2b_1u_{1xyy}-b_1b_2u_{1yyy}=0.$$

Переходя в последнем уравнении к пределу при $y\to +0$, получим ещё одно соотношение между неизвестными функциями $\tau_1(x)$, $\nu_1(x)$, $\mu_1(x)$ и $\theta_1(x)$:

$$a_1a_2\tau_1^{(4)}(x)+(a_1b_2+a_2b_1){\nu'''}_1(x)+b_1b_2{\mu''}_1(x)$$
$$-a_1a_2{\nu''}_1(x)-(a_1b_2+a_2b_1){\mu'}_1(x)-b_1b_2\theta_1(x)=0. \tag{37}$$

Исключая из (34)–(37) функции $\nu_1(x)$, $\mu_1(x)$ и $\theta_1(x)$, затем интегрируя полученное уравнение трижды от 0 до x, имеем

$$\tau'_1(x) + \tau_1(x) = \alpha_2(x) + k_1\frac{x^2}{2} + k_2x + k_3, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

где $\alpha_2(x)$ — известная функция, а k_1, k_2, k_3 — неизвестные пока постоянные.

Решая последнее уравнение при условиях

$$\tau_1(0) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0}[\alpha_1(t) + \delta_1(t)]dt + \psi_2(-1), \quad \tau'_1(0) = \frac{1}{2}[\alpha_1(0) + \delta_1(0)],$$

$$\tau_1(1) = \psi_1(1), \quad \tau'_1(1) = \frac{1}{2}\,\psi'_1(1) - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\psi_3(1),$$

находим функцию $\tau_1(x)$:

$$\tau_1(x) = \int_0^x e^{t-x}\alpha_2(t)\,dt + k_1\left(\frac{x^2}{2} - x + 1 - e^{-x}\right) + k_2(x - 1 + e^{-x}) + k_3(1 - e^{-x}) + k_4e^{-x},$$

где

$$k_4 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0}[\alpha_1(t) + \delta_1(t)]\,dt + \psi_2(-1),$$

$$k_3 = \frac{1}{2}[\alpha_1(0) + \delta_1(0)] - \alpha_2(0) + k_4,$$

$$k_1 = \frac{2}{e-3}\left[(e-1)\psi_1(1) - \frac{1}{2}\psi'_1(1) + \frac{\sqrt{2}}{2}\psi_3(1) + \alpha_2(1) - k_3(e-2) - k_4 - \int_0^1 e^t\alpha_2(t)\,dt\right],$$

$$k_2 = \psi_1(1) + [\psi'_1(1) - \sqrt{2}\psi_3(1)]/2 - \alpha_2(1) - k_3 - k_1/2.$$

Тогда будут известными и функции $\nu_1(x)$, $\mu_1(x)$, $u_2(x,y)$.

Переходя в уравнениях (21) при $j = 2$ и (21) при $j = 3$ к пределу при $y \to -0$ и $y \to +0$ соответственно, с учётом условий (12), (14) получим

$$\omega_{31}(b_1x) + \omega_{32}(b_2x) = \omega_{21}(b_1x) + \omega_{22}(b_2x), \quad -1 \leqslant x \leqslant 0. \tag{38}$$

Применяя оператор $a_2\dfrac{\partial}{\partial x} + b_2\dfrac{\partial}{\partial y}$ к уравнениям (21) при $j = 2$ и (21) при $j = 3$ и переходя в полученных уравнениях к пределу при $y \to -0$ и $y \to +0$ соответственно, имеем

$$(a_2b_1 - a_1b_2)\omega'_{31}(b_1x) = (a_2b_1 - a_1b_2)\omega'_{21}(b_1x).$$

Интегрируя это равенство от 0 до x, находим

$$\omega_{31}(b_1x) = \omega_{21}(b_1x) - \omega_{21}(0) + \omega_{31}(0).$$

Подставляя это равенство в (38), получим

$$\omega_{32}(b_2x) = \omega_{22}(b_2x) + \omega_{21}(0) - \omega_{31}(0).$$

В первом из последних двух равенствах производя замену b_1x на b_1x-a_1y, а во втором — b_2x на b_2x-a_2y и складывая их, имеем

$$\begin{gathered}\omega_{31}(b_1x-a_1y)+\omega_{32}(b_2x-a_2y)=\omega_{21}(b_1x-a_1y)+\omega_{22}(b_2x-a_2y),\\ -b_1\leqslant b_1x-a_1y\leqslant 0, -b_2\leqslant b_2x-a_2y\leqslant 0.\end{gathered}$$

Теперь переходим к рассмотрению задачи в области G_3. Рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$\begin{gathered}u_{3xx}-u_{3yy}=\Omega_{31}(b_1x-a_1y)+\Omega_{32}(b_2x-a_2y),\quad (x,y)\in G_3,\\ u_3(x,0)=T_2(x),\quad u_{3y}(x,0)=N_2(x),\quad -2\leqslant x\leqslant 1,\\ u_3(-1,y)=\varphi_2(y),\quad u_{3x}(-1,y)=\varphi_3(y),\\ u_{3xx}(-1,y)=\varphi_4(y),\quad u_3(0,y)=\tau_3(y),\quad 0\leqslant y\leqslant 1.\end{gathered}\tag{39}$$

Решение задачи (39), удовлетворяющее всем условиям этой задачи, за исключением условий $u_{3x}(-1,y)=\varphi_3(y)$, $u_{3xx}(-1,y)=\varphi_4(y)$, будем искать в виде

$$u_3(x,y)=u_{31}(x,y)+u_{32}(x,y)+u_{33}(x,y)+u_{34}(x,y),\tag{40}$$

где $u_{31}(x,y)$ — решение задачи

$$\begin{gathered}u_{31xx}-u_{31yy}=0,\\ u_{31}(x,0)=T_2(x),\quad u_{31y}(x,0)=0,\quad -2\leqslant x\leqslant 1,\\ u_{31}(-1,y)=\varphi_2(y),\quad u_{31}(0,y)=\tau_3(y),\quad 0\leqslant y\leqslant 1;\end{gathered}\tag{41}$$

$u_{32}(x,y)$ — решение задачи

$$\begin{gathered}u_{32xx}-u_{32yy}=0,\\ u_{32}(x,0)=0,\quad u_{32y}(x,0)=N_2(x),\quad -2\leqslant x\leqslant 1,\\ u_{32}(-1,y)=0,\quad u_{32}(0,y)=0,\quad 0\leqslant y\leqslant 1;\end{gathered}\tag{42}$$

$u_{33}(x,y)$ — решение задачи

$$\begin{gathered}u_{33xx}-u_{33yy}=\Omega_{31}(b_1x-a_1y),\\ u_{33}(x,0)=0, u_{33y}(x,0)=0,\quad -2\leqslant x\leqslant 1,\\ u_{33}(-1,y)=0, u_{33}(0,y)=0,\quad 0\leqslant y\leqslant 1;\end{gathered}\tag{43}$$

$u_{34}(x,y)$ — решение задачи

$$\begin{gathered}u_{34xx}-u_{34yy}=\Omega_{32}(b_2x-a_2y),\\ u_{34}(x,0)=0,\quad u_{34y}(x,0)=0,\quad -2\leqslant x\leqslant 1,\\ u_{34}(-1,y)=0,\quad u_{34}(0,y)=0,\quad 0\leqslant y\leqslant 1,\end{gathered}\tag{44}$$

где функции $T_2(x)$, $N_2(x)$, $\Omega_{3j}(b_jx-a_jy)$, $j=1,2$, определяются следующим образом: в промежутке $-1\leqslant x\leqslant 0$ имеют значения $T_2(x)=\tau_2(x)$, $N_2(x)=\nu_2(x)$, а вне этого интервала они неизвестны; аналогично, в промежутках $-b_1\leqslant b_1x-a_1y\leqslant 0$, $-b_2\leqslant b_2x-a_2y\leqslant 0$ определяются функции $\Omega_{31}(b_1x-a_1y)=\omega_{31}(b_1x-a_1y)$, $\Omega_{32}(b_2x-a_2y)=\omega_{31}(b_2x-a_2y)$, а вне этих промежутках они неизвестны.

Методом продолжения находим решения задач (41)–(44). Они имеют вид

$$u_{31}(x,y)=\frac{1}{2}[T_2(x+y)+T_2(x-y)], \tag{45}$$

$$u_{32}(x,y)=\frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}N_2(t)\,dt, \tag{46}$$

$$u_{33}(x,y)=-\frac{1}{2}\int\limits_0^y d\eta\int\limits_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}\Omega_{31}(b_1\xi-a_1\eta)\,d\xi, \tag{47}$$

$$u_{34}(x,y)=-\frac{1}{2}\int\limits_0^y d\eta\int\limits_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}\Omega_{32}(b_2\xi-a_2\eta)\,d\xi, \tag{48}$$

где

$$T_2(x)=\begin{cases}2\varphi_2(-1-x)-\tau_2(-2-x), & -2\leqslant x\leqslant -1,\\ \tau_2(x), & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ 2\tau_3(x)-\tau_2(-x), & 0\leqslant x\leqslant 1;\end{cases}\qquad N_2(x)=\begin{cases}-\nu_2(-2-x), & -2\leqslant x\leqslant -1,\\ \nu_2(x), & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ -\nu_2(-x), & 0\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$$

а функции $\Omega_{31}(b_1x-a_1y)$, $\Omega_{32}(b_2x-a_2y)$ вне промежутков

$$-b_1\leqslant b_1x-a_1y\leqslant 0,\quad -b_2\leqslant b_2x-a_2y\leqslant 0$$

определяются следующим образом.

Функция (46) удовлетворяет первым двум условиям задачи (43). Удовлетворяя третьему условию, после некоторых преобразований получим

$$\Omega_{31}(b_1(-1-y))=\frac{2a_1^2}{b_1(b_1+a_1)}\Omega_{31}(-b_1-a_1y)-\frac{b_1-a_1}{b_1+a_1}\omega_{31}(b_1(y-1)). \tag{49}$$

Удовлетворяя четвёртому условию, после некоторых выкладок находим

$$\Omega_{31}(b_1y)=\frac{2a_1^2}{b_1(b_1-a_1)}\omega_{31}(-a_1y)-\frac{b_1+a_1}{b_1-a_1}\omega_{31}(-b_1y). \tag{50}$$

Функция (48) удовлетворяет первым двум условиям задачи (44). Удовлетворяя третьему условию, после некоторых выкладок имеем

$$\Omega_{32}(b_2(-1-y))=\frac{2a_2^2}{b_2(b_2+a_2)}\Omega_{32}(-b_2-a_2y)-\frac{b_2-a_2}{b_2+a_2}\omega_{32}(b_2(y-1)). \tag{51}$$

Далее, удовлетворяя четвёртому условию задачи (44), после некоторых преобразований находим

$$\Omega_{32}(b_2y)=\frac{2a_2^2}{b_2(b_2-a_2)}\omega_{32}(-a_2y)-\frac{b_2+a_2}{b_2-a_2}\omega_{32}(-b_2y). \tag{52}$$

Подставляя (45)–(48) в (40), получим

$$u_3(x,y)=\frac{1}{2}[T_2(x+y)+T_2(x-y)]+\frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}N_2(t)\,dt$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^y d\eta\int\limits_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}\Omega_{31}(b_1\xi-a_1\eta)\,d\xi-\frac{1}{2}\int\limits_0^y d\eta\int\limits_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}\Omega_{32}(b_2\xi-a_2\eta)\,d\xi. \tag{53}$$

Дифференцируя (53) по x и переходя к пределу при $x \to -1$, после некоторых вычислений находим

$$\frac{a_1}{b_1+a_1}\Omega_{31}(-b_1-a_1y)+\frac{a_2}{b_2+a_2}\Omega_{32}(-b_2-a_2y)={\tau''}_2(y-1)-{\varphi''}_2(y)$$
$$+{\nu'}_2(y-1)-{\varphi'}_3(y)-\frac{b_1}{b_1+a_1}\omega_{31}(b_1(y-1))-\frac{b_2}{b_2+a_2}\omega_{32}(b_2(y-1)). \quad (54)$$

Дифференцируя (53) по x дважды и полагая $x \to -1$, в силу условия (5) имеем

$$\frac{b_1^2}{b_1^2-a_1^2}\Omega_{31}(-b_1-a_1y)-\frac{b_1}{2(b_1-a_1)}\Omega_{31}(b_1(-1-y))+\frac{b_2^2}{b_2^2-a_2^2}\Omega_{32}(-b_2-a_2y)$$
$$-\frac{b_2}{2(b_2-a_2)}\Omega_{32}(b_2(-1-y))=\varphi_4(y)-{\varphi''}_2(y)+\frac{b_1}{2(b_1+a_1)}\omega_{31}(b_1(y-1))$$
$$+\frac{b_2}{2(b_2+a_2)}\omega_{32}(b_2(y-1)). \quad (55)$$

Исключая из (49), (51), (54), (55) функции $\Omega_{31}(b_1(-1-y))$ и $\Omega_{32}(b_2(-1-y))$, находим

$$\Omega_{32}(-b_2-a_2y)=\frac{1}{p}\Big\{\varphi_4(y)-{\varphi''}_2(y)-\frac{b_1+a_1}{a_1}\big[{\tau''}_2(y-1)-{\varphi''}_2(y)+{\nu'}_2(y-1)-{\varphi'}_3(y)\big]$$
$$+q\omega_{31}(b_1(y-1))+s\omega_{32}(b_2(y-1))\Big\}, \quad (56)$$

где p, q, s — известные постоянные. Тогда функции

$$\Omega_{32}(b_2(-1-y)), \quad \Omega_{31}(-b_1-a_1y), \quad \Omega_{31}(b_1(-1-y))$$

определяются по формулам (51), (54) и (55) соответственно.

Дифференцируя (53) по x и полагая в полученном равенстве $x \to -0$, получим первое соотношение между неизвестными функциями $\tau_3(y)$ и $\nu_3(y)$:

$$\nu_3(y)={\tau'}_3(y)+\beta_1(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \quad (57)$$

где $\beta_1(y)$ — известная функция.

Теперь переходим в область G_1. Переходя в уравнении (20) к пределу при $y \to +0$ в силу условий (12) и (13) при $0 \leqslant x \leqslant 1$, находим

$$\overline{\overline{\omega}}_{11}(b_1x)+\overline{\overline{\omega}}_{12}(b_2x)={\tau''}_1(x)-\nu_1(x), \quad (58)$$

где введены обозначения

$$\omega_{11}(b_1x-a_1y)=\begin{cases}\overline{\overline{\omega}}_{11}(b_1x-a_1y), & 0 \leqslant b_1x-a_1y \leqslant b_1,\\ \overline{\omega}_{11}(b_1x-a_1y), & -b_1 \leqslant b_1x-a_1y \leqslant 0,\end{cases}$$
$$\omega_{12}(b_2x-a_2y)=\begin{cases}\overline{\overline{\omega}}_{12}(b_2x-a_2y), & 0 \leqslant b_2x-a_2y \leqslant b_2,\\ \overline{\omega}_{12}(b_2x-a_2y), & -a_2 \leqslant b_2x-a_2y \leqslant 0,\end{cases}$$

причём $\overline{\overline{\omega}}_{11}(0)=\overline{\omega}_{11}(0)$, $\overline{\overline{\omega}}_{12}(0)=\overline{\omega}_{12}(0)$.

Далее, применяя оператор $a_2\dfrac{\partial}{\partial x}+b_2\dfrac{\partial}{\partial y}$ к уравнению (20) и переходя в полученном уравнении к пределу при $y \to +0$, после некоторых преобразований и вычислений находим

$$\overline{\overline{\omega}}_{11}(b_1x)=\gamma_1(x)+\overline{\overline{\omega}}_{11}(0), \quad (59)$$

где $\gamma_1(x)$ — известная функция.

Подставляя последнее равенство в (58), получим

$$\overline{\overline{\omega}}_{12}(b_2x) = \gamma_2(x) - \overline{\overline{\omega}}_{11}(0), \tag{60}$$

где $\gamma_2(x) = \tau''{}_1(x) - \nu_1(x) - \gamma_1(x)$.

Переходя в уравнениях (20) и (21) при $j = 3$ к пределу при $x \to +0$ и $x \to -0$ соответственно, в силу условий (16) и (18) находим

$$\mu_3(y) - \tau'{}_3(y) = \overline{\omega}_{11}(-a_1y) + \overline{\omega}_{12}(-a_2y),$$
$$\mu_3(y) - \tau''{}_3(y) = \omega_{31}(-a_1y) + \omega_{32}(-a_2y).$$

Исключая из этих последних двух соотношений функцию $\mu_3(y)$, после некоторых выкладок получим

$$\overline{\omega}_{11}(-a_1y) + \overline{\omega}_{12}(-a_2y) = [\tau''{}_3(y) - \tau'{}_3(y)] + \omega_{31}(-y) + \omega_{32}(-a_2y). \tag{61}$$

Применяя оператор $a_2\dfrac{\partial}{\partial x} + b_2\dfrac{\partial}{\partial y}$ к уравнениям (20) и (21) при $j = 3$ и переходя в полученных уравнениях к пределу при $x \to +0$ и $x \to -0$ соответственно, получим

$$a_2\theta_3(y) - a_2\nu''{}_3(y) + b_2\mu'{}_3(y) - b_2\tau'''{}_3(y) = -k\omega'{}_{31}(-a_1y),$$
$$a_2\theta_3(y) - a_2\nu'{}_3(y) + b_2\mu'{}_3(y) - b_2\tau''{}_3(y) = -k\bar{\omega}'{}_{11}(-a_1y).$$

Исключая из этих уравнений функцию $\theta_3(y)$ и интегрируя полученное соотношение от 0 до y, находим

$$\overline{\omega}_{11}(-a_1y) = -\frac{a_1a_2}{k}[\nu'{}_3(y) - \nu_3(y)] - \frac{a_1b_2}{k}[\tau''{}_3(y) - \tau'{}_3(y)] + \gamma_3(y) + \overline{\overline{\omega}}_{11}(0), \tag{62}$$

где $\gamma_3(y)$ — известная функция.

Подставляя (62) в (61), получим

$$\overline{\omega}_{12}(-a_2y) = \frac{a_1a_2}{k}[\nu'{}_3(y) - \nu_3(y)] + \frac{a_1b_2 + k}{k}[\tau''{}_3(y) - \tau'{}_3(y)] + \gamma_4(y) - \overline{\overline{\omega}}_{11}(0), \tag{63}$$

где $\gamma_4(y)$ — известная функция.

Записываем решение уравнения (20), удовлетворяющее условиям (2), (12) при $0 \leqslant x \leqslant 1$ и (16). Оно представляется в виде

$$u_1(x,y) = \int\limits_0^y \tau_3(\eta)G_\xi(x,y;0,\eta)\,d\eta - \int\limits_0^y \varphi_1(\eta)G_\xi(x,y;1,\eta)\,d\eta$$
$$+ \int\limits_0^1 \tau_1(\xi)G(x,y;\xi,0)\,d\xi - \int\limits_0^y d\eta \int\limits_0^{\frac{a_1}{b_1}\eta} \overline{\omega}_{11}(b_1\xi - a_1\eta)G(x,y;\eta - z,\eta)\,d\xi$$
$$- \int\limits_0^y d\eta \int\limits_0^{\frac{a_2}{b_2}\eta} \overline{\omega}_{12}(b_2\xi - a_2\eta)G(x,y;\xi,\eta)\,d\xi - \int\limits_0^y d\eta \int\limits_{\frac{a_1}{b_1}\eta}^1 \overline{\overline{\omega}}_{11}(b_1\xi - a_1\eta)G(x,y;\xi,\eta)\,d\xi$$
$$- \int\limits_0^y d\eta \int\limits_{\frac{a_2}{b_2}\eta}^1 \overline{\overline{\omega}}_{12}(b_2\xi - a_2\eta)G(x,y;\xi,\eta)\,d\xi,$$

где $G(x, y; \xi, \eta)$ — функции Грина первой краевой задачи для уравнения теплопроводности.

Дифференцируя это решение по x и полагая $x \to +0$, после некоторых вычислений получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно ${\tau'}_3(y)$:

$$ {\tau'}_3(y) + \int\limits_0^y K(y, \eta){\tau'}_3(\eta)d\eta = g(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \tag{65} $$

где $K(y, \eta)$, $g(y)$ — известные функции, причём $K(y, \eta)$ имеет слабую особенность (порядка 1/2), $g(y)$ — непрерывная функция.

Решая уравнение (65), находим функцию ${\tau'}_3(y)$, тем самым и функции $\tau_3(y)$, $\nu_3(y)$, $\omega_{11}(x - y)$, $\omega_{12}(b_2x - a_2y)$, $T_2(x)$. Тогда будут известными и функции $u_3(x, y)$ и $u_1(x, y)$. Итак, мы нашли решение поставленной задачи единственным образом. $\square$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены новые корректные краевые задачи для параболо-гиперболического уравнения четвертого порядка в нестандартной пятиугольной области, состоящей из верхнего прямоугольника и нижнего треугольника. В прямоугольной области уравнение является параболо-гиперболическим, прямая $x = 0$ — линия изменения типа уравнения. В нижнем треугольнике уравнение принадлежит гиперболическому типу. При построении решения в прямоугольной области для гиперболического уравнения использован метод продолжения данных, когда гиперболическая часть верхнего прямоугольника продолжается до характеристического треугольника. Это позволяет получить представление решения задачи Коши. Дифференцируя это представление по x и устремляя $x \to -0$, получим соотношение между неизвестными функциями $\tau_3(y)$ и $\nu_3(y)$, где $\tau_3(y) = u(0, y)$, $\nu_3(y) = u_x(0, y)$. В параболической части прямоугольной области записано представление решения через известную функцию Грина первой краевой задачи. Дифференцируя это решение по x и устремляя $x \to +0$, получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно $\tau_3'(y)$. Однозначная разрешимость этого уравнения следует из теории интегральных уравнений. Решая данное интегральное уравнение, находим след решения $\tau_3(y)$ и тем самым доказываем однозначную разрешимость поставленной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Трикоми Ф.* О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа. М.-Л.: Гостехиздат, 1947.
2. *Gellerstedt S.* Sur un probleme aux limites pour une equation lineaire aux derivees partielles du second ordre de type mixte: Thes. pour le doctorat. Uppsala, 1935.
3. *Бицадзе А. В.* Уравнения смешанного типа // Итоги науки. 1959. Т. 2. С. 143.
4. *Бабенко К. И.* К теории уравнений смешанного типа: Дис. докт. физ.-мат. наук. М., 1952.
5. *Кароль И. Л.* Об одной краевой задаче для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа // Докл. АН СССР. 1953. Т. 88, № 2. С. 197–200.
6. *Франкль Ф. И.* О задачах Чаплыгина для смешанных до- и сверхзвуковых течений // Изв. АН СССР. 1945. Т. 9, № 2. С. 126–142.
7. *Смирнов М. М.* Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1970.
8. *Салахитдинов М. С.* Уравнения смешанно-составного типа. Ташкент: Фан, 1974.
9. *Гельфанд И. М.* Некоторые вопросы анализа и дифференциальных ураванений // Успехи мат. наук. 1959. Т. 14, № 3(87). С. 3–19.
10. *Стручина Г. М.* Задача о сопряжении двух уравнений // Инж.-физ. журн. 1961. Т. 4, № 11. С. 99–104.

11. *Уфлянд Я. С.* К вопросу о распространении колебаний в составных электрических линиях // Инж.-физ. журн. 1964. Т. 7, № 1. С. 89–92.
12. *Лозановская И. Т., Уфлянд Я. С.* Об одном классе задач математической физики со смешанным спектром собственных значений // Докл. АН СССР. 1965. Т. 164, № 5. С. 1005–1007.
13. *Гайдук С. И., Иванов А. В.* Об одной задаче на сопряжение уравнений параболического и гиперболического типов // Докл. АН БССР. 1964. Т. 8, № 9. С. 560–563.
14. *Гайдук С. И.* Применение метода контурного интеграла к решению одной задачи на сопряжение уравнений параболического и гиперболического типов // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1, № 10. С. 1366–1382.
15. *Ладыженская О. А., Ступялис Л.* Об уравнениях смешанного типа // Вестн. ЛГУ. 1965. Т. 19, № 4. С. 38–46.
16. *Акилов Ж. А.* Нестационарные движения вязкоупругих жидкостей. Ташкент: Фан, 1982.
17. *Апаков Ю. П.* Трёхмерный аналог задачи Трикоми для параболо-гиперболического уравнения // Сиб. журн. индустр. математики. 2011. Т. 14, № 2(46). С. 34–44.
18. *Джураев Т. Д.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: Фан, 1979.
19. *Джураев Т. Д., Сопуев А., Мамажанов М.* Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Ташкент: Фан, 1986.
20. *Джураев Т. Д., Мамажанов М.* Краевые задачи для одного класса уравнений четвёртого порядка смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 1. С. 25–31.
21. *Джураев Т. Д., Сопуев А.* К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвёртого порядка. Ташкент: Фан, 2000.
22. *Тахиров Ж. О.* Краевые задачи для смешанного параболо-гиперболического уравнения с известной и неизвестной линиями раздела. Ташкент: Фан, 1988.
23. *Бердышев А. С.* Краевые задачи и их спектральные свойства для уравнения смешанного параболо-гиперболического и смешанно-составного типов. Алматы: Изд-во КазНПУ им. Абая, 2015.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 517.956.6

SOLVABILITY OF ONE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A FOURTH-ORDER EQUATION OF PARABOLA-HYPERBOLIC TYPE IN A PENTAGONAL DOMAIN

© 2021 **Yu. P. Apakov** [1,2a], **S. M. Mamajonov**[1b]

[1] *Romanovsky Institute of Mathematics, Tashkent, 100170, Uzbekistan;*
[2] *Namangan Civil Engineering Institute,*
ul. Islam Karimov 12, Namangan 160103, Uzbekistan

E-mails: [a]yusupjonapakov@gmail.com, [b]sanjarbekmamajonov@gmail.com

Received 22.06.2021, revised 18.08.2021, accepted 21.10.2021

Abstract. Correct boundary value problems for the equation of the fourth order of parabolic-hyperbolic type in the pentagonal area are set. The unambiguous resolvability of the objective is proved by methods of direct creation of the decision.

Keywords: differential and integral equations, method of creation of the decision, boundary value problem, parabolic-hyperbolic equations, unambiguous resolvability.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.402

REFERENCES

1. Trikomi F. O lineinykh uravneniyakh v chastnykh proizvodnykh vtorogo poryadka smeshannogo tipa [On linear second-order partial differential equations of mixed type]. Moscow-Leningrad: Gostekhizdat, 1947.
2. Gellerstedt S. Sur un probleme aux limites pour une equation lineaire aux derivees partielles du second ordre de type mixte: Thes. pour le doctorat. Uppsala, 1935.
3. Bitsadze A.V. Uravneniya smeshannogo tipa [Mixed type equations]. *Itogi nauki* [Results of Science], 1959, Vol. 2, pp. 143 (in Russian).
4. Babenko K.I. K teorii uravnenii smeshannogo tipa [To theory of equations of mixed type]: Diss. dokt. fiz.-mat. nauk. Moscow, 1952 (in Russian).
5. Karol' I.L. Ob odnoi kraevoi zadache dlya uravneniya smeshannogo elliptiko-giperbolicheskogo tipa [On a boundary value problem for an equation of mixed elliptic-hyperbolic type]. *Dokl. Acad. Sci. USSR*, 1953, Vol. 88, No. 2, pp. 197–200 (in Russian).
6. Frankl' F.I. O zadachakh Chaplygina dlya smeshannykh do- i sverkhzvukovykh techenii [On Chaplygin's problems for mixed sub- and supersonic flows]. *Izv. Acad. Sci. USSR*, 1945, Vol. 9, No. 2, pp. 126–142 (in Russian).
7. Smirnov M. M. Uravneniya smeshannogo tipa [Mixed type equations]. M.: Nauka, 1970 (in Russian).
8. Salakhitdinov M. S. Uravneniya smeshanno-sostavnogo tipa [Mixed-compound equations]. Tashkent: Fan, 1974 (in Russian).
9. Gel'fand I. M. Nekotorye voprosy analiza i differentsial'nykh uravanenii [Some questions of analysis and differential equations]. *Suc. Math. Sci.*, 1959, Vol. 14, No. 3(87), pp. 3–19 (in Russian).
10. Struchina G. M. Zadacha o sopryazhenii dvukh uravnenii [The problem of conjugation of two equations]. *Engin.-Phys. Zhurn.*, 1961, Vol. 4, No. 11, pp. 99–104 (in Russian).

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2021, Vol. 15, No. 4.

11. Uflyand Ya.S. K voprosu o rasprostranenii kolebanii v sostavnykh elektricheskikh liniyakh [On the question of the propagation of oscillations in composite electric lines]. *Engin.-Phys. Zhurn.*, 1964, Vol. 7, No. 1, pp. 89–92 (in Russian).

12. Lozanovskaya I.T., Uflyand Ya.S. Ob odnom klasse zadach matematicheskoi fiziki so smeshannym spektrom sobstvennykh znachenii [On a class of problems in mathematical physics with a mixed spectrum of eigenvalues]. *Dokl. Acad. Sci. USSR*, 1965, Vol. 164, No. 5, pp. 1005–1007 (in Russian).

13. Gaiduk S.I., Ivanov A.V. Ob odnoi zadache na sopryazhenie uravnenii parabolicheskogo i giperbolicheskogo tipov [On a problem on the conjugation of equations of parabolic and hyperbolic types]. *Dokl. Acad. Sci. BSSR*, 1964, Vol. 8, No. 9, pp. 560–563 (in Russian).

14. Gaiduk S.I. Primenenie metoda konturnogo integrala k resheniyu odnoi zadachi na sopryazhenie uravnenii parabolicheskogo i giperbolicheskogo tipov [Application of the contour integral method to solving one problem of conjugation of equations of parabolic and hyperbolic types]. *Differenc. Uravn.* [Diff. Equ.], 1965, Vol. 1, No. 10, pp. 1366–1382 (in Russian).

15. Ladyzhenskaya O.A., Stupyalis L. Ob uravneniyakh smeshannogo tipa [On equations of mixed type]. *Vestn. Leningrad State Univ.*, 1965, Vol. 19, No. 4, pp. 38–46 (in Russian).

16. Akilov Zh.A. Nestatsionarnye dvizheniya vyazkouprugikh zhidkostei [Unsteady motions of viscoelastic fluids]. Tashkent: Fan, 1982 (in Russian).

17. Apakov Yu.P. Trekhmernyi analog zadachi Trikomi dlya parabolo-giperbolicheskogo uravneniya [A three-dimensional analogue of the Tricomi problem for a parabolic-hyperbolic equation]. *Sib. Zhurn. Industr. Math.*, 2011, Vol. 14, No. 2(46), pp. 34–44 (in Russian).

18. Dzhuraev T.D. Kraevye zadachi dlya uravnenii smeshannogo i smeshanno-sostavnogo tipov [Boundary value problems for equations of mixed and mixed-composite types]. Tashkent: Fan, 1979 (in Russian).

19. Dzhuraev T.D., Sopuev A., Mamazhanov M. Kraevye zadachi dlya uravnenii parabolo-giperbolicheskogo tipa [Boundary value problems for equations of parabolic-hyperbolic type]. Tashkent: Fan, 1986 (in Russian).

20. Dzhuraev T.D., Mamazhanov M. Kraevye zadachi dlya odnogo klassa uravnenii chetvertogo poryadka smeshannogo tipa [Boundary value problems for equations of parabolic-hyperbolic type]. *Differenc. Uravn.* [Diff. Equ.], 1986, Vol. 22, No. 1, pp. 25–31 (in Russian).

21. Dzhuraev T.D., Sopuev A. K teorii differentsial'nykh uravnenii v chastnykh proizvodnykh chetvertogo poryadka [To the theory of partial differential equations of the fourth order]. Tashkent: Fan, 2000 (in Russian).

22. Takhirov Zh.O. Kraevye zadachi dlya smeshannogo parabolo-giperbolicheskogo uravneniya s izvestnoi i neizvestnoi liniyami razdela [Boundary value problems for a mixed parabolic-hyperbolic equation with known and unknown dividing lines]. Tashkent: Fan, 1988 (in Russian).

23. Berdyshev A.S. Kraevye zadachi i ikh spektral'nye svoistva dlya uravneniya smeshannogo parabolo-giperbolicheskogo i smeshanno-sostavnogo tipov [Boundary value problems and their spectral properties for an equation of mixed parabolic-hyperbolic and mixed-composite types]. Almaty: Abay KazNPU Publ. House, 2015 (in Russian).