

УДК 517.957

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ВЫРОЖДЕНИЕМ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

© 2021 А. Л. Казаков^{1а}, П. А. Кузнецов^{1б}, Л. Ф. Спесак^{2,3с}

¹Институт динамики систем и теории управления
имени В. М. Матросова СО РАН,

ул. Лермонтова, 134, г. Иркутск 664033, Россия,

²Институт машиноведения УрО РАН,

ул. Комсомольская, 34, г. Екатеринбург 620049, Россия,

³Уральский государственный университет путей сообщения,

ул. Колмогорова, 66, г. Екатеринбург 620034, Россия

E-mails: ^аkazakov@icc.ru, ^бkuznetsov@icc.ru, ^сlfs@imach.uran.ru

Поступила в редакцию 11.05.2021 г.; после доработки 11.05.2021 г.;
принята к публикации 21.10.2021 г.

Исследуется система двух нелинейных параболических уравнений второго порядка с вырождением. Системы такого вида применяются в химической кинетике для моделирования процессов реакции-диффузии. Доказана теорема существования и единственности аналитического решения типа диффузионных волн при заданном фронте волны. Доказательство является конструктивным, решение строится в виде степенных рядов с рекуррентно вычисляемыми коэффициентами. Предложен алгоритм численного решения на основе метода граничных элементов, для верификации которого используются отрезки аналитических решений.

Ключевые слова: нелинейные параболические уравнения с вырождением, система реакция-диффузия, степенной ряд, теорема существования и единственности, метод граничных элементов, вычислительный эксперимент, диффузионная волна.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.405

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим систему нелинейных параболических уравнений второго порядка

$$\begin{aligned} T_t &= [\Phi(T)]_{xx} + \Gamma(T, S), \\ S_t &= [\Psi(S)]_{xx} + \Lambda(S, T). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь x, t — независимые переменные; $T(t, x)$ и $S(t, x)$ — искомые функции; $\Phi(T)$, $\Psi(S)$, $\Gamma(T, S)$, $\Lambda(S, T)$ — известные достаточно гладкие функции. Также будем предполагать нелинейность хотя бы одной из функций $\Phi(T)$, $\Psi(S)$, ибо в противном случае мы имеем дело с хорошо известной полулинейной системой.

В литературе система (1), записанная в виде

$$\begin{aligned} T_t &= [\Phi'(T)T_x]_x + \Gamma(T, S), \\ S_t &= [\Psi'(S)S_x]_x + \Lambda(S, T), \end{aligned} \quad (2)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Правительства Иркутской области (проект 20-41-385002); Российского фонда фундаментальных исследований и Министерства по науке и технологиям Тайваня (проект 20-51-S52003).

используется для описания теплопереноса [1], а также диффузионных [2] и реакционно-диффузионных [3] процессов. Уравнения, составляющие систему (2), используются также при описании механизмов лучистой теплопроводности [4, 5], фильтрации жидкостей и газов [6, 7], миграции биологических популяций [8] и др. и имеют, вообще говоря, параболический тип. Отметим, что существуют также гиперболические модели, описывающие схожие процессы, такие как фильтрация [9] или популяционная динамика [10, 11], однако используются они реже, чем параболические.

Если $\Phi'(0) = \Psi'(0) = 0$, то параболический тип вырождается, и уравнения, составляющие систему (2), относятся к классу не разрешённых относительно старшей производной [12]. Если $\Gamma(0, 0) = \Lambda(0, 0) = 0$, то система (2) имеет тривиальное решение $T \equiv 0$, $S \equiv 0$. Отметим, что наиболее часто в литературе встречается случай степенных функций

$$\Phi'(T) = T^\sigma, \quad \Psi'(S) = S^\delta, \quad \sigma, \delta = \text{const} > 0, \quad (3)$$

так как он даёт хорошее приближение к реальности при сравнительной простоте исследования. Системы вида (2), (3) применяются в химической кинетике для описания процессов реакция-диффузия [13, 14].

Содержательный класс решений рассматриваемых систем составляют диффузионные (тепловые, фильтрационные) волны, распространяющиеся с конечной скоростью по нулевому фону. Применительно к системе (2), (3) такая волна представляет собой два решения системы (возмущённое $T, S \geq 0$ и тривиальное $T, S \equiv 0$), непрерывно состыкованные вдоль некоторой линии — фронта волны. Несмотря на содержательные физическую и геометрическую интерпретации, решения типа диффузионных волн встречаются в литературе относительно редко. В этой связи особо выделим монографию А. А. Самарского с соавторами [5], а также работы А. Ф. Сидорова и его учеников [15]. В последних предложены постановки краевых задач об иницировании волн фильтрации, а также эффективные методы построения решений этих задач в классе аналитических функций, среди которых особое место занимает метод специальных рядов [16]. Он относительно прост в использовании и даёт возможность раскрыть имеющиеся особенности.

Аналитическая разрешимость задач об иницировании тепловых (диффузионных) волн в различных постановках исследована авторами в одномерном [17] и не одномерном [18, 19] случаях. Решения построены в виде рядов Тейлора, сходимость которых доказана методом мажорант. В ряде работ (см. [17, 20]) разработаны численно-аналитические методы решения, основанные на граничноэлементном подходе. Для их верификации удобно использовать точные решения. Методов построения таких решений, применимых к уравнениям системы (2), на сегодняшний день существует достаточно много. Среди них хорошо разработанный метод группового анализа [21], метод разделения переменных и его различные обобщения [22] и др. Нередко при построении исходное уравнение сводится к обыкновенному дифференциальному (см., например, [23]). Подробный обзор известных точных решений уравнений, составляющих систему (2), можно найти в [22]. Однако они, как правило, не являются диффузионными волнами. Исключения можно найти, пожалуй, только в уже упомянутой монографии [5]. В работе авторов [24] приводятся точные решения типа диффузионных (тепловых) волн. Также авторами разработаны алгоритмы численного решения задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющих точные решения, методом граничных элементов [25]. Построенные таким образом решения также могут быть использованы для тестирования численных решений.

В работе [26], насколько известно авторам, впервые проводится построение и исследование решений типа диффузионных волн для систем вида (2), (3). При этом рассматривается задача с заданным диффузионным фронтом, решение строится в виде сходящихся степенных рядов, сходимость которых обеспечивает доказанная теорема существования в классе аналитических функций. Кроме того, в указанной работе построено точное решение в виде анзаца со

свободными параметрами, определяемыми в процессе построения. Исходная задача при этом сводится к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, также не разрешённых относительно старшей производной. Приведён и подробно исследован контрпример к основной теореме, возможный лишь в случае системы, а не одного уравнения.

В настоящей работе, которая является прямым продолжением [26], авторы обобщают полученные ранее результаты на случай произвольных достаточно гладких $\Phi'(T)$, $\Psi'(S)$: доказана теорема существования и единственности аналитического решения с построением последнего в виде характеристических рядов с рекуррентно вычисляемыми коэффициентами, представлен аналог примера Ковалевской для рассмотренного случая. Кроме того, предложен численный алгоритм решения задачи о движении диффузионной волны с заданным фронтом на основе метода граничных элементов, который для параболических систем с вырождением, насколько нам известно, применяется впервые. (В работе [26] такого рода результаты также не были представлены.) Выполнены иллюстрирующие численные расчёты, результаты которых сравнивались с отрезками рядов и точными решениями.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть в системе (2) Φ , Ψ , Γ , Λ — заданные достаточно гладкие функции и для Φ' и Ψ' существуют обратные $K = [\Phi']^{-1}$, $L = [\Psi']^{-1}$. Сделаем в системе (2) замену $u = \Phi'(T)$, $v = \Psi'(S)$. Так как теперь $T = K(u)$, $S = L(v)$, то (2) примет вид

$$\begin{aligned} K(u)'u_t &= [uK'(u)u_x]_x + \Gamma(K(u), L(v)), \\ L(v)'v_t &= [vL'(v)v_x]_x + \Lambda(L(v), K(u)). \end{aligned} \quad (4)$$

Далее раскроем скобки и поделим первое и второе уравнение системы (4) на $K'(u)$ и $L'(v)$ соответственно. Получим равенства

$$\begin{aligned} u_t &= uu_{xx} + P(u)u_x^2 + F(u, v), \\ v_t &= vv_{xx} + Q(v)v_x^2 + G(v, u), \end{aligned} \quad (5)$$

в которых использованы обозначения

$$\begin{aligned} P(u) &= 1 + \frac{uK''(u)}{K'(u)}, & F(u, v) &= \frac{\Gamma(K(u), L(v))}{K'(u)}, \\ Q(v) &= 1 + \frac{vL''(v)}{L'(v)}, & G(v, u) &= \frac{\Lambda(L(v), K(u))}{L'(v)}. \end{aligned}$$

Добавим к (5) краевое условие

$$u(t, x)|_{x=a(t)} = v(t, x)|_{x=a(t)} = 0. \quad (6)$$

Функцию $a(t)$ также полагаем достаточно гладкой. Задачу (5), (6) мы и будем исследовать. Её нетривиальные решения вкупе с тривиальным (если таковые существуют одновременно) образуют искомую диффузионную волну.

2. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Для задачи (5), (6) справедлива следующая

Теорема. Пусть выполняются следующие условия:

1) функции $a(t)$, $P(u)$, $Q(v)$, $F(u, v)$, $G(v, u)$ аналитичны в точках $t = 0$, $u = 0$, $v = 0$, $u = v = 0$ соответственно;

2) $a'(0) \neq 0$;

3) $u_x(t, a(t))$, $v_x(t, a(t)) \neq 0$;

4) $P(0)$, $Q(0) > 0$;

5) $F(0, 0) = G(0, 0) = 0$.

Тогда задача (5), (6) имеет единственное решение, аналитическое в некоторой окрестности кривой $x = a(t)$.

Доказательство. Доказательство теоремы проведём в два этапа. На первом этапе мы построим решение задачи в виде рядов Тейлора по степеням $x - a(t)$. На втором будет доказана локальная сходимость построенных формальных рядов методом мажорант.

ЭТАП 1. Перед построением решения для большего удобства сделаем в задаче (5), (6) замену $z = x - a(t)$. Задача примет вид

$$\begin{aligned} u_t - a'u_z &= uu_{zz} + P(u)u_z^2 + F(u, v), \\ v_t - a'v_z &= vv_{zz} + Q(v)v_z^2 + G(v, u), \end{aligned} \quad (7)$$

$$u(t, z)|_{z=0} = v(t, z)|_{z=0} = 0. \quad (8)$$

Решение задачи (7), (8) построим в виде рядов Тейлора

$$u(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \frac{z^n}{n!}, \quad v(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(t) \frac{z^n}{n!}. \quad (9)$$

Из равенства (8) следует, что $u_0 = v_0 = 0$. Полагая в (7) $z = 0$, получаем систему

$$\begin{aligned} -a'u_1 &= P(0)u_1^2, \\ -a'v_1 &= Q(0)v_1^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Система (10) имеет четыре решения. Нулевое решение $u_1, v_1 \equiv 0$, а также решения $u_1 \equiv 0$, $v_1 \neq 0$ и $u_1 \neq 0$, $v_1 \equiv 0$ требуют отдельного рассмотрения, которое выходит за рамки теоремы (см. условие 3) и будет выполнено отдельно.

Рассмотрим основной случай, когда $u_1, v_1 \neq 0$ и определяются по формулам

$$u_1 = -a'/P(0), \quad v_1 = -a'/Q(0). \quad (11)$$

Продифференцировав уравнения системы (7) по z и приняв $z = 0$, найдём u_2, v_2 :

$$u_2 = \frac{1}{1 + P(0)} \left[\frac{a''}{a'} - \frac{P'(0)}{P^2(0)} (a')^2 - F_u(0, 0) - \frac{P(0)}{Q(0)} F_v(0, 0) \right], \quad (12)$$

$$v_2 = \frac{1}{1 + Q(0)} \left[\frac{a''}{a'} - \frac{Q'(0)}{Q^2(0)} (a')^2 - G_v(0, 0) - \frac{Q(0)}{P(0)} G_u(0, 0) \right]. \quad (13)$$

Остальные коэффициенты рядов (9) определяются n -кратным дифференцированием уравнений системы (7). Применим к (7) оператор $\frac{\partial^n [\cdot]}{\partial z^n} \Big|_{z=0}$, $n \geq 2$. Первое уравнение системы примет вид

$$u'_n - a'u_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_n^k u_k u_{n+2-k} + \sum_{k=0}^n C_n^k P_{n-k} \left(\sum_{l=0}^k C_k^l u_{l+1} u_{k+1-l} \right) + F_n, \quad (14)$$

в котором использованы обозначения

$$P_{n-k} = \frac{\partial^{n-k} P(u)}{\partial z^{n-k}} \Big|_{z=0}, \quad F_n = \frac{\partial^n F(u, v)}{\partial z^n} \Big|_{z=0}.$$

Выделяя в (14) все коэффициенты с индексом $n+1$, получим равенство

$$\begin{aligned} u'_n - a'u_{n+1} &= \sum_{k=2}^n C_n^k u_k u_{n+2-k} + nu_1 u_{n+1} \\ &+ \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k P_{n-k} \left(\sum_{l=0}^k C_k^l u_{l+1} u_{k+1-l} \right) + P_0 \sum_{l=1}^{n-1} C_n^l u_{l+1} u_{n+1-l} + 2P_0 u_{n+1} u_1 + F_n. \end{aligned}$$

Отсюда выражаем u_{n+1} :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{a'(1+n/P_0)} \left[\sum_{k=2}^n C_n^k u_k u_{n+2-k} + \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k P_{n-k} \left(\sum_{l=0}^k C_k^l u_{l+1} u_{k+1-l} \right) \right. \\ &\quad \left. + P_0 \sum_{l=1}^{n-1} C_n^l u_{l+1} u_{n+1-l} + F_n - u'_n \right]. \quad (15) \end{aligned}$$

Аналогично определяем коэффициент v_{n+1} :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{a'(1+n/Q_0)} \left[\sum_{k=2}^n C_n^k v_k v_{n+2-k} + \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k Q_{n-k} \left(\sum_{l=0}^k C_k^l v_{l+1} v_{k+1-l} \right) \right. \\ &\quad \left. + Q_0 \sum_{l=1}^{n-1} C_n^l v_{l+1} v_{n+1-l} + G_n - v'_n \right], \quad (16) \end{aligned}$$

$$Q_{n-k} = \frac{\partial^{n-k} Q(v)}{\partial z^{n-k}} \Big|_{z=0}, \quad G_n = \frac{\partial^n G(v, u)}{\partial z^n} \Big|_{z=0}.$$

Получаем, что в случае $u_1, v_1 \neq 0$ коэффициенты ряда (9) определяются однозначно по формулам $u_0 = v_0 = 0$, (11)–(13), (15), (16). Первый этап доказательства завершён.

ЭТАП 2. Доказательство сходимости проведём методом мажорант с использованием теоремы Коши — Ковалевской по следующей схеме.

1. Необходимые подготовительные преобразования исходной задачи (с целью облегчить построение мажорантной).

2. Построение мажорантной задачи (с использованием мажорантных оценок коэффициентов рядов Тейлора).

3. Приведение мажорантной задачи к типу Ковалевской с аналитическими входными данными (подпадает под действие теоремы Коши — Ковалевской).

Перед построением мажорантной задачи сделаем в задаче (7), (8) замену

$$u(t, z) = zu_1(t) + z^2 U(t, z), \quad v(t, z) = zv_1(t) + z^2 V(t, z),$$

представляющую собой частичное разложение искомым функций в ряд Тейлора (9). Заметим, что условие (8) здесь выполняется автоматически. Будем использовать также представления

$$P(u) = P_0 + u\tilde{P}(u), \quad Q(v) = Q_0 + v\tilde{Q}(v),$$

которые возможны в силу аналитичности функций P и Q .

Первое уравнение системы (7) примет вид

$$u_1'z + z^2U_t - a'(u_1 + 2zU + z^2U_z) = (u_1z + z^2U)(2U + 4zU_z + z^2U_{zz}) + [P_0 + (u_1z + z^2U)\tilde{P}(u_1z + z^2U)](u_1 + 2zU + z^2U_z)^2 + F(u_1z + z^2U, v_1z + z^2V). \quad (17)$$

С учётом равенства $-a'u_1 = P_0u_1^2$ приведём в (17) подобные и поделим на z . Уравнение примет вид

$$u_1' + zU_t - a'(2U + zU_z) = (u_1 + zU)(2U + 4zU_z + z^2U_{zz}) + (u_1 + zU)\tilde{P}(u_1z + z^2U)(u_1 + 2zU + z^2U_z)^2 + 2P_0u_1(2U + zU_z) + P_0z(2U + zU_z)^2 + \frac{F(u_1z + z^2U, v_1z + z^2V)}{z}. \quad (18)$$

Используя разложения

$$\tilde{P}(u_1z + z^2U) = \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{P}_i \frac{(u_1z + z^2U)^i}{i!},$$

$$F(u_1z + z^2U, v_1z + z^2V) = \sum_{i,j=0}^{\infty} F_{i,j} \frac{(u_1z + z^2U)^i}{i!} \frac{(v_1z + z^2V)^j}{j!},$$

раскрывая скобки и деля (18) на a'/P_0 , получим уравнение

$$2U(1 + P_0) + (4 + P_0)zU_z + z^2U_{zz} = f_0(t) + zf_1(t, U, U_t, V) + z^2f_2(t, U, V, U_z) + z^3f_3(t, z, U, V, U_z, U_{zz}), \quad (19)$$

в котором f_0, f_1, f_2, f_3 — известные аналитические функции своих переменных. (Их вид не приводится в силу крайней громоздкости.)

Второе уравнение системы (7) преобразуется аналогично:

$$2V(1 + Q_0) + (4 + Q_0)zV_z + z^2V_{zz} = g_0(t) + zg_1(t, V, V_t, U) + z^2g_2(t, V, U, V_z) + z^3g_3(t, z, V, U, V_z, V_{zz}). \quad (20)$$

Здесь g_0, g_1, g_2, g_3 — также известные аналитические функции.

Таким образом, задача (7), (8) сведена нами к двум уравнениям (19) и (20). Решения уравнений можно построить в виде рядов Тейлора

$$U(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(t) \frac{z^n}{n!}, \quad V(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(t) \frac{z^n}{n!}. \quad (21)$$

Коэффициенты (21) определяются согласно уже известной процедуре по формулам

$$U_0 = \frac{f_0(t)}{2(1 + P_0)}, \quad V_0 = \frac{g_0(t)}{2(1 + Q_0)}, \quad U_1 = \frac{f_1(t, U_0, U_0', V_0)}{3(2 + P_0)}, \quad V_1 = \frac{g_1(t, V_0, V_0', U_0)}{3(2 + Q_0)},$$

$$U_2 = \frac{1}{2(3 + P_0)} \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} \Big|_{z=0} + f_2|_{z=0} \right), \quad V_2 = \frac{1}{2(3 + Q_0)} \left(\frac{\partial g_1}{\partial z} \Big|_{z=0} + g_2|_{z=0} \right),$$

$$U_n = n\alpha_n \frac{\partial^{n-1} f_1}{\partial z^{n-1}} \Big|_{z=0} + n(n-1)\alpha_n \frac{\partial^{n-2} f_2}{\partial z^{n-2}} \Big|_{z=0} + n(n-1)(n-2)\alpha_n \frac{\partial^{n-3} f_3}{\partial z^{n-3}} \Big|_{z=0},$$

$$V_n = n\beta_n \frac{\partial^{n-1} g_1}{\partial z^{n-1}} \Big|_{z=0} + n(n-1)\beta_n \frac{\partial^{n-2} g_2}{\partial z^{n-2}} \Big|_{z=0} + n(n-1)(n-2)\beta_n \frac{\partial^{n-3} g_3}{\partial z^{n-3}} \Big|_{z=0}, \quad n \geq 3.$$

Для краткости здесь использованы обозначения

$$\alpha_n = \frac{1}{2(1 + P_0) + (4 + P_0)n + n(n - 1)}, \quad \beta_n = \frac{1}{2(1 + Q_0) + (4 + Q_0)n + n(n - 1)}.$$

Так как все эти коэффициенты, а также функции $f_i, g_i, i = 1, 2, 3$, аналитичны, то для них можно построить мажоранты. При выполнении мажорантных оценок

$$\begin{aligned} U_0(t), V_0(t) &\ll W_0(t); \quad U_1(t), V_1(t) \ll W_1(t), \\ f_1(t, U, U_t, V), g_1(t, V, V_t, U) &\ll h_1(t, W, W_t, W), \quad f_2(t, U, V, U_z), g_2(t, U, V, U_z) \ll h_2(t, W, W, W_z), \\ f_3(t, z, U, V, U_z, U_{zz}), g_3(t, z, U, V, U_z, U_{zz}) &\ll h_3(t, z, W, W, W_z, W_{zz}) \end{aligned}$$

решение задачи

$$W_{zz} = \frac{\partial h_1(t, W, W_t, W)}{\partial z} + h_2(t, W, W, W_z) + zh_3(t, z, W, W, W_z, W_{zz}), \quad (22)$$

$$W(t, z)|_{z=0} = W_0(t), \quad W_z(t, z)|_{z=0} = W_1(t) \quad (23)$$

мажорирует решение задачи (19), (20). В этом можно убедиться, построив решение (22), (23) в виде ряда Тейлора

$$W(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(t) \frac{z^n}{n!}. \quad (24)$$

Для полученных коэффициентов справедливы мажорантные оценки

$$\begin{aligned} U_2 &= \frac{1}{2(3 + P_0)} \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} \Big|_{z=0} + f_2|_{z=0} \right) \ll \frac{\partial h_1}{\partial z} \Big|_{z=0} + h_2|_{z=0} = W_2, \\ V_2 &= \frac{1}{2(3 + Q_0)} \left(\frac{\partial g_1}{\partial z} \Big|_{z=0} + g_2|_{z=0} \right) \ll \frac{\partial h_1}{\partial z} \Big|_{z=0} + h_2|_{z=0} = W_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_n &= n\alpha_n \frac{\partial^{n-1} f_1}{\partial z^{n-1}} \Big|_{z=0} + n(n-1)\alpha_n \frac{\partial^{n-2} f_2}{\partial z^{n-2}} \Big|_{z=0} + n(n-1)(n-2)\alpha_n \frac{\partial^{n-3} f_3}{\partial z^{n-3}} \Big|_{z=0} \\ &\ll \frac{\partial^{n-1} h_1}{\partial z^{n-1}} \Big|_{z=0} + \frac{\partial^{n-2} h_2}{\partial z^{n-2}} \Big|_{z=0} + (n-2) \frac{\partial^{n-3} h_3}{\partial z^{n-3}} \Big|_{z=0} = W_n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_n &= n\beta_n \frac{\partial^{n-1} g_1}{\partial z^{n-1}} \Big|_{z=0} + n(n-1)\beta_n \frac{\partial^{n-2} g_2}{\partial z^{n-2}} \Big|_{z=0} + n(n-1)(n-2)\beta_n \frac{\partial^{n-3} g_3}{\partial z^{n-3}} \Big|_{z=0} \\ &\ll \frac{\partial^{n-1} h_1}{\partial z^{n-1}} \Big|_{z=0} + \frac{\partial^{n-2} h_2}{\partial z^{n-2}} \Big|_{z=0} + (n-2) \frac{\partial^{n-3} h_3}{\partial z^{n-3}} \Big|_{z=0} = W_n, \quad n \geq 3. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что задача (22), (23) будет мажорантной для (19), (20). Сводя (22), (23) к задаче типа Ковалевской, продифференцируем уравнение (22) по z , разрешим его относительно W_{zzz} и добавим третье краевое условие $W_{zz}(t, 0) = W_2(t)$. При этом, чтобы не возникло путаницы, по какой именно переменной идёт дифференцирование, используем обозначение $h_3 = h_3(t, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$. Задача (22), (23) примет вид

$$W_{zzz} = \frac{1}{1 - z \frac{\partial h_3}{\partial y_5}} \left(\frac{\partial^2 h_1}{\partial z^2} + \frac{\partial h_2}{\partial z} + h_3 + z \frac{\partial h_3}{\partial y_1} + z \frac{\partial h_3}{\partial y_2} W_z + z \frac{\partial h_3}{\partial y_3} W_z + z \frac{\partial h_3}{\partial y_4} W_{zz} \right), \quad (25)$$

$$W(t, z)|_{z=0} = W_0(t), \quad W_z(t, z)|_{z=0} = W_1(t), \quad W_{zz}(t, z)|_{z=0} = W_2(t). \quad (26)$$

Теперь мы имеем задачу (25), (26) типа Ковалевской с аналитическими входными данными. По теореме Коши — Ковалевской получаем, что ряды (21) имеют ненулевой радиус сходимости. Второй этап доказательства завершён, теорема доказана. \square

3. ОСОБЫЕ СЛУЧАИ

В этом разделе мы последовательно рассмотрим оставшиеся возможные решения системы (10), которые также представляют интерес.

Нулевое решение $u_1, v_1 \equiv 0$ системы (10) приводит к тривиальному решению задачи (7), (8), поскольку, как несложно показать индукцией по k , в этом случае $v_k = u_k = 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$.

Замечание. Тривиальное решение $u, v \equiv 0$ (нулевой фон) и нетривиальное, построенное в ходе доказательства теоремы, стыкуясь на кривой $x = a(t)$ (фронте), совместно образуют диффузионную волну.

Что же касается оставшихся решений $u_1 \neq 0, v_1 \equiv 0$ и $u_1 \equiv 0, v_1 \neq 0$, то здесь мы приведём контрпример, показывающий, что в таком случае исходная задача может как иметь, так и не иметь аналитического решения.

Рассмотрим задачу (7), (8), эквивалентную исходной, в случае следующих заданных функций:

$$\begin{aligned} a(t) &= -ct, \quad c = \text{const} > 0, \quad F(u, v) \equiv 0, \quad G(v, u) = u, \\ P(u) &\equiv 1, \quad Q(v) = 1 + \alpha v, \quad \alpha = \text{const}. \end{aligned}$$

Задача примет вид

$$\begin{aligned} u_t + cu_z &= uu_{zz} + u_z^2, \\ v_t + cv_z &= vv_{zz} + (1 + \alpha v)v_z^2 + u, \end{aligned} \tag{27}$$

$$u(t, z)|_{z=0} = v(t, z)|_{z=0} = 0. \tag{28}$$

Контрпример. Пусть теперь $u_1 = -a'/P(0) = c$ и $v_1 \equiv 0$. В силу выбранной функции $F(u, v) \equiv 0$ задачу (27), (28) можно разбить на две, решаемые последовательно:

$$\begin{aligned} u_t + cu_z &= uu_{zz} + u_z^2, \quad u(t, z)|_{z=0} = 0; \\ v_t + cv_z &= vv_{zz} + (1 + \alpha v)v_z^2 + u, \quad v(t, z)|_{z=0} = 0. \end{aligned} \tag{29}$$

Несложно показать, что решением первой задачи (29) будет функция $u = cz$. В таком случае вторая задача примет вид

$$\begin{aligned} v_t + cv_z &= vv_{zz} + (1 + \alpha v)v_z^2 + cz, \\ v(t, z)|_{z=0} &= 0. \end{aligned} \tag{30}$$

Решение (30) строится в виде ряда Тейлора

$$v(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(t) \frac{z^n}{n!} \tag{31}$$

согласно уже известной процедуре. Покажем, что в условиях нашего примера ряд (31) сходится лишь в одной точке $z = 0$ и задача не имеет аналитического решения. Для этого воспользуемся формулой Даламбера для определения радиуса сходимости R :

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{v_n (n+1)!}{n! v_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|v_n|(n+1)}{|v_{n+1}|}. \tag{32}$$

Коэффициенты ряда (31) определяются по формулам

$$v_0 = v_1 = 0, \quad v_2 = 1/P(0) = 1,$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{c} \left(-v'_n + \sum_{k=2}^n C_n^k v_k v_{n+2-k} + \alpha \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^k C_n^k C_k^l v_{n-k} v_{l+1} v_{k+1-l} + \sum_{l=1}^{n-1} C_n^l v_{l+1} v_{n+1-l} \right).$$

Видно, что все они не зависят от переменной t , а значит, $-v'_n \equiv 0$. Следовательно, все коэффициенты ряда (31) неотрицательны, и справедливо следующее неравенство:

$$v_{n+1} \geq C_n^2 v_2 v_n c = \frac{(n-1)nv_n}{2c}.$$

Пользуясь этим неравенством, получаем оценку

$$0 \leq \frac{|v_n|(n+1)}{|v_{n+1}|} = \frac{v_n(n+1)}{v_{n+1}} \leq \frac{2cv_n(n+1)}{(n-1)nv_n} = \frac{2c(n+1)}{(n-1)n}.$$

Таким образом, подпредельное выражение в формуле (32) ограничено двумя бесконечно малыми последовательностями. Следовательно, радиус сходимости ряда (31) равен нулю: $R = 0$. Аналитического решения задачи не существует.

В рамках этого же контрпримера рассмотрим другой случай. Пусть теперь $u_1 = 0$ и $v_1 \equiv c$. Индукцией по k несложно показать, все $u_k = 0$, т. е. нулевой коэффициент $u_1 = 0$ приводит к тривиальному решению $u \equiv 0$ первой задачи (29). Вторая система принимает вид

$$v_t + cv_z = vv_{zz} + (1 + \alpha v)v_z^2,$$

$$v(t, z)|_{z=0} = 0. \quad (33)$$

Следуя процедуре, предложенной в доказательстве основной теоремы, можно доказать, что (33) имеет единственное аналитическое нетривиальное решение.

Отметим, что данный контрпример является обобщением представленного ранее в статье [26], он переходит в последний при $\alpha = 0$.

4. ВЕРИФИКАЦИЯ ЧИСЛЕННЫХ РЕШЕНИЙ

Отрезки рядов, построенные с помощью соотношений (11)–(16), могут быть использованы для тестирования численных методов решения задачи (5), (6). Ранее авторами были разработаны алгоритмы решения нелинейных параболических уравнений, подобных входящим в систему (5), на основе метода граничных элементов (МГЭ) [17]. Тот же подход может быть распространён на краевые задачи для систем типа реакция-диффузия.

Представим задачу (5), (6) в произвольный момент времени $t > 0$ в виде системы двух уравнений Пуассона:

$$u_{xx} = \frac{1}{u} [u_t - P(u)u_x^2 - F(u, v)],$$

$$v_{xx} = \frac{1}{v} [v_t - Q(v)v_x^2 - G(v, u)] \quad (34)$$

с краевыми условиями

$$u|_{x=a(t)} = 0, \quad u_x|_{x=a(t)} = -\frac{a'(t)}{P(0)}, \quad (35)$$

$$v|_{x=a(t)} = 0, \quad v_x|_{x=a(t)} = -\frac{a'(t)}{Q(0)}. \quad (36)$$

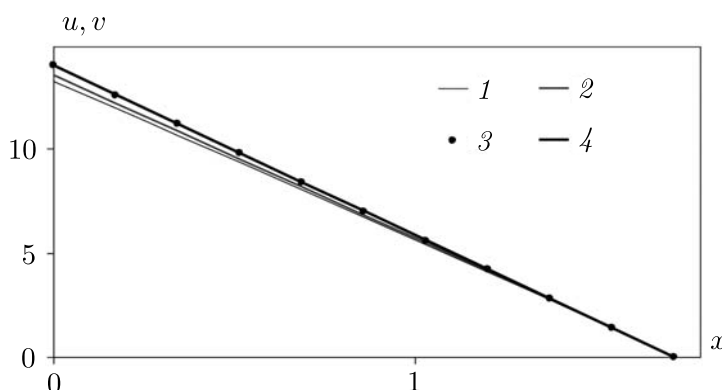
Условия для производных в (35), (36) следуют из соотношений (11).

Задача (34)–(36) может быть решена по шагам по времени. На каждом шаге $t = t_k$ применяется итерационный метод граничных элементов при нулевых начальных приближениях для искомых функций. На каждой итерации правые части уравнений (34) вычисляются для предыдущей итерации, на первой итерации они полагаются нулевыми. Таким образом, на шаге t_k мы получим непрерывные и дифференцируемые по x искомые функции u и v . В приведённых ниже примерах решения МГЭ и решения в виде степенных рядов сравниваются между собой, а также с известным точным решением.

Пример 1. Рассмотрим задачу (5), (6) при $P(u) = 1/\sigma$, $Q(v) = 1/\delta$, где σ, δ — положительные константы, $F(u, v) = v$, $Q(u, v) = u$. Этот случай соответствует степенным функциям $\Phi'(T) = T^\sigma$, $\Psi'(S) = S^\delta$ в системе (5). Очевидно, что при $\sigma = \delta$ мы имеем тождество $u(t, x) \equiv v(t, x)$. При $a(t) = e^t - 1$ известно точное решение [25]:

$$u(t, x) = v(t, x) = \sigma e^t (e^t - x - 1). \tag{37}$$

Решение методом степенных рядов даст нам следующие значения коэффициентов: $u_1 = v_1 = -\sigma e^t$, $u_i = v_i = 0$, $i > 1$. Таким образом, мы получим в точности решение (37). Результаты численного решения с помощью предложенного алгоритма показали равенство полученных функций $u(t, x)$ и $v(t, x)$ на каждом шаге по времени. На рисунке показано сравнение численных решений при $\sigma = \delta = 3$ в момент времени $t = 1$ и различных шагах по времени h с решением (37). Расчёты показали «машинную» сходимость разработанного алгоритма численного решения относительно шага по времени.



Сравнение численных решений в момент времени $t = 1$ и различных шагах по времени h с решением (37): $h = 0,1$ (1); $h = 0,05$ (2); $h = 0,005$ (3); точное решение (4)

Пример 2. Рассмотрим теперь случай, когда функции $\Phi'(T)$ и $\Psi'(S)$ не являются степенными. Пусть в задаче (5), (6) $P(u) = \sigma/(\sigma + u)$, $Q(v) = \delta/(\delta + v)$, где σ, δ — вновь положительные константы, $F(u, v) = v^3$, $Q(u, v) = u$, $a(t) = ct$. Принятый вид функций $P(u)$ и $Q(v)$ соответствует показательным функциям $\Phi'(T)$ и $\Psi'(S)$. Решения методами степенных рядов и граничных элементов были построены при $\sigma = 3$, $\delta = 1$, $c = 1$. Проиллюстрируем их вновь для момента времени $t = 1$. В табл. 1 приведены наибольшие невязки уравнений (5) на отрезке $x \in [0, a(1)]$, построенные при подстановке отрезков рядов

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^N u_n(t) \frac{(x - a(t))^n}{n!}, \quad v(t, x) = \sum_{n=0}^N v_n(t) \frac{(x - a(t))^n}{n!}$$

различных степеней.

Таблица 1

Невязки уравнений системы (7) для отрезков рядов

N	3	5	10	15
Уравнение 1	0,68	0,22	0,0062	0,0012
Уравнение 2	0,025	0,017	0,0011	0,00011

Приведённые невязки показывают, что область $x \in [0, a(1)]$, где искомые функции положительны, не выходит за радиусы сходимости рядов. Следовательно, отрезки рядов достаточной степени могут быть использованы в качестве эталонных для верификации численных решений. В табл. 2 показано сравнение пошаговых решений МГЭ с отрезками рядов. Приведены значения искомых функций при $t = 1$ в трёх точках. Максимальная разница между решениями, как и в примере 1, наблюдается при $x = 0$, что соответствует принятым краевым условиям: на фронте волны (при $x = a(t)$) решения совпадают. Данные в табл. 2 говорят о сходимости численных решений относительно шага по времени, причём они сходятся к решению методом степенных рядов.

Таблица 2

Сравнение численных решений с отрезками рядов

Функция	Решение	$x = 0$	$x = 0, 3a(1)$	$x = 0, 7a(1)$
u	Ряд, $N = 3$	1,08179	0,7403	0,3075
u	Ряд, $N = 5$	1,01799	0,7251	0,3069
u	Ряд, $N = 10$	1,02577	0,7261	0,3070
u	Ряд, $N = 15$	1,02583	0,7261	0,3070
u	МГЭ, $h = 0, 1$	1,02058	0,7225	0,3057
u	МГЭ, $h = 0, 01$	1,02465	0,7253	0,3066
u	МГЭ, $h = 0, 005$	1,02500	0,7254	0,3067
v	Ряд, $N = 3$	0,8796	0,6587	0,2968
v	Ряд, $N = 5$	0,8855	0,6604	0,2968
v	Ряд, $N = 10$	0,8861	0,6605	0,2968
v	Ряд, $N = 15$	0,8861	0,6605	0,2968
v	МГЭ, $h = 0, 1$	0,8985	0,6654	0,2974
v	МГЭ, $h = 0, 01$	0,8880	0,6613	0,2969
v	МГЭ, $h = 0, 005$	0,8870	0,6609	0,2969

Таким образом, проведённые расчёты показали возможность использования построенных аналитических решений задачи (5), (6) для верификации численных решений, а также эффективность разработанного численного алгоритма.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Отметим, что в настоящей работе для нелинейной параболической системы типа реакция-диффузия рассмотрена задача о движении диффузионной волны по покоящемуся фону, для которой доказана новая теорема существования решения в классе аналитических функций. Предложен численный метод построения решений указанной задачи на основе метода граничных элементов. Численные решения верифицированы сравнением с отрезками аналитических решений.

Полученные результаты, помимо сугубо математического содержания, могут представлять интерес с точки зрения математического моделирования байкальской биоты, в частности процессов изменения численности популяций организмов, динамически развивающихся в пространстве и времени. Моделирование позволяет выявлять свойства популяций и систем взаимодействующих видов, осуществлять мониторинг экологических систем, прогнозировать изменение численности и ареалов распространения [8].

В указанном контексте содержательным направлением развития полученных результатов стало бы рассмотрение для системы (2) задачи оптимального управления в классе гладких управляющих воздействий [27]. Однако перенос разработанных ранее подходов на нелинейный случай представляется непростой задачей. Также интерес представляет рассмотрение иных постановок начально-краевых условий [19], когда построение аналитического решения производится в виде кратных рядов, коэффициенты которых определяются [28] при решении систем линейных алгебраических уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Stepanova I. V.* Group analysis of variable coefficients heat and mass transfer equations with power nonlinearity of thermal diffusivity // *Appl. Math. Comput.* 2019. V. 343. P. 57–66; DOI: 10.1016/j.amc.2018.09.036
2. *Земсков Е. П.* Неустойчивость Тьюринга в реакционно-диффузионных системах с нелинейной диффузией // *Журн. эксперимент. и теор. физики.* 2013. Т. 144, № 4. С. 878–884.
3. *Шмидт А. В.* Точные решения систем уравнений типа реакция-диффузия // *Вычисл. технологии.* 1998. Т. 3, № 4. С. 87–94.
4. *Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Физматлит, 1966.
5. *Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.
6. *Vazquez J. L.* The Porous Medium Equation: Mathematical Theory. Oxford: Clarendon Press, 2007.
7. *Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М.* Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972.
8. *Murray J.* Mathematical Biology: I. An Introduction. N. Y.: Springer-Verl., 2002. (Interdisciplinary Applied Mathematics. Vol. 17).
9. *Леонтьев Н. Е.* Точные решения задачи о фильтрации суспензии с замедлением скачка концентрации в рамках нелинейной двухскоростной модели // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа.* 2017. № 1. С. 168–174; DOI: 10.7868/S0568528117010108
10. *Arguchintsev A., Poplevko V.* An optimal control problem by a hybrid system of hyperbolic and ordinary differential equations // *Games.* 2021. V. 12, N 1. P. 23; DOI: 10.3390/g12010023
11. *Arguchintsev A., Poplevko V.* An optimal control problem by a hyperbolic system with boundary delay // *The Bulletin of Irkutsk State Univ. Ser.: Mathematics.* 2021. V. 35. P. 3–17; DOI: 10.26516/1997-7670.2021.35.3
12. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.
13. *Gambino G., Lombardo M. C., Sammartino M., Sciacca V.* Turing pattern formation in the Brusselator system with nonlinear diffusion // *Phys. Rev. E.* 2013. V. 88. P. 042925.
14. *Шмидт А. В.* Анализ систем реакция-диффузия методом линейных определяющих уравнений // *Журн. вычисл. математики и мат. физики.* 2007. Т. 47, № 2. С. 256–268.
15. *Сидоров А. Ф.* Избранные труды: Математика. Механика. М.: Физматлит, 2001.
16. *Filimonov M. Yu.* Representation of solutions of boundary value problems for nonlinear evolution equations by special series with recurrently calculated coefficients // *J. Physics. Conf. Ser.* 2019. P. 012071; DOI: 10.1088/1742-6596/1268/1/012071

17. Казаков А. Л., Спевак Л. Ф. Методы граничных элементов и степенных рядов в одномерных задачах нелинейной фильтрации // Изв. Иркутск. гос. ун-та. Сер. Математика. 2012. Т. 5, № 2. С. 2–17.
18. Казаков А. Л., Кузнецов П. А. Об одной краевой задаче для нелинейного уравнения теплопроводности в случае двух пространственных переменных // Сиб. журн. индустр. математики. 2014. Т. 17, № 1(57). С. 46–54.
19. Казаков А. Л., Кузнецов П. А. Об аналитических решениях одной специальной краевой задачи для нелинейного уравнения теплопроводности в полярных координатах // Сиб. журн. индустр. математики. 2018. Т. 21, № 2(74). С. 56–65.
20. Spevak L. F., Nefedova O. A. Solving a two-dimensional nonlinear heat conduction equation with degeneration by the boundary element method with the application of the dual reciprocity method // AIP Conf. Proc. 2016. V. 1785. P. 040077; DOI: 10.1063/1.4967134
21. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
22. Polyanin A. D., Zaitsev V. F. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations. Boca Raton; London; N. Y.: Chapman and Hall/CRC, 2012.
23. Кудряшов Н. А., Синельщиков Д. И. Аналитические решения нелинейного уравнения конвекции-диффузии с нелинейными источниками // Моделирование и анализ информационных систем. 2016. Т. 23, № 3. С. 309–316; DOI: 10.18255/1818-1015-2016-3-309-316
24. Казаков А. Л., Орлов Св. С., Орлов С. С. Построение и исследование некоторых точных решений нелинейного уравнения теплопроводности // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 3. С. 544–560; DOI: 10.17377/smzh.2018.59.306
25. Казаков А. Л., Спевак Л. Ф. Приближенные и точные решения вырождающегося нелинейного уравнения теплопроводности с произвольной нелинейностью // Известия Иркутск. гос. ун-та. Сер. Математика. 2020. Т. 34. С. 18–34; DOI: 10.26516/1997-7670.2020.34.18
26. Kazakov A. L., Kuznetsov P. A., Lempert A. A. Analytical solutions to the singular problem for a system of nonlinear parabolic equations of the reaction-diffusion type // Symmetry. 2020. V. 12, N 6. P. 999; DOI: 10.3390/SYM12060999
27. Arguchintsev A., Poplevko V. An optimal control problem by parabolic equation with boundary smooth control and an integral constraint // Numerical Algebra, Control and Optimization. 2018. V. 8, N 2. P. 193–202; DOI: 10.3934/naco.2018011
28. Баутин С. П., Казаков А. Л. Обобщенная задача Коши и ее приложения. Новосибирск: Наука, 2006.

UDC 517.957

**CONSTRUCTION OF SOLUTIONS TO THE BOUNDARY VALUE
PROBLEM WITH SINGULARITY
FOR A NONLINEAR PARABOLIC SYSTEM**

© 2021 A. L. Kazakov^{1a}, P. A. Kuznetsov^{1b}, L. F. Spevak^{2,3c}

¹*Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS,
ul. Lermontova 134, Irkutsk 664033, Russia;*

²*Institute of Engineering Science of UB RAS,
ul. Komsomolskaya 34, Ekaterinburg 620049, Russia;*

³*Ural State University of Railway Transport,
ul. Kolmogorova 66, Ekaterinburg 620034, Russia*

E-mails: ^akazakov@icc.ru, ^bkuznetsov@icc.ru, ^clfs@imach.uran.ru

Received 11.05.2021, revised 11.05.2021, accepted 21.10.2021

Abstract. The paper considers a system of two nonlinear second-order parabolic equations with singularity. Systems of this type are applied in chemical kinetics to describe reaction-diffusion processes. We prove the existence and uniqueness theorem of the analytical solution having the diffusion-wave type at a given wave front. The proof is constructive, and the solution is constructed in the form of a power series with recursively calculated coefficients. Besides, we propose a numerical algorithm based on the boundary element method. For its verification, we use segments of analytical solutions.

Keywords: nonlinear parabolic equations with singularity, reaction-diffusion system, power series, existence and uniqueness theorem, boundary element method, computational experiment, diffusion wave.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.405

REFERENCES

1. Stepanova I.V. Group analysis of variable coefficients heat and mass transfer equations with power nonlinearity of thermal diffusivity. *Appl. Math. Comput.*, 2019, Vol. 343, pp. 57–66; DOI: 10.1016/j.amc.2018.09.036
2. Zemskov E.P. Turing instability in reaction-diffusion systems with nonlinear diffusion. *J. Experimental Theor. Phys.*, 2013. Vol. 117, pp. 764–769; DOI: 10.1134/S1063776113120194
3. Schmidt A.V. Точные решения систем уравнений типа реакция-диффузия [Exact solutions of the systems of reaction-diffusion type equations]. *Вычисл. технологии* [Computational Technologies], 1998, Vol. 3, No. 4, pp. 87–94.
4. Zel'dovich Ya.B., Raizer Yu.P. Physics of Shock Waves and High Temperature Hydrodynamics Phenomena. N.-Y.: Dover Publ., 2002.
5. Samarskii A.A., Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P., Mikhailov A.P. Blow-up in Quasilinear Parabolic Equations. Berlin, N.-Y.: Walter de Gruyter, 1995.
6. Vazquez J.L. The Porous Medium Equation: Mathematical Theory. Oxford: Clarendon Press, 2007.
7. Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhik V.M. Theory of unsteady filtration of fluids and gases. Moscow: Nedra, 1972 (in Russian).

8. Murray J. *Mathematical Biology: I. An Introduction*. N. Y.: Springer Verl., 2002, Vol. 17 (Interdisciplinary Applied Mathematics).
9. Leont'ev N.E. Exact solutions to the problem of deep-bed filtration with retardation of a jump in concentration within the framework of the nonlinear two-velocity model. *Fluid Dynamics*, 2017, Vol. 52, pp. 165–170; DOI: 10.1134/S0015462817010161
10. Arguchintsev A., Poplevko V. An optimal control problem by a hybrid system of hyperbolic and ordinary differential equations. *Games*, 2021, Vol. 12, No 1, pp. 23; DOI: 10.3390/g12010023
11. Arguchintsev A., Poplevko V. An optimal control problem by a hyperbolic system with boundary delay. *The Bulletin of Irkutsk State Univ.*, Ser.: Mathematics, 2021, Vol. 35, pp. 3–17; DOI: 10.26516/1997-7670.2021.35.3
12. Demidenko G.V., Uspenskii S.V. *Partial Differential Equations and Systems not Solvable with Respect to the Highest-Order Derivative*. N.-Y., Basel: Marcel Dekker, 2003.
13. Gambino G., Lombardo M.C., Sammartino M., Sciacca V. Turing pattern formation in the Brusselator system with nonlinear diffusion. *Phys. Rev. E*, 2013, Vol. 88, pp. 042925.
14. Schmidt A.V. Analysis of reaction-diffusion systems by the method of linear determining equations. *Comp. Math. Math. Phys.*, 2007, Vol. 47, pp. 249–261; DOI: 10.1134/S0965542507020091
15. Sidorov A.F. *Selected Works: Mathematics. Mechanics*. Moscow: Fizmatlit, 2001 (in Russian).
16. Filimonov M.Yu. Representation of solutions of boundary value problems for nonlinear evolution equations by special series with recurrently calculated coefficients. *J. Physics. Conf. Ser.*, 2019, pp. 012071; DOI: 10.1088/1742-6596/1268/1/012071
17. Kazakov A.L., Spevak L.F. Boundary element method and power series method for onedimensional nonlinear filtration problems. *The Bulletin of Irkutsk State Univ.*, Ser.: Mathematics, 2012, Vol. 5, No. 2, pp. 2–17 (in Russian).
18. Kazakov A.L., Kuznetsov P.A. On one boundary value problem for a nonlinear heat equation in the case of two space variables. *J. Appl. Indust. Math.*, 2014, Vol. 8, pp. 227–235; DOI: 10.1134/S1990478914020094
19. Kazakov A.L., Kuznetsov P.A. On the Analytic Solutions of a Special Boundary Value Problem for a Nonlinear Heat Equation in Polar Coordinates. *J. Appl. Indust. Math.*, 2018, Vol. 12, pp. 255–263; DOI: 10.1134/S1990478918020060
20. Spevak L.F., Nefedova O.A. Solving a two-dimensional nonlinear heat conduction equation with degeneration by the boundary element method with the application of the dual reciprocity method. *AIP Conf. Proc.*, 2016, Vol. 1785, pp. 040077; DOI: 10.1063/1.4967134
21. Ovsianikov L.V. *Group Analysis of Differential Equations*. N.-Y.: Academic Press, 1982.
22. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*. Boca Raton; London; N. Y.: Chapman and Hall/CRC, 2012.
23. Kudryashov N.A., Sinelshchikov D.I. Analytical Solutions for Nonlinear Convection–Diffusion Equations with Nonlinear Sources. *Automatic Control and Computer Sci.*, 2017, Vol. 51, No. 7, pp. 621–626; DOI: 10.3103/S0146411617070148
24. Kazakov A.L., Orlov Sv.S., Orlov S.S. Construction and study of exact solutions to a nonlinear heat equation. *Siberian Math. J.*, 2018, Vol. 59, No. 3., pp. 427–441; DOI: 10.1134/S0037446618030060
25. Kazakov A.L., Spevak L.F. Approximate and exact solutions to the singular nonlinear heat equation with a common type of nonlinearity. *Bull. Irkutsk State Univ.*, Ser.: Mathematics, 2020, Vol. 34, pp. 18–34 (in Russian); DOI: 10.26516/1997-7670.2020.34.18
26. Kazakov A.L., Kuznetsov P.A., Lempert A.A. Analytical solutions to the singular problem for a system of nonlinear parabolic equations of the reaction-diffusion Type. *Symmetry*, 2020, Vol. 12, No. 6, pp. 999; DOI: 10.3390/SYM12060999
27. Arguchintsev A., Poplevko V. An optimal control problem by parabolic equation with boundary smooth control and an integral constraint. *Numerical Algebra, Control and Optimization*, 2018, Vol. 8, No. 2, pp. 193–202; DOI: 10.3934/naco.2018011
28. Bautin S.P., Kazakov A.L. *Generalized Cauchy Problem with Applications*. Novosibirsk: Nauka, 2006 (in Russian).