УДК 517.946

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ПЕРЕОПРЕДЕЛЁННОЙ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ ТИПА СТОКСА В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

© 2021 Х. Х. Имомназаров[1a], Ш. Х. Имомназаров[1,2a], М. В. Урев[1b], Р. Х. Бахрамов[3c]

[1]*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, просп. Акад. Лаврентьева, 6, г. Новосибирск 630090, Россия,*
[2]*Институт геологии и минералогии СО РАН, просп. Акад. Коптюга, 3, г. Новосибирск 630090, Россия,*
[3]*Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Вузгородок, г. Ташкент 100174, Узбекистан*

E-mails: [a]imom@omzg.sscc.ru , [b]urev@nmsf.sscc.ru , [c]baxramov88.r@mail.ru

Поступила в редакцию 25.02.2021 г.; после доработки 09.08.2021 г.;
принята к публикации 21.10.2021 г.

Рассмотрено классическое решение в полупространстве второй краевой задачи для переопределённой стационарной системы типа Стокса, возникающей в двухжидкостной среде с одним давлением. Получено решение с использованием преобразования Фурье по горизонтальным переменным. Показано влияние кинетических параметров среды на решение системы.

Ключевые слова: двухжидкостная среда, несжимаемая жидкость, переопределённая система, уравнение Пуассона, неоднородная задача, преобразование Фурье, классическое решение.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.404

Присутствие в верхних слоях мантийной литосферы частичных расплавов играет важную роль в геологических и геофизических процессах. В работе [1] локализация в пространстве значительных масс частичного расплава в динамических условиях объяснялась на основе предположения о формировании такой субстанции в процессе развития неустойчивости фронта фазового перехода при необратимой передаче импульса. При этом эффекты объёмной генерации магмы не учитывались. Методология учёта объёмной генерация магмы в условиях сдвиговой деформации мантийных толщ была предложена в [2]. В этих работах порода (в геологическом временном масштабе) представляет собой вязкую жидкость-1, которая за счёт собственной вязкости либо по другим причинам достигает термодинамических условий, необходимых для протекания фазового перехода. По границам зёрен и межзеренным узлам породы начинает скапливаться магма — жидкость-2 с вязкостью, присущей известным в геологии расплавам. Такой расплав включается в процесс совместного тепломассопереноса и фильтруется сквозь среду, его породившую. Другими словами, эта теория представляет собой гидродинамику тепломассопереноса взаимного проникновения одной менее вязкой жидкости сквозь более вязкую среду как своеобразный процесс фильтрации. Полученную систему уравнений, по аналогии с уравнением Навье — Стокса, можно называть двухскоростными уравнениями Навье — Стокса или уравнениями двухскоростной гидродинамики.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Национального центра научных исследований Франции в рамках научного проекта № 21-51-15002.

В данной работе рассматривается классическое решение в полупространстве второй краевой задачи для переопределённой стационарной системы типа Стокса, возникающей в двухжидкостной среде с одним давлением. Получено решение с использованием преобразования Фурье по горизонтальным переменным, которое может применяться для моделирования развития осадочных бассейнов, исследования тепловой конвекции в мантии, изучения влияния континентов на структуру тепловых потоков в мантии и для ряда других задач [3–5].

1. ВТОРАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДВУХСКОРОСТНОЙ СИСТЕМЫ СТОКСА С ОДНИМ ДАВЛЕНИЕМ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

В области $\Omega = \mathbb{R}^3_+ = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 > 0\}$ рассматривается вторая краевая задача для двухскоростной системы Стокса с одним давлением [6, 7]:

$$-\nu\boldsymbol{\Delta}\mathbf{v} + \operatorname{grad} p = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{1}$$

$$-\nu_1\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u} + \operatorname{grad} p = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{2}$$

$$T(\mathbf{v}, p)\mathbf{n}|_{x_3=0} = \mathbf{a}(x_1, x_2), \quad T(\mathbf{u}, p)\mathbf{n}|_{x_3=0} = \mathbf{b}(x_1, x_2), \tag{3}$$

где $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$ обозначает внешнюю по отношению к Ω нормаль к $S = \mathbb{R}^2$; ν, ν_1 — кинематические коэффициенты вязкости; $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ — заданные функции; $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, p — неизвестные векторные поля скоростей и давление; $T(\mathbf{v}, p)$, $T(\mathbf{u}, p)$ — тензоры напряжений, соответствующие течениям $\mathbf{v}, p$ и $\mathbf{u}, p$:

$$T(\mathbf{v}, p) = -pI + \nu S(\mathbf{v}), \quad S(\mathbf{v}) = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)_{i,j=1,2,3},$$

$$T(\mathbf{u}, p) = -pI + \nu_1 S(\mathbf{u}), \quad S(\mathbf{u}) = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)_{i,j=1,2,3}.$$

Здесь I — единичная матрица, $S(\mathbf{v})$, $S(\mathbf{u})$ — удвоенные тензоры скоростей деформации.

2. ПОЛУПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим в $\mathbb{R}^3_+$ однородную задачу для системы (1)–(3):

$$\begin{gathered}
-\nu\boldsymbol{\Delta}\mathbf{v} + \operatorname{grad} p = \mathbf{0}, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^3_+, \\
\nu\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_j}\right)\Bigg|_{x_3=0} = -a_j(x_1, x_2), \quad j = 1, 2, \\
\left(-p + 2\nu\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right)\Bigg|_{x_3=0} = -a_3(x_1, x_2),
\end{gathered} \tag{4}$$

$$\begin{gathered}
-\nu_1\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u} + \operatorname{grad} p = \mathbf{0}, \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^3_+, \\
\nu_1\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_j}\right)\Bigg|_{x_3=0} = -b_j(x_1, x_2), \quad j = 1, 2, \\
\left(-p + 2\nu_1\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)\Bigg|_{x_3=0} = -b_3(x_1, x_2),
\end{gathered} \tag{5}$$

предполагая, что функции $a_m(x_1, x_2)$ и $b_m(x_1, x_2)$, $m = 1, 2, 3$, являются гладкими и достаточно быстро убывают при $|(x_1, x_2)| \to \infty$. Решение при этом также должно убывать на бесконечности.

Решение системы (4), (5) сводится к последовательному решению двух краевых задач. Сначала решается задача Стокса (4) для $(\mathbf{v}, p)$ [8–11], а затем определяется вторая скорость $\mathbf{u}$ как соленоидальное решение следующей краевой задачи для векторного уравнения Пуассона:

$$
\begin{gathered}
\nu_1 \boldsymbol{\Delta} \mathbf{u} = \operatorname{grad} p, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^3_+, \\
\nu_1 \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_j} \right) \bigg|_{x_3=0} = -b_j(x_1, x_2), \quad j = 1, 2, \\
\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \bigg|_{x_3=0} = \frac{1}{2\nu_1} (p(x_1, x_2, 0) - b_3(x_1, x_2)).
\end{gathered} \tag{6}
$$

Обозначим через $\tilde{g}(\alpha_1, \alpha_2, x_3)$ преобразование Фурье функции $g(x_1, x_2, x_3)$ по переменным x_1, x_2 (см. [8–11]):

$$
\tilde{g}(\alpha_1, \alpha_2, x_3) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-i\alpha_1 x_1 - i\alpha_2 x_2} g(x_1, x_2, x_3)\, dx_1 dx_2.
$$

После применения к системе (4) преобразования Фурье по переменным x_1, x_2 получим для преобразованных функций $\tilde{v}_k$, $\tilde{p}$ краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений на полуоси $(0, \infty)$ с параметром $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$:

$$
\begin{gathered}
\nu |\alpha|^2 \tilde{v}_j - \nu \frac{d^2 \tilde{v}_j}{dx_3^2} + i\alpha_j \tilde{p} = 0, \quad j = 1, 2, \\
\nu |\alpha|^2 \tilde{v}_3 - \nu \frac{d^2 \tilde{v}_3}{dx_3^2} + \frac{d\tilde{p}}{dx_3} = 0, \\
i\alpha_1 \tilde{v}_1 + i\alpha_2 \tilde{v}_2 + \frac{d\tilde{v}_3}{dx_3} = 0,
\end{gathered} \tag{7}
$$

$$
\begin{gathered}
\nu \left(\frac{d\tilde{v}_j}{dx_3} + i\alpha_j \tilde{v}_3 \right) \bigg|_{x_3=0} = -\tilde{a}_j, \quad j = 1, 2, \\
\left(-\tilde{p} + 2\nu \frac{d\tilde{v}_3}{dx_3} \right) \bigg|_{x_3=0} = -\tilde{a}_3, \\
\tilde{\mathbf{v}} \to \mathbf{0} \quad \text{при} \quad x_3 \to \infty.
\end{gathered} \tag{8}
$$

Общее решение системы уравнений (7), стремящееся к нулю при $x_3 \to \infty$, имеет следующий вид:

$$
\begin{gathered}
\tilde{v}_1(\alpha, x_3) = \left(\frac{\alpha_2}{|\alpha|^2} C_1 - \frac{i\alpha_1}{|\alpha|} C_2 + \frac{i\alpha_1}{2\nu|\alpha|} \left(\frac{1}{|\alpha|} - x_3 \right) C_3 \right) e^{-|\alpha| x_3}, \\
\tilde{v}_2(\alpha, x_3) = \left(- \frac{\alpha_1}{|\alpha|^2} C_1 - \frac{i\alpha_2}{|\alpha|} C_2 + \frac{i\alpha_2}{2\nu|\alpha|} \left(\frac{1}{|\alpha|} - x_3 \right) C_3 \right) e^{-|\alpha| x_3}, \\
\tilde{v}_3(\alpha, x_3) = \left(C_2 + \frac{1}{2\nu} x_3 C_3 \right) e^{-|\alpha| x_3}, \\
\tilde{p}(\alpha, x_3) = C_3 e^{-|\alpha| x_3}.
\end{gathered} \tag{9}
$$

Константы C_1, C_2, C_3 определяются из граничных условий (8). Решение задачи (7), (8) можно представить в виде

$$
\begin{gathered}
\tilde{\mathbf{v}} = -\tilde{a}_1 \tilde{\mathbf{v}}^1 - \tilde{a}_2 \tilde{\mathbf{v}}^2 - \tilde{a}_3 \tilde{\mathbf{v}}^3, \\
\tilde{p} = -\tilde{a}_1 \tilde{p}^1 - \tilde{a}_2 \tilde{p}^2 - \tilde{a}_3 \tilde{p}^3,
\end{gathered} \tag{10}
$$

где $\tilde{\mathbf{v}}^1(\alpha, x_3)$, $\tilde{p}^1(\alpha, x_3)$ — решение (9) системы (7) с константами $C_1 = -\alpha_2/(\nu|\alpha|)$, $C_2 = 0$, $C_3 = i\alpha_1/|\alpha|$, удовлетворяющее граничным условиям (8) с вектором $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$ в правой части:

$$\begin{aligned}\tilde{v}_1^1(\alpha, x_3) &= \left(-\frac{1}{2\nu|\alpha|} - \frac{\alpha_2^2}{2\nu|\alpha|^3} + \frac{\alpha_1^2}{2\nu|\alpha|^2} x_3 \right) e^{-|\alpha| x_3},\\ \tilde{v}_2^1(\alpha, x_3) &= \left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{2\nu|\alpha|^3} + \frac{\alpha_1\alpha_2}{2\nu|\alpha|^2} x_3 \right) e^{-|\alpha| x_3},\\ \tilde{v}_3^1(\alpha, x_3) &= \frac{i\alpha_1}{2\nu|\alpha|} x_3\, e^{-|\alpha| x_3},\\ \tilde{p}^1(\alpha, x_3) &= \frac{i\alpha_1}{|\alpha|} e^{-|\alpha| x_3};\end{aligned} \tag{11}$$

$\tilde{\mathbf{v}}^2(\alpha, x_3)$, $\tilde{p}^2(\alpha, x_3)$ — решение (9) системы (7) с константами $C_1 = \alpha_1/(\nu|\alpha|)$, $C_2 = 0$, $C_3 = i\alpha_2/|\alpha|$, удовлетворяющее граничным условиям (8) с вектором $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ в правой части:

$$\begin{aligned}\tilde{v}_1^2(\alpha, x_3) &= \left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{2\nu|\alpha|^3} + \frac{\alpha_1\alpha_2}{2\nu|\alpha|^2} x_3 \right) e^{-|\alpha| x_3},\\ \tilde{v}_2^2(\alpha, x_3) &= \left(-\frac{1}{2\nu|\alpha|} - \frac{\alpha_1^2}{2\nu|\alpha|^3} + \frac{\alpha_2^2}{2\nu|\alpha|^2} x_3 \right) e^{-|\alpha| x_3},\\ \tilde{v}_3^2(\alpha, x_3) &= \frac{i\alpha_2}{2\nu|\alpha|} x_3\, e^{-|\alpha| x_3},\\ \tilde{p}^2(\alpha, x_3) &= \frac{i\alpha_2}{|\alpha|} e^{-|\alpha| x_3};\end{aligned} \tag{12}$$

$\tilde{\mathbf{v}}^3(\alpha, x_3)$, $\tilde{p}^3(\alpha, x_3)$ — решение (9) системы (7) с константами $C_1 = 0$, $C_2 = -1(2\nu|\alpha|)$, $C_3 = -1$, удовлетворяющее граничным условиям (11) с вектором $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ в правой части:

$$\begin{aligned}\tilde{v}_1^3(\alpha, x_3) &= \frac{i\alpha_1}{2\nu|\alpha|} x_3 e^{-|\alpha| x_3},\\ \tilde{v}_2^3(\alpha, x_3) &= \frac{i\alpha_2}{2\nu|\alpha|} x_3 e^{-|\alpha| x_3},\\ \tilde{v}_3^3(\alpha, x_3) &= -\frac{1}{2\nu} \left(\frac{1}{|\alpha|} + x_3 \right) e^{-|\alpha| x_3},\\ \tilde{p}^3(\alpha, x_3) &= -e^{-|\alpha| x_3}.\end{aligned} \tag{13}$$

При выполнении обратного преобразования Фурье в формулах (11)–(13) будем пользоваться равенствами

$$F^{-1}\left[\frac{1}{|\alpha|} e^{-|\alpha| x_3}\right] = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{|\alpha|} e^{ix_1\alpha_1 + ix_2\alpha_2 - |\alpha| x_3}\, d\alpha_1 d\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}},$$

$$F^{-1}[e^{-|\alpha| x_3}] = \frac{x_3}{\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{3/2}},$$

$$F^{-1}\left[\frac{\alpha_1}{|\alpha|} e^{-|\alpha| x_3}\right] = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{\alpha_1}{|\alpha|} e^{ix_1\alpha_1 + ix_2\alpha_2 - |\alpha| x_3}\, d\alpha_1 d\alpha_2 = \frac{ix_1}{\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{3/2}},$$

$$F^{-1}\left[\frac{\alpha_1\alpha_2}{|\alpha|^2}e^{-|\alpha|x_3}\right]=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{\alpha_1\alpha_2}{|\alpha|^2}e^{ix_1\alpha_1+ix_2\alpha_2-|\alpha|x_3}\,d\alpha_1 d\alpha_2$$
$$=3x_1x_2\int\frac{dx_3}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{5/2}}=\frac{x_1x_2x_3\big(3x_1^2+3x_2^2+2x_3^2\big)}{\big(x_1^2+x_2^2\big)^2\big(x_1^2+x_2^2+x_3^2\big)^{3/2}},$$

$$F^{-1}\left[\frac{\alpha_1\alpha_2}{|\alpha|^3}e^{-|\alpha|x_3}\right]=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{\alpha_1\alpha_2}{|\alpha|^3}e^{ix_1\alpha_1+ix_2\alpha_2-|\alpha|x_3}\,d\alpha_1 d\alpha_2=-\frac{x_1x_2\big(x_1^2+x_2^2+2x_3^2\big)}{\big(x_1^2+x_2^2\big)^2\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}},$$
$$F^{-1}\left[\frac{\alpha_1^2}{|\alpha|^2}e^{-|\alpha|x_3}\right]=\frac{x_3}{(x_1^2+x_2^2)\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}\left(\frac{2x_1^2}{x_1^2+x_2^2}+\frac{x_1^2}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}-1\right),$$
$$F^{-1}\left[\frac{\alpha_2^2}{|\alpha|^3}e^{-|\alpha|x_3}\right]=\frac{x_2^2}{\big(x_1^2+x_2^2\big)\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}-\frac{x_2^2-x_1^2}{\big(x_1^2+x_2^2\big)^2}\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}.$$

Выполняя обратное преобразование Фурье в (11) с помощью приведённых выше формул, получим

$$v_1^1(\mathbf{x})=-\frac{x_1^2+2x_2^2}{2\nu\big(x_1^2+x_2^2\big)\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}+\frac{\big(x_2^2-x_1^2\big)\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}{2\nu\big(x_1^2+x_2^2\big)^2}$$
$$+\frac{x_3^2}{2\nu(x_1^2+x_2^2)\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}\left(\frac{2x_1^2}{x_1^2+x_2^2}+\frac{x_1^2}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}-1\right),$$

$$v_2^1(\mathbf{x})=-\frac{x_1x_2(x_1^2+x_2^2+2x_3^2)}{2\nu\big(x_1^2+x_2^2\big)^2\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}+\frac{x_1x_2x_3^2\big(3x_1^2+3x_2^2+2x_3^2\big)}{2\nu\big(x_1^2+x_2^2\big)^2\big(x_1^2+x_2^2+x_3^2\big)^{3/2}},$$
$$v_3^1(\mathbf{x})=\frac{-x_1x_3}{2\nu\big(x_1^2+x_2^2+x_3^2\big)^{3/2}},\quad p^1(\mathbf{x})=\frac{-x_1}{\big(x_1^2+x_2^2+x_3^2\big)^{3/2}}.$$

Аналогично из (12) и из (13) имеем

$$v_1^2(\mathbf{x})=-\frac{x_1x_2}{2\nu(x_1^2+x_2^2)^2\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}\left(x_1^2+x_2^2+2x_3^2-\frac{x_3^2(3x_1^2+3x_2^2+2x_3^2)}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\right),$$

$$v_2^2(\mathbf{x})=-\frac{2x_1^2+x_2^2}{2\nu(x_1^2+x_2^2)\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}+\frac{\big(x_1^2-x_2^2\big)\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}{2\nu(x_1^2+x_2^2)^2}$$
$$+\frac{x_3^2}{2\nu\big(x_1^2+x_2^2\big)\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}\left(\frac{2x_2^2}{x_1^2+x_2^2}+\frac{x_2^2}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}-1\right),$$

$$v_3^2(\mathbf{x})=\frac{-x_2x_3}{2\nu\big(x_1^2+x_2^2+x_3^2\big)^{3/2}},\quad p^2(\mathbf{x})=\frac{-x_2}{\big(x_1^2+x_2^2+x_3^2\big)^{3/2}},$$
$$v_1^3(\mathbf{x})=\frac{-x_1x_3}{2\nu\big(x_1^2+x_2^2+x_3^2\big)^{3/2}},\quad v_2^3(\mathbf{x})=\frac{-x_2x_3}{2\nu\big(x_1^2+x_2^2+x_3^2\big)^{3/2}},$$
$$v_3^3(\mathbf{x})=-\frac{x_1^2+x_2^2+2x_3^2}{2\nu\big(x_1^2+x_2^2+x_3^2\big)^{3/2}},\quad p^3(\mathbf{x})=-\frac{x_3}{\big(x_1^2+x_2^2+x_3^2\big)^{3/2}}.$$

Для выполнения обратного преобразования Фурье в равенствах (10) применим известную формулу

$$F[(f*g)] = 2\pi F[f]F[g] = 2\pi\tilde{f}\tilde{g}, \tag{14}$$

откуда

$$F^{-1}[\tilde{f}\tilde{g}] = \frac{1}{2\pi}\big(F^{-1}[\tilde{f}] * F^{-1}[\tilde{g}]\big) = \frac{1}{2\pi}(f*g),$$

где $(f*g)(\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x}-\mathbf{y})g(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}$ — свёртка функций f и g. Тогда из (10) имеем

$$\begin{gathered}\mathbf{v} = -\frac{1}{2\pi}[(a_1 * \mathbf{v}^1) - (a_2 * \mathbf{v}^2) - (a_3 * \mathbf{v}^3)],\\ p = -\frac{1}{2\pi}[(a_1 * p^1) - (a_2 * p^2) - (a_3 * p^3)].\end{gathered} \tag{15}$$

Перейдём к решению задачи (6). Решение $\mathbf{u}$ будем искать в виде $\mathbf{u} = \mathbf{z} + \mathbf{w}$. Продолжим соленоидальную функцию ∇p с $\mathbb{R}^3_+$ на всё пространство $\mathbb{R}^3$ с сохранением соленоидальности и гладкости. Такое продолжение возможно (см., например, [8, лемма 4]). Полагая

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi\nu_1}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{\nabla p(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\,d\mathbf{y},$$

мы, очевидно, получим соленоидальное решение $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)$ векторного уравнения Пуассона $\nu_1\boldsymbol{\Delta}\mathbf{z} = \operatorname{grad} p$. Функция $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ должна быть соленоидальной и удовлетворять векторному уравнению Лапласа с изменёнными по сравнению с (6) граничными условиями

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\Delta}\mathbf{w} = \mathbf{0}, \quad \operatorname{div}\mathbf{w} = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^3_+,\\ \nu_1\left(\frac{\partial w_j}{\partial x_3} + \frac{\partial w_3}{\partial x_j}\right)\bigg|_{x_3=0} = -d_j(x_1, x_2), \quad j = 1, 2,\\ \left(-p + 2\nu_1\frac{\partial w_3}{\partial x_3}\right)\bigg|_{x_3=0} = -d_3(x_1, x_2),\end{gathered} \tag{16}$$

где

$$\begin{gathered}d_j(x_1, x_2) = b_j(x_1, x_2) + \nu_1\left(\frac{\partial z_j}{\partial x_3} + \frac{\partial z_3}{\partial x_j}\right)\bigg|_{x_3=0}, \quad j = 1, 2,\\ d_3(x_1, x_2) = b_3(x_1, x_2) + 2\nu_1\frac{\partial z_3}{\partial x_3}\bigg|_{x_3=0}.\end{gathered}$$

После применения к системе (16) преобразования Фурье по переменным x_1, x_2 получим для преобразованных функций $\tilde{w}_k$ краевую задачу для переопределённой системы обыкновенных дифференциальных уравнений на полуоси $(0, \infty)$ с параметром $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$:

$$\begin{gathered}\frac{d^2\widetilde{\mathbf{w}}}{dx_3^2} - |\alpha|^2\widetilde{\mathbf{w}} = \mathbf{0},\\ i\alpha_1\tilde{w}_1 + i\alpha_2\tilde{w}_2 + \frac{d\tilde{w}_3}{dx_3} = 0,\end{gathered} \tag{17}$$

$$\begin{gathered}\left(\frac{d\tilde{w}_j}{dx_3} + i\alpha_j\tilde{w}_3\right)\bigg|_{x_3=0} = -\frac{\tilde{d}_j}{\nu_1}, \quad j = 1, 2,\\ -\tilde{p} + 2\nu_1\frac{d\tilde{w}_3}{dx_3}\big|_{x_3=0} = -\tilde{d}_3,\\ \widetilde{\mathbf{w}} \to \mathbf{0} \quad \text{при} \quad x_3 \to \infty.\end{gathered} \tag{18}$$

Общее решение первого векторного уравнения в (17), стремящееся к нулю при $x_3 \to \infty$, имеет следующий вид:

$$\widetilde{\mathbf{w}}(\alpha, x_3) = \mathbf{C}e^{-|\alpha|x_3}, \quad \mathbf{C} = (C_1, C_2, C_3). \tag{19}$$

Константы C_1, C_2, C_3 определяются из граничных условий (18):

$$C_j = -\frac{i\alpha_j}{2|\alpha|^2\nu_1}\big(\tilde{p}|_{x_3=0} - \tilde{d}_3\big) + \frac{\tilde{d}_j}{|\alpha|\nu_1}, \quad j = 1, 2, \quad C_3 = -\frac{1}{2|\alpha|\nu_1}\big(\tilde{p}|_{x_3=0} - \tilde{d}_3\big).$$

Кроме того, должно выполняться дивергентное условие на решение, которое даёт ограничение на функции правой части граничных условий (18). Из равенства $i\alpha_1 C_1 + i\alpha_2 C_2 - |\alpha|C_3 = 0$ следует

$$\frac{i\alpha_1}{|\alpha|}\tilde{d}_1 + \frac{i\alpha_2}{|\alpha|}\tilde{d}_2 + \tilde{p}|_{x_3=0} - \tilde{d}_3 = 0. \tag{20}$$

Выполняя обратное преобразование Фурье в (19) и в (20), получим

$$w_1(\mathbf{x}) = -\frac{i}{2\nu_1}F^{-1}\left[\frac{\alpha_1}{|\alpha|^2}e^{-|\alpha|x_3}\right] * (p|_{x_3=0} - d_3) + \frac{1}{\nu_1}F^{-1}\left[\frac{1}{|\alpha|}e^{-|\alpha|x_3}\right] * d_1,$$

$$w_2(\mathbf{x}) = -\frac{i}{2\nu_1}F^{-1}\left[\frac{\alpha_2}{|\alpha|^2}e^{-|\alpha|x_3}\right] * (p|_{x_3=0} - d_3) + \frac{1}{\nu_1}F^{-1}\left[\frac{1}{|\alpha|}e^{-|\alpha|x_3}\right] * d_2,$$

$$w_3(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\nu_1}F^{-1}\left[\frac{1}{|\alpha|}e^{-|\alpha|x_3}\right] * (p|_{x_3=0} - d_3).$$

Переопределенность задачи (16) приводит к необходимому условию её разрешимости в виде требования выполнения

$$iF^{-1}\left(\frac{\alpha_1}{|\alpha|}\right) * d_1 + iF^{-1}\left(\frac{\alpha_2}{|\alpha|}\right) * d_2 + p|_{x_3=0} - d_3 = 0$$

для компонент вектора $\mathbf{d}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Доровский В. Н.* Образование диссипативных структур в процессе необратимой передачи импульса литосферы // Геология и геофизика. 1987. № 6. С. 108–117.
2. *Доровский В. Н., Перепечко Ю. В.* Теория частичного плавления // Геология и геофизика. 1989. № 9. С. 56–64.
3. *Лунев Б. В.* Напряжения в океанической литосфере, обусловленные плотностными неоднородностями // Глубинная морская геофизика. Л.: Недра, 1991. С. 29–36.
4. *Черепанова В. К., Черепанов А. Н., Шарапов В. Н.* Модели динамики фазовых превращений в магматических системах и металлических сплавах. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2015.
5. *Лунёв Б. В., Лапковский В. В., Канаков М. С., Застрожнов А. С.* Решение эволюционной обратной задачи для уточнения геологической структуры в областях соляной тектоники // Марчуковские научные чтения-2017: Тр. Межд. конф. Новосибирск, 2017. С. 556–562.
6. *Жураев Д. А., Жиан-Ган Тан, Имомназаров Х. Х., Урев М. В.* Краевая задача для одной переопределённой системы, возникающей в двухжидкостной среде // Узбек. мат. журн. 2016. № 3. С. 58–69.
7. *Урев М. В., Имомназаров Х. Х., Жиан-Ган Тан.* Краевая задача для одной переопределённой стационарной системы, возникающей в двухскоростной гидродинамике // Сиб. журн. вычисл. математики. 2017. Т. 20, № 4. С. 425–437.
8. *Солонников В. А.* Оценки решений нестационарной линеаризованной системы уравнений Навье — Стокса // Тр. МИАН СССР. 1964. Т. 70. С. 213–317.

9. *Солонников В. А.* Оценки решения одной начально-краевой задачи для линейной нестационарной системы уравнений Навье — Стокса // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1976. Т. 59. С. 178–254.
10. *Солонников В. А.* Оценки решения второй начально-краевой задачи для системы Стокса в пространствах функций с непрерывными по Гёльдеру производными по пространственным переменным // Зап. научн. семин. ПОМИ. 1999. Т. 259. С. 254–279.
11. *Бондарь Л. Н.* Разрешимость второй краевой задачи для системы Стокса // Сиб. журн. индустр. математики. 2014. Т. 17, № 3. С. 26–39.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 517.946

SOLUTION OF ONE OVERDETERMINED STATIONARY STOKES-TYPE SYSTEM IN THE HALF-SPACE

© 2021 Kh. Kh. Imomnazarov,[1a], Sh. Kh. Imomnazarov,[1,2a], M. V. Urev[1b], R. Kh. Baxromov[3c]

[1]*Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, pr. Acad. Lavrentyeva 6, Novosibirsk 630090, Russia;*
[2]*Sobolev Institute of Geology and Mineralogy SB RAS, pr. Acad. Koptyuga 3, Novosibirsk 630090, Russia;*
[3]*Mirzo Ulugbek National University of Uzbekistan, Vuzgorodok, Tashkent 100174, Uzbekistan*

E-mails: [a]imom@omzg.sscc.ru , [b]urev@nmsf.sscc.ru , [c]baxramov88.r@mail.ru

Received 25.02.2021, revised 09.08.2021, accepted 21.10.2021

Abstract. We have considered the classical solution in the half-space of the second boundary value problem for the overdetermined stationary system of the Stokes type, arising in a two-fluid medium with one pressure. The solution using the Fourier transform in horizontal variables is obtained. The effect of the kinetic parameters of the medium on the solution of the system has been shown.

Keywords: two-fluid media, incompressible fluid, overdetermined system, Poisson equation, inhomogeneous problem, Fourier transform, classical solution.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.404

REFERENCES

1. Dorovskii V. N. Obrazovanie dissipativnykh struktur v protsesse neobratimoi peredachi impul'sa litosfery [Formation of dissipative structures in the process of irreversible momentum transfer of the lithosphere]. *Geolog. Geofiz.*, 1987, No. 6, pp. 108–117 (in Russian).
2. Dorovskii V. N., Perepechko Yu. V. Teoriya chastichnogo plavleniya [Theory of partial melting]. *Geolog. Geofiz.*, 1989, No. 9, pp. 56–64 (in Russian).
3. Lunev B. V. Napryazheniya v okeanicheskoi litosfere, obuslovlennye plotnostnymi neodnorodnostyami [Stresses in the oceanic lithosphere due to density inhomogeneities]. *Glubinnaya morskaya geofizika* [Deep Marine Geophysics], Leningrad: Nedra, 1991, pp. 29–36 (in Russian).
4. Cherepanova V. K., Cherepanov A. N., Sharapov V. N. Modeli dinamiki fazovykh prevrashchenii v magmaticheskikh sistemakh i metallicheskikh splavakh [Models of the dynamics of phase transformations in magmatic systems and metallic alloys]. Novosibirsk: Izd-vo NGTU, 2015 (in Russian).
5. Lunev B. V., Lapkovskii V. V., Kanakov M. S., Zastrozhnov A. S. Reshenie evolyutsionnoi obratnoi zadachi dlya utochneniya geologicheskoi struktury v oblastyakh solyanoi tektoniki [Solution of the evolutionary inverse problem to refine the geological structures in the areas of salt tectonics]. Marchuk Scientific Readings-2017: Tr. Int. conf., Novosibirsk, 2017, pp. 556–562 (in Russian).
6. Zhuraev D. A., Zhian-Gan Tan, Imomnazarov Kh. Kh., Urev M. V. Kraevaya zadacha dlya odnoi pereopredelennoi sistemy, voznikayushchei v dvukhzhidkostnoi srede [The boundary problem for one overdetermined system, arising in a two-fluid environment]. *Uzbek. Mat. Zhurn.*, 2016, No. 3, pp. 58–69 (in Russian).

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2021, Vol. 15, No. 4.

7. Urev M. V., Imomnazarov Kh. Kh., Zhian-Gan Tan. A boundary value problem for one overdetermined stationary system arising in a two-velocity hydrodynamics. *Numer. Anal. Appl.*, 2017, Vol. 20, No. 4, pp. 347–357.

8. Solonnikov V. A. Otsenki reshenii nestatsionarnoi linearizovannoi sistemy uravnenii Nav'e—Stoksa [Estimates for nonstationary linearized solutions Navier—Stokes equations]. *Tr. MIAN SSSR*, 1964, Vol. 70, pp. 213–317 (in Russian).

9. Solonnikov V. A. Otsenki resheniya odnoi nachal'no-kraevoi zadachi dlya lineinoi nestatsionarnoi sistemy uravnenii Nav'e—Stoksa [Estimates for the solution of one initial-boundary value problem for a linear non-stationary Navier-Stokes equations systems]. *Zap. Nauchn. Semin. LOMI*, 1976, Vol. 59, pp. 178–254 (in Russian).

10. Solonnikov V. A. Otsenki resheniya vtoroi nachal'no-kraevoi zadachi dlya sistemy Stoksa v prostranstvakh funktsii s nepreryvnymi po Gel'deru proizvodnymi po prostranstvennym peremennym [Estimates for the solution of the second initial-boundary value problem for the Stokes system in the spaces functions with derivatives continuous in Holder with respect to spatial variables]. *Zap. Nauchn. Semin. POMI*, 1999, Vol. 259, pp. 254–279.

11. Bondar' L. N. Razreshimost' vtoroi kraevoi zadachi dlya sistemy Stoksa [Solvability of the second boundary value problem for the Stokes system]. *Sib. Zhurn. Industr. Math.*, 2014, Vol. 17, No. 3, pp. 26–39.