СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ. 2021. Т. 24, № 4. С. 79–96

УДК 539.3

ОБОБЩЁННАЯ ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЁ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДЛЯ АНАЛИЗА МИКРОСТРУКТУРЫ ГЕТЕРОГЕННОЙ СРЕДЫ

© 2021 А. В. Мишин[1,2]

[1]*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, ул. Институтская, 4/1, г. Новосибирск 630090, Россия,*
[2]*Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 1, г. Новосибирск 630090, Россия*

E-mail: alekseymishin1994@gmail.com

Поступила в редакцию 02.07.2021 г.; после доработки 27.08.2021 г.;
принята к публикации 21.10.2021 г.

Проведён аналитический учёт влияния внутренних границ гетерогенной среды на распространение упругого поля напряжений по ней. Введённой математической концепцией, направленной отобразить микроструктуру гетерогенной системы, выступает производная в обобщённом смысле. Базируясь на формализме обобщённой производной, выполнена модификация оператора в используемой исходной модели линейной теории упругости. Функция Грина, построенная на преобразованном операторе, отображает микроструктурные особенности системы. Для получения эффективных коэффициетов упругости, входящих в осреднённые уравнения и описывающих упругие свойства гетерогенной среды, использован метод условных моментов. Проведение операций в рамках данного подхода приводит к интегралам, содержащим модифицированную осреднённую функцию Грина и корреляционную функцию геометрии структуры. На основании этих членов микроструктура системы интегрально учтена в итоговых эффективных коэффициентах упругости.

Ключевые слова: гетерогенная среда, микроструктура, обобщённая производная, функция Грина, стохастическая модель, осреднение.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.406

ВВЕДЕНИЕ

Одним из нерешённых вопросов аналитического моделирования гетерогенных сред является учёт микроструктуры системы (геометрии и физических свойств фаз). Данная задача связана с описанием характера распространения исследуемого поля по неоднородной системе и подразумевает получение зависимости, отображающей влияние характерных масштабов фаз в среде и их физических свойств на поведение поля. Ключевым аспектом здесь является определение эффективных коэффициентов переноса для гетерогенной среды. На данный момент существует ряд континуальных подходов по моделированию гетерогенных сред: метод условных моментов [1, 2], вариационный метод [3–6], метод самосогласованного поля [6–10], статистические методы, базирующиеся на функции Грина [2, 11, 12], сингулярное и обобщённое сингулярное приближение [6], гипотеза сильной изотропии [3, 13], теория смесей [14], анализ периодических сред [15], модели Мори, Танаки [16], Понте Кастанеды, Уиллиса [17], гомогенизированная модель [18]. Большая часть этих подходов ориентирована на получение осреднённых уравнений с входящими в них эффективными коэффициентами переноса. Несмотря на

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (проект 075-15-2020-781).

имеющийся обширный математический формализм, корректно учесть микроструктурные особенности гетерогенной системы на данный момент не удалось. Фактически задача по описанию микроструктуры гетерогенной системы сводится к учёту в математической модели поведения поля на конфигурации внутренних границ, разделяющих занятые фазами области с разными свойствами.

Для решения представленной задачи в настоящей работе производную предлагается рассмотреть в обобщённом смысле [19]. Соответствующая производная содержит обычную и сингулярную составляющие. Сингулярная часть выражает разрывы поля на поверхностях, что является необходимым при анализе гетерогенной среды, характеризуемой развитой системой внутренних границ, разделяющих фазы с разными физическими свойствами. Проведение осреднения результата действия на поле производной в обобщённом смысле приводит к пространственной теореме осреднения в рамках теории смесей [14], что подтверждает описанный смысл обобщённой производной. В исходной модели, в качестве которой рассматривается линейная стационарная модель теории упругости, произведена замена обычных производных на обобщённые. При этом сохраняется корректность постановки задачи и физическая суть модифицированных уравнений. Модифицированный обобщёнными производными оператор в исходной модели содержит информацию о микроструктуре системы. Определяемая действующим оператором функция Грина отображает отклик поля в среде на приложенное воздействие с учётом неоднородных свойств системы. Описание гетерогенной среды осуществляется в рамках метода условных моментов (МУМ) [1]. Функционал данного подхода базируется на формализме функций Грина, условном осреднении и преобразовании Фурье. МУМ удаётся получить осреднённые уравнения с эффективными коэффициентами упругости для среды в целом и для каждой фазы отдельно. В результате применения условного осреднения и преобразования Фурье в рамках МУМ возникает свёртка, выделяющая интегралы, содержащие осреднённую функцию Грина и корреляционную функцию геометрии структуры. Это в свою очередь приводит к интегральному учёту микроструктуры системы в итоговых эффективных коэффициентах, входящих в осреднённые уравнения.

1. ОБОБЩЁННАЯ ПРОИЗВОДНАЯ

Для описания поля упругости в гетерогенной среде с учётом внутренних границ введём концепцию производной в обобщённом смысле в смысле функционального анализа [19]. В одномерном случае выражение для обобщённой производной согласно [19] имеет вид

$$\nabla u(x) = \partial u(x) + \sum_k [u]_{x_k} \delta(x - x_k),$$

где символ ∇ отождествляется с обобщённой производной, символ ∂ характеризует обычную производную, запись $[u]_{x_k}$ характеризует скачок поля на границе $[u]_{x_k} = u(x_k + 0) - u(x_k - 0)$, представляющей собой точку x_k. Обобщённая производная отличается от обычной наличием сингулярной составляющей, выраженной конфигурацией дельта-функций $\delta(x - x_k)$ в точках x_k, в которых поле терпит разрыв.

Обобщим представленное выражение для обобщённой производной, действующей на поле смещений, на случай произвольной размерности пространства:

$$\nabla_j u_i(\mathbf{r}) = \partial_j u_i(\mathbf{r}) + \int\limits_S [u_i]_{\mathbf{x}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{x})\, ds_j, \tag{1}$$

где $d\,\mathbf{s}$ — вектор, выражающий ориентированную площадку, расстояние до которой определяется длиной радиус-вектора $\mathbf{x}$; запись $[u_i]_{\mathbf{x}}$ характеризует скачок смещений фаз на границе $[u_i]_{\mathbf{x}} = u_i(\mathbf{x} + \mathbf{0}) - u_i(\mathbf{x} - \mathbf{0})$. Сингулярная составляющая для обобщённой производной $\boldsymbol{\nabla}$ в (1) выражается в подынтегральном выражении конфигурацией дельта-функций на поверхностях разрыва, т. е. согласно формуле (1) каждой точке $\mathbf{x}$ поверхности разрыва соответствует своя дельта-функция $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{x})$. Поверхностный интеграл формулы (1) включает всю совокупность поверхностей разрыва в исследуемой системе $S=\sum\limits_k S_k$, т. е. имеет место равенство

$$\int\limits_S [u_i]_{\mathbf{x}}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{x})\,ds_j=\sum_k\int\limits_{S_k}[u_i]_{\mathbf{x}}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{x})\,ds_j.$$

Формула (1) не конкретизирует, какая фаза гетерогенной среды рассматривается в исследуемой области и переход между какими фазами $[u_i]_{\mathbf{x}}$ осуществляется при пересечении границы. Выражение (1) ориентировано на описание всей анализируемой области, разница $[u_i]_{\mathbf{x}}$ при этом отражает совокупность возможных переходов между фазами. Базируясь на формуле (1), определим нужную для дальнейших выкладок обобщённую производную для каждой из областей неоднородной системы, занятой фазой 1:

$$\nabla_j u_i^1(\mathbf{r})=\partial_j u_i^1(\mathbf{r})+\int\limits_{S_{12}} u_i^1(\mathbf{x}-\mathbf{0})\delta(\mathbf{r}-\mathbf{x})\,ds_j. \tag{2}$$

Данная формула следует из (1) при рассмотрении области, соответствующей фазе 1, с учётом равенства $u_i^1(\mathbf{x}+\mathbf{0})=0$ и изменения ориентации площадки ds_j (смена S на S_{12} направлена отобразить это). Граничное условие $u_i^1(\mathbf{x}+\mathbf{0})=0$ характеризует то, что область вне границы, занимаемой фазой 1, не входит в анализируемую область. (Подобный приём используется в [19]). Равенство $u_i^1(\mathbf{x}+\mathbf{0})=0$ можно интерпретировать тем фактом, что при переходе через границу фаза 1 сменяется фазой 2 и поэтому смещение для фазы 1 там отсутствует, т. е. формула (2) для обобщённой производной является «обрезанной» с точки зрения выхода за рассматриваемую область, занимаемую определённой фазой. Аналогичное выражение справедливо и для области, занимаемой фазой 2, с точностью до ориентации площадки.

Представленный формулой (1) вид обобщённой производной не противоречит формализму источника [19], в котором сингулярная составляющая записывается через так называемую поверхностную дельта-функцию. Дальнейшие выкладки продемонстрируют справедливость представления в формуле (1) (и формулы (2)) поверхностной дельта-функции.

Утверждение 1. *Обобщённая производная* (1) *через соответствующую ей сингулярную составляющую описывает поведение поля на границах раздела фаз гетерогенной среды.*

Доказательство. Данное утверждение подтверждается тем фактом, что осреднение формул (1), (2) приводит к пространственной теореме осреднения, полученной в рамках теории смесей [14]. Для доказательства приведём формулы пространственного осреднения:

$$\langle u_i\rangle(\mathbf{R})=\frac{1}{V}\int\limits_V u_i(\mathbf{R}+\mathbf{y})\,d\mathbf{y},\quad c_1\langle u_i^1\rangle(\mathbf{R})=\frac{V_1}{V}\frac{1}{V_1}\int\limits_{V_1}u_i^1(\mathbf{R}+\mathbf{y})\,d\mathbf{y},\quad c_1=V_1/V, \tag{3}$$

где V — характерный (представительный [14]) объём системы, V_1 — объём, занимаемый фазой 1, c_1 — объёмная концентрация фазы 1 ($c_1+c_2=1$), $\langle u_i\rangle$ — средний вектор смещения в среде: $\langle u_i\rangle=c_1\langle u_i^1\rangle+c_2\langle u_i^2\rangle$, $\langle u_i^1\rangle$, $\langle u_i^2\rangle$ — осреднённые смещения фаз. Базируясь на формулах (3), проведём осреднение выражений (1), (2):

$$\begin{gathered}\langle\nabla_j u_i\rangle(\mathbf{R})=\partial_j\langle u_i\rangle(\mathbf{R})+\frac{1}{V}\int\limits_S [u_i]_{\mathbf{R}+\mathbf{x}}\,ds_j,\\ c_1\langle\nabla_j u_i^1\rangle(\mathbf{R})=c_1\partial_j\langle u_i^1\rangle(\mathbf{R})+\frac{1}{V}\int\limits_{S_{12}}u_i^1(\mathbf{R}+\mathbf{x}-\mathbf{0})\,ds_j.\end{gathered} \tag{4}$$

Формулы (4) выражают собой пространственную теорему осреднения в рамках теории смесей [14]. Если сложить второе выражение в (4) с записанным по аналогии выражением для фазы 2 с учётом изменения ориентации площадки (смена S_{12} на S_{21}), то получится первое выражение в (4). Пространственной теоремой осреднения предсказывается влияние на поле в пространстве структуры внутренних границ, т. е. формулами (4) через поверхностные интегралы отображаются микроструктурные особенности гетерогенной системы. Однако анализ поверхностных интегралов в (4) является существенной проблемой в рамках теории смесей. Стоит отметить, что в других имеющихся исследованиях [1–18] границы либо не учитываются (соответственно и размеры), либо их учёт производится с введением упрощений (например, рассмотрение периодической структуры или введение феноменологических коэффициентов), не отображающих специфику анализируемой структуры. □

Заметим также, что из формализма обобщённой производной можно получить формулу Гаусса — Остроградского. Для этого формулу (2) следует проинтегрировать по объёму в области с объёмом V и границей S и приравнять полученное выражение к нулю. Использование формулы (1) также приводит к формуле Гаусса — Остроградского с учётом задания соответствующего граничного условия вне анализируемой области $u_i(\mathbf{x}+\mathbf{0}) = 0$.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим стационарное распределение упругого поля в микронеоднородной двухфазной среде в трёхмерном пространстве. В качестве исходной модели используем стационарную изотропную модель линейной теории упругости:

$$\begin{gathered}
\nabla_j \sigma_{ij} = 0, \quad \sigma_{ij} = \lambda_{ij\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}, \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\nabla_\beta u_\alpha + \nabla_\alpha u_\beta), \\
\nabla_j(\lambda_{ij\alpha\beta}\nabla_\beta u_\alpha) = 0, \\
\lambda_{ij\alpha\beta} = \left(K - \frac{2}{3}\mu\right)\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta} + 2\mu I_{ij\alpha\beta}, \quad I_{ij\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\delta_{i\alpha}\delta_{j\beta} + \delta_{i\beta}\delta_{j\alpha}).
\end{gathered} \tag{5}$$

Координатами в модели (5) выступают микроточки, в каждой из которых находится одна из фаз со своими физическими свойствами, т. е. объёмный $K(\mathbf{r})$ и сдвиговый $\mu(\mathbf{r})$ упругие модули системы являются функциями координат. Если в микроточке находится фаза 1, то материальные коэффициенты упругости принимают значения $K = K_1$, $\mu = \mu_1$, аналогично и исследуемые поля смещений u_α, деформаций $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и напряжений σ_{ij} при этом принимают значения, соответствующие фазе 1.

Для корректной постановки задачи уравнения (5) следует дополнить заданием граничных условий на внутренних и внешних границах. Для последующего интегрального учёта микроструктуры гетерогенной среды вместо данной постановки задачи приведём эквивалентную корректную постановку задачи, в которой в исходных уравнениях (5) обычные производные заменяются на обобщённые (1). При этой модификации в исходных дифференциальных уравнениях появляется составляющая, отображающая поведение поля на внутренних и внешней границах. Докажем двумя способами, что физическая суть анализируемых уравнений (закон сохранения и закон Гука) не нарушается и приведённая постановка задачи является корректной.

Первый вариант доказательства основывается на следующем утверждении.

Утверждение 2. *Если исходные дифференциальные уравнения* (5) *осреднить по формулам пространственной теории смесей* [14], *то получившиеся осреднённые уравнения будут идентичны уравнениям* (*соответственно, и решениям*), *найденным в результате модифицирования обобщёнными производными* (1), (2) *уравнений* (5) *с последующим их осреднением по формулам* (3).

Доказательство. Осреднение по формуле пространственной теории смесей (4) уравнений (5) на напряжение и смещение приводит к формулам

$$c_1\partial_j\langle\sigma_{ij}^1\rangle+\frac{1}{V}\int\limits_{S_{12}}\sigma_{ij}\,ds_j=0,$$

$$c_1\lambda_{ij\alpha\beta}^1\partial_j\partial_\beta\langle u_\alpha^1\rangle+\lambda_{ij\alpha\beta}^1\frac{1}{V}\int\limits_{S_{12}}\partial_\beta u_\alpha\,ds_j+\lambda_{ij\alpha\beta}^1\partial_j\frac{1}{V}\int\limits_{S_{12}}u_\alpha\,ds_\beta=0,$$

характеризующим фазу 1 в гетерогенной среде. Осреднение по формулам (3) уравнений (5), в которых обычные производные заменены на обобщённые по формуле (2), также приводит к данным уравнениям. Если по аналогии записать осреднённые уравнения для фазы 2 и сложить их с осреднёнными уравнениями для фазы 1, то получатся осреднённые уравнения, вид которых следует из осреднения по формулам (3) уравнений (5), в которых обычные производные заменены на обобщённые, определяемые формулой (1). В рамках двух подходов полученные осреднённые уравнения являются идентичными. При этом анализируемая область гетерогенной среды (включающая внутренние границы) осталась без изменения, так же как и граничные условия. Исходя из этого, решения также являются одинаковыми. Таким образом, с приведённой позиции осреднённых уравнений формализм обобщённых производных не нарушает корректность постановки задачи и физическую суть исследуемых дифференциальных уравнений. Фактически доказательство является следствием приведённого выше утверждения о том, что замена обычных производных на обобщённые и последующее пространственное осреднение (3) приводит к формулам пространственной теории смесей [14]. □

Второй вариант доказательства основан на формализме формулы Грина [19]. Осреднение уравнений (5) при этом не делается. Отметим, что с учётом приведённого далее формализма функций Грина в работе будет построено и проанализировано решение уравнения (5) на смещение. Перед рассмотрением гетерогенной среды приведём теорему для частного случая определения поля в области, занимаемой одной фазой.

Теорема 1. *Пусть имеется односвязная область с объёмом V, замыкаемая поверхностью S с заданными на ней граничными условиями на поле. Тогда описание поля дифференциальными уравнениями в рассматриваемой области осуществляется с учётом следующих взаимообратимых утверждений.*

1. *Выполнение формулы Грина* [19]*, являющейся решением дифференциального уравнения с заданными граничными условиями, эквивалентно рассмотрению дифференциального уравнения, в котором обычные производные заменены на обобщённые.*

2. *Замена в анализируемом дифференциальном уравнении обычных производных на обобщённые приводит к появлению в дифференциальном уравнении составляющей, отображающей поведение поля на границе. Рассмотрение этой составляющей в качестве источника приводит к формуле Грина.*

Доказательство. Выпишем для этого случая решение уравнения (5) на смещение, т. е. запишем формулу Грина [6, 19]

$$u_\alpha^{(1)}=\int\limits_S\left[G_{\alpha p}^{(1,2)}\lambda_{pjmn}\partial_n u_m^{(2)}-\partial_n^{(2)}G_{\alpha p}^{(1,2)}\lambda_{mjpn}u_m^{(2)}\right]ds_j^{(2)},\tag{6}$$

в которой учтено, что объёмные силы в (5) положены равными нулю. В приведённом уравнении и далее верхние индексы в скобках характеризуют соответствующие координаты $\mathbf{r}^{(1)}$, $\mathbf{r}^{(2)}$. Поведение поля на границе S определяется граничными условиями $K\mathbf{u}=\mathbf{g}$ (задача Неймана, Дирихле или некоторая смешанная постановка). Уравнение на функцию Грина имеет вид

$$\lambda_{ijml}\partial_j^{(1)}\partial_l^{(1)}G_{mp}^{(1,2)}=\delta_{ip}\delta(\mathbf{r}^{(1)}-\mathbf{r}^{(2)})$$

и также дополняется граничными условиями $K\mathbf{G} = \mathbf{0}$. Формула (6) определяет распределение поля в области (V) исходя из его значения на границе (S). Воздействуя на решение (6) оператором $\lambda_{ij\alpha\beta}\partial_j\partial_\beta$ и используя представленное уравнение на функцию Грина, получим преобразованную форму для эллиптического оператора:

$$\lambda_{ij\alpha\beta}\left[\partial_j\partial_\beta u_\alpha(\mathbf{r}) - \int\limits_S \partial_\beta u_\alpha(\mathbf{x})\delta(\mathbf{r}-\mathbf{x})\,ds_j - \partial_j\int\limits_S u_\alpha(\mathbf{x})\delta(\mathbf{r}-\mathbf{x})\,ds_\beta\right] = 0.$$

Это же выражение следует, если в уравнениях (5) вместо обычных производных применить формализм обобщённых производных (2). Из формулы для обобщённой производной (1) будет следовать преобразованная форма для эллиптического оператора (5):

$$\lambda_{ij\alpha\beta}\left[\partial_j\partial_\beta u_\alpha(\mathbf{r}) + \int\limits_S [\partial_\beta u_\alpha]_\mathbf{x}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{x})\,ds_j + \partial_j\int\limits_S [u_\alpha]_\mathbf{x}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{x})\,ds_\beta\right] = 0, \tag{7}$$

из которого также следует решение на смещение (6) при положении вне рассматриваемой области площади S граничного условия $u_\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{0}) = 0$. Чтобы из найденного модифицированного дифференциального уравнения на смещение получить формулу Грина (6), нужно сингулярную составляющую рассмотреть как объёмный источник к регулярной части $\partial_j\partial_\beta$ эллиптического оператора. В рамках формализма функций Грина этим объёмным источником организуется решение (6) модифицированного дифференциального уравнения на смещение; при выводе формулы (6) конфигурация дельта-функций исчезает вследствие интегрирования по объёму. Таким образом, замена в дифференциальном уравнении обычных производных на обобщённые приводит к отображению в нём поведения поля на границе (соответственно при этом в дифференциальном уравнении отображаются и граничные условия). Физическая суть исходных уравнений (5) и постановка задачи являются корректными вследствие выполнения формулы Грина (6). □

Базируясь на приведённой теореме, сформулируем и докажем

Утверждение 3. *Использование формализма обобщённых производных* (1) *приводит к возникновению в дифференциальном уравнении членов, характеризующих поведение поля на внутренних границах гетерогенной системы. Эти члены могут совместно с регулярной составляющей эллиптического оператора формировать действующий оператор либо их можно рассматривать как источник в модифицированном дифференциальном уравнении. Если эти члены определяют действующий оператор и граничное условие поставлено на внешней границе, то при определении поля в гетерогенной среде в целом информация о внутренних границах присутствует в функции Грина. Полученное решение при этом является структурно идентичным формуле Грина. Исходя из чего физическая суть исследуемых дифференциальных уравнений не нарушается, и постановка задачи является корректной для всей области гетерогенной среды* (*включающей конфигурацию отдельных областей*).

Доказательство. Формула для обобщённой производной (1) не ограничивается рассмотрением некоторой области с соответствующей ей границей. Использование формализма обобщённых производных (1) в анализируемом дифференциальном уравнении приводит к появлению составляющей, учитывающей поведение поля на всей совокупности внутренних границ гетерогенной среды $S = \sum\limits_k S_k$. Учитывая это при применении формулы (1) к уравнениям (5), найдём дифференциальное уравнение

$$\lambda_{ij\alpha\beta}(\mathbf{r})\partial_j\partial_\beta u_\alpha(\mathbf{r}) + \int\limits_S [\lambda_{ij\alpha\beta}\partial_\beta u_\alpha]_\mathbf{x}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{x})\,ds_j + \partial_j\int\limits_S [\lambda_{ij\alpha\beta}u_\alpha]_\mathbf{x}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{x})\,ds_\beta = 0,$$

обобщающее уравнение (7) на случай рассмотрения гетерогенной среды в целом. Из полученного уравнения следуют частные решения для каждой из областей гетерогенной среды, занимаемой определённой фазой. Действительно, для рассматриваемой области с границей S_k и заданным на ней граничным условием действие других областей с соответствующими им границами не вносит вклад вследствие зануления дельта-функций (и их производных) на них. И при этом для каждой из областей следует дифференциальное уравнение (7) с решением (6). Формально, решение (6) получается, если интегралы по поверхности S_k вынести в правую часть как источник и на поверхности S_k задать граничные условия. Данный случай отображает то, что решение на поле и на функцию Грина можно искать для каждой из областей гетерогенной среды. Постановка задачи для функций Грина фазы ν, $\nu = 1, 2$, в каждой из областей представляется в виде $\boldsymbol{\lambda}^{\nu}\boldsymbol{\partial\partial}\mathbf{G}^{\nu} = \boldsymbol{I}\delta(\mathbf{r}^{(1)} - \mathbf{r}^{(2)})$, $K\mathbf{G}^{\nu} = 0$. Общее решение на поле и на функцию Грина представляют собой сшивку полученных решений, т. е. формализмом обобщённых производных определяется поле для каждой из областей гетерогенной среды и физическая суть анализируемого дифференциального уравнения с постановкой задачи не нарушаются. Данное рассмотрение сталкивается с проблемой определения граничных условий на внутренних границах системы. При построении решения на всей области гетерогенной среды граничные условия достаточно задать на внешней границе, а также следует учесть соотношения на поле на внутренних границах. С учётом этого далее приведём другой вариант построения решения для всей области гетерогенной среды.

За источниковое слагаемое в анализируемом дифференциальном уравнении возьмём член, отвечающий за внешнюю границу, на которой заданы граничные условия. (Если присутствуют другие источники, то они аддитивно складываются.) Остальные слагаемые, являющиеся сингулярными и отображающие внутренние границы, при этом совместно с регулярной составляющей эллиптического оператора формируют действующий оператор. Функция Грина, определяемая действующим оператором и граничными условиями, отображает внутренние границы, т. е. описанной функцией Грина определяется поле во всей области гетерогенной среды, включая внутренние границы. Получаемое общее решение структурно схоже с формулой Грина (6), корректно определяющей поле в некоторой области с границей S_k. Границей S_k в описанном решении выступает внешняя поверхность гетерогенной среды с заданным на ней граничным условием, а функция Грина определяется представленным оператором. Рассмотренный случай доказывает то, что формализмом обобщённых производных, учитывающим в анализируемом дифференциальном уравнении поведение поля на всей конфигурации внутренних границ гетерогенной среды, определяется поле в каждой точке гетерогенной среды. При этом физическая суть полученного дифференциального уравнения и постановка задачи на всей области гетерогенной среды являются корректными. □

Данный вариант построения решения на поле и на функцию Грина предлагается использовать в следующем разделе, т. е. на основе использования формализма обобщённых производных предлагается нахождение функции Грина на всей области гетерогенной среды, при котором действующий оператор отображает внутренние границы системы.

Опишем ещё один вариант построения решения на поле и на функцию Грина в гетерогенной среде. Здесь члены, отображающие поведение поля на внутренних границах, предлагается рассматривать как источник в модифицированном дифференциальном уравнении. Граничное условие задаётся на внешней границе. Функция Грина при этом строится регулярной составляющей эллиптического оператора, не содержащего информации о внутренних границах в системе. Выше было показано, что решение (6) получается при интегрировании по объёму сингулярных составляющих (считаемых источниковым членом) от действия обобщённых производных, которое по итогу сводится к интегрированию по поверхности. Базируясь на свойстве аддитивности интеграла по объёму, получаемое решение для всей области (записанное через функцию Грина) учитывает всю конфигурацию внутренних границ и является неявным. Неявность связана с присутствием искомого поля в интегралах по внутренним поверхностям, т. е. в обоих частях описанного решения.

3. ВЫВОД ЭФФЕКТИВНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ МЕТОДОМ УСЛОВНЫХ МОМЕНТОВ

Целью является получение из исходных уравнений (5) осреднённые, представимые в виде

$$\nabla_j \langle \sigma_{ij} \rangle = 0, \quad \langle \sigma_{ij} \rangle = \lambda^*_{ij\alpha\beta} \langle \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle, \quad \lambda^*_{ij\alpha\beta} \nabla_j \nabla_\beta \langle u_\alpha \rangle = 0,$$

где $\lambda^*_{ij\alpha\beta}$ — входящий в осреднённый закон Гука эффективный изотропный тензор, содержащий искомые эффективные коэффициенты линейной теории упругости K^* и μ^*. Тензоры $\langle \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle$ и $\langle \sigma_{ij} \rangle$ являются осреднёнными тензорами деформаций и напряжений соответственно. Необходимая информация о гетерогенной структуре располагается в эффективных коэффициентах K^*, μ^*, которые следует получить.

Применим формализм МУМ [1] для нахождения эффективных коэффициентов упругости. При этом учтём использование в исходных уравнениях (5) концепции обобщённых производных. Исходное уравнение (5) на смещение преобразовывается путём прибавления и отнимания искомого тензора λ^*_{ijmn} к виду

$$\lambda^*_{ij\alpha\beta} \nabla_j \nabla_\beta u_\alpha = -\nabla_j \big(\lambda_{ij\alpha\beta} - \lambda^*_{ij\alpha\beta} \big) \nabla_\beta u_\alpha. \tag{8}$$

Применим аппарат функций Грина для оператора $\lambda^*_{ij\alpha\beta} \nabla_j \nabla_\beta$, считая правую часть уравнения (8) источником, а среду бесконечной. Имеем выражения

$$\lambda^*_{ijml} \nabla^{(1)}_j \nabla^{(1)}_l G^{(1,2)}_{mp} = \delta_{ip} \delta(\mathbf{r}^{(1)} - \mathbf{r}^{(2)}),$$

$$\nabla^{(1)}_j \nabla^{(1)}_l G^{(1,2)}_{mp} = \partial^{(1)}_j \partial^{(1)}_l G^{(1,2)}_{mp} + \int\limits_S \big[\partial^{(y)}_l G^{(y,2)}_{mp} \big]_{\mathbf{y}=\mathbf{x}} \delta(\mathbf{r}^{(1)} - \mathbf{x})\, ds_j + \int\limits_S \big[G^{(y,2)}_{mp} \big]_{\mathbf{y}=\mathbf{x}} \partial^{(1)}_j \delta(\mathbf{r}^{(1)} - \mathbf{x})\, ds_l, \tag{9}$$

которые следует проанализировать. Функция Грина $G^{(1,2)}_{mp}$ в записанном уравнении характеризует отклик поля в точке $\mathbf{r}^{(1)}$ на приложенное воздействие в точке $\mathbf{r}^{(2)}$ с учётом информации о микроструктуре системы. Геометрия структуры при этом выражена в интегралах по поверхности, характеризующих внутренние границы. Действующий оператор уравнения (9) не включает внешнюю бесконечно удалённую границу. Исходя из этого уравнение (9) следует дополнить граничным условием на внешней границе, например, $G^{(1,2)}_{mp} = 0$.

Построение решения уравнения (9) на функцию Грина для гетерогенной среды в целом представляет собой нетривиальную задачу. Это является следствием наличия интегралов по внутренним поверхностям с входящими в них сингулярными членами, скачками тензора Грина $[\mathbf{G}]_{\mathbf{x}}$ и его производной $[\boldsymbol{\partial}\mathbf{G}]_{\mathbf{x}}$. Соответствующие скачки описывают различие отклика поля в каждой из фаз на приложенное воздействие исходя из различных модулей упругости фаз K_1, μ_1 и K_2, μ_2. Значение тензора Грина $G^{(1,2)}_{mp}$ содержит в себе поведение функций Грина для каждой из фаз и определяет её скачки на внутренних границах. Как отмечалось выше, искать общую функцию Грина системы можно с учётом сшивки решений на внутренних границах системы для функций Грина в каждой из областей, занимаемых определённой фазой. При этом возникает сложность с определением поля на внутренних границах системы, т. е. с заданием граничных условий на поверхностях раздела фаз. Отметим, что функции Грина различны для каждой из фаз в силу разных коэффициентов переноса и геометрических особенностей фаз; решения функции $\mathbf{G}^{\nu}$ для одной фазы, но для разных областей в общем случае различны. Решение уравнений (9) можно рассматривать с позиции помещения в области среды конфигурации зарядов (дельта-функций $\delta(\mathbf{r}^{(1)}-\mathbf{x})$) и диполей (производных от дельта-функций $\partial_j^{(1)}\delta(\mathbf{r}^{(1)}-\mathbf{x})$). Соответствующей конфигурацией дельта-функций и производных от дельта-функций при этом должно организоваться поле, удовлетворяющее внутренним граничным условиям, т. е. создаваемое поле должно быть эквивалентно полю, организованному конфигурацией зарядов и диполей, содержащихся в поверхностных интегралах уравнений (9). В простейших вариантах, в которых фазы обладают разными физическими свойствами, хорошо работает метод изображений, например в случае пространства, разделённого на две части, или в случае шара, помещённого в пространство с другими физическими свойствами.

Вследствие положения границ и соотношений на разрывах $[\boldsymbol{\partial}\mathbf{G}]_{\mathbf{x}}$ и $[\mathbf{G}]_{\mathbf{x}}$ значения функций Грина $G_{mp}^{(1,2)}$ реальной среды зависят от положения точек $\mathbf{r}^{(1)}$ и $\mathbf{r}^{(2)}$, т. е. $G_{mp}^{(1,2)}\neq G_{mp}^{(2,1)}$, а также от направлений m и p. Действительно, точки $\mathbf{r}^{(1)}$ и $\mathbf{r}^{(2)}$ имеют определённые расстояния относительно внутренних границ и в них находятся произвольные фазы, т. е. рассматриваемая функция $G_{mp}^{(1,2)}$ в общем случае является неоднородной и анизотропной. По мере отдаления точки $\mathbf{r}^{(2)}$ от точки $\mathbf{r}^{(1)}$ вклады границ компенсируют друг друга. Это является следствием того, что в зависимости от пересекаемой границы (т. е. в зависимости от смены фаз) значения разностей $[\boldsymbol{\partial}\mathbf{G}]_{\mathbf{x}}$ и $[\mathbf{G}]_{\mathbf{x}}$ могут иметь разные знаки, что влияет на знаки членов по типу зарядов $\delta(\mathbf{r}^{(1)}-\mathbf{x})$ и направления диполей $\partial_l^{(1)}\delta(\mathbf{r}^{(1)}-\mathbf{x})$ в интегралах по внутренним поверхностям. Вследствие имеющегося экранирования для неоднородной структуры существует некоторый характерный масштаб, за пределами которого анализируемая среда обладает эффективными свойствами $\boldsymbol{\lambda}^*$ и асимптотикой для функции Грина $G_{mp}^{(1,2)}\sim 1/r$. С этой точки зрения уравнение на функцию Грина (9) учитывает переходный масштаб (масштаб мезоточки), что приводит к нелокальному отклику на приложенное воздействие (т. е. отклик определяется не только рассматриваемой микроточкой, но и некоторой окрестностью). Этот факт обобщает работу [1], где рассматриваемый оператор с обычными производными $\lambda_{ijml}^*\partial_j\partial_l$ и соответствующая ему функция Грина не содержат информации о микроструктуре среды, представленной в формуле (9) в интегралах по поверхности. Система в [1] сразу полагается эффективной без переходного слоя. Рассмотрение оператора $\lambda_{ijml}^*\nabla_j\nabla_l$ с позиции обобщённых производных приводит к функции Грина, отображающей микроструктурные особенности системы.

Базируясь на формализме функции Грина, выпишем решение уравнений (5) на смещения и деформации:

$$u_i^{(1)}=\big\langle u_i^{(1)}\big\rangle-\int\limits_V G_{ip}^{(1,2)}\nabla_q^{(2)}\big(\lambda_{pqmn}^{(2)}-\lambda_{pqmn}^*\big)\nabla_n^{(2)}u_m^{(2)}\,d\mathbf{r}^{(2)}, \tag{10}$$

$$\varepsilon_{ij}^{(1)}=\big\langle \varepsilon_{ij}^{(1)}\big\rangle-\int\limits_V \nabla_{(j}^{(1)}G_{i)p}^{(1,2)}\nabla_q^{(2)}\big(\lambda_{pqmn}^{(2)}-\lambda_{pqmn}^*\big)\varepsilon_{mn}^{(2)}\,d\mathbf{r}^{(2)}, \tag{11}$$

в которых запись $2\nabla_{(j}^{(1)}G_{i)p}^{(1,2)}=\nabla_j^{(1)}G_{ip}^{(1,2)}+\nabla_i^{(1)}G_{jp}^{(1,2)}$ характеризует симметризацию по индексам i и j. Члены $\big\langle u_i^{(1)}\big\rangle$ и $\big\langle \varepsilon_{ij}^{(1)}\big\rangle$ характеризуют поведение поля (граничное условие) на внешней бесконечно удалённой границе; этими же слагаемыми определяются среднее смещение и средний тензор деформаций в системе. При получении уравнения (11) учтено, что действие обобщённой производной на осреднённую функцию эквивалентно действию обычной производной $\nabla_j\langle u_i\rangle=\partial_j\langle u_i\rangle$, так как осреднённая величина определена на масштабах макроточки. (В каждой микроточке среды осреднённое поле принимает полученное среднее значение, т. е. не чувствует микроточки и границы вследствие их учёта при осреднении.)

Будем интересоваться только уравнением (11), так как для получения эффективных коэффициентов упругости нужно только оно. Уравнение (10) в результате осреднения в рамках

МУМ приводит к различному смещению фаз, рассмотрение которого опускается в настоящей работе. Для выполнения последующих выкладок произведём перенос обобщённой производной $\nabla_q^{(2)}$ на функцию Грина. Отметим, что для обобщённой производной обычное интегрирование по частям не работает, так как не выполняется правило дифференцирования произведения $\boldsymbol{\nabla}\mathbf{G}\boldsymbol{\varepsilon}\neq(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{G})\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{G}(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varepsilon})$ вследствие наличия у обобщённой производной сингулярной составляющей. При этом заметим, что результат действия сингулярной составляющей от обобщённой производной $\nabla_q^{(2)}$ в выражении (11)

$$\int\limits_S \left[\nabla_{(j}^{(1)} G_{i)p}^{(1,y)} \left(\lambda_{pqmn}^{(y)} - \lambda_{pqmn}^{*}\right)\varepsilon_{mn}^{(y)}\right]_{\mathbf{y}=\mathbf{x}} ds_q$$

не изменится при её переносе на функцию Грина. В последнем выражении произведено интегрирование по объёму. При выполнении интегрирования по частям для обычной составляющей $\partial_q^{(2)}$ обобщённой производной $\nabla_q^{(2)}$ интеграл по бесконечно удалённой поверхности среды зануляется. Это является следствием того, что совокупность принимаемых значений подынтегрального выражения $\left(\lambda_{pqmn}^{(2)} - \lambda_{pqmn}^{*}\right)\varepsilon_{mn}^{(2)}$ на бесконечно удалённой поверхности среды можно считать осреднением по поверхности, эквивалентным осреднению по объёму (3). Применение формул (3) приводит к занулению этого слагаемого в силу равенств

$$\langle\sigma_{ij}\rangle = c_1\lambda_{ij\alpha\beta}^{1}\left\langle\varepsilon_{\alpha\beta}^{1}\right\rangle + c_2\lambda_{ij\alpha\beta}^{2}\left\langle\varepsilon_{\alpha\beta}^{2}\right\rangle = \lambda_{ij\alpha\beta}^{*}\langle\varepsilon_{\alpha\beta}\rangle. \tag{12}$$

При этом функция Грина на бесконечности (вне переходного масштаба) не отражает скоррелированности фаз. С учётом интегрирования по частям и переноса сингулярной составляющей обобщённой производной на функцию Грина имеем выражение

$$\varepsilon_{ij}^{(1)} = \left\langle\varepsilon_{ij}^{(1)}\right\rangle + \int\limits_V \widetilde{\nabla}_q^{(2)}\nabla_{(j}^{(1)} G_{i)p}^{(1,2)}\left(\lambda_{pqmn}^{(2)} - \lambda_{pqmn}^{*}\right)\varepsilon_{mn}^{(2)}\, d\mathbf{r}^{(2)}, \tag{13}$$

в котором знак перед интегралом поменялся относительно выражения (11) и введён оператор $\widetilde{\nabla}_q^{(2)}$, отличающийся от обобщённой производной $\nabla_q^{(2)}$ знаком перед сингулярной составляющей.

Решение (13) описывает истинную среду. С целью получения эффективных коэффициентов упругости предлагается провести осреднение уравнений (13). Выполнение осреднения должно отражать тот факт, что уравнения (13) являются двухточечными. В своём подходе [1] Л. П. Хорошун рассматривает реальную структуру как стохастическую, обладающую статистически однородными и изотропными свойствами. Исследуемые поля в такой постановке также являются случайными. Анализируемую функцию Грина $G_{ip}^{(1,2)}$, зависящую от положения точек $\mathbf{r}^{(1)}$ и $\mathbf{r}^{(2)}$ и фаз в них, в отличие от подхода [1] следует считать случайной функцией. Как и в модели [1], подействуем на стохастические уравнения (13) статистическим осреднением — методом условных моментов. Интегрируя уравнение (13) по функции условной плотности распределения полей и материальных коэффициентов $f\left(\widetilde{\nabla}_q^{(2)}\nabla_{(j}^{(1)} G_{i)p}^{(1,2)}, \varepsilon_{ij}^{(1)}, \varepsilon_{ij}^{(2)}, \lambda_{ij\alpha\beta}^{(2)}\big|_{\nu}^{(1)}\right)$, получим его осреднённый вид:

$$\left\langle\varepsilon_{ij}^{(1)\nu}\right\rangle = \left\langle\varepsilon_{ij}^{(1)}\right\rangle + \sum_{k=1}^{2}\int\limits_V \left\langle\widetilde{\nabla}_q^{(2)}\nabla_{(j}^{(1)} G_{i)p}^{(1,2)}\big|_{k\ \ \nu}^{(2)(1)}\right\rangle\left(\lambda_{pqmn}^{k} - \lambda_{pqmn}^{*}\right)\left\langle\varepsilon_{mn}^{(2)k}\big|_{\nu}^{(1)}\right\rangle w\left(^{(2)}_{k}\big|^{(1)}_{\nu}\right) d\mathbf{r}^{(2)}. \tag{14}$$

Слагаемое $w\left(^{(2)}_{k}\big|^{(1)}_{\nu}\right) = c_k + (\delta_{\nu k} - c_k)\varphi^{(1,2)}$ характеризует вероятностную функцию геометрии структуры, которая определяет вероятность нахождения фазы k в точке $\mathbf{r}^{(2)}$ при условии, что фаза ν расположена в точке $\mathbf{r}^{(1)}$; $\varphi^{(1,2)}$ — корреляционная функция геометрии структуры. Запись $\langle \varepsilon_{mn}^{(2)k}\big|_{\nu}^{(1)}\rangle$ обозначает условно осреднённый тензор деформаций в точке $\mathbf{r}^{(2)}$ для фазы k при условии, что в точке $\mathbf{r}^{(1)}$ находится компонента ν. Для этих членов не выполняется равенство $\langle \varepsilon_{mn}^{(2)k}\big|_{\nu}^{(1)}\rangle \neq \langle \varepsilon_{mn}^{(2)k}\rangle$, что является следствием наличия флуктуаций поля в структуре, возникающих из-за конфигурации внутренних границ. Характеризующая микроструктурные особенности системы функция Грина и её условно осреднённое значение $\langle \widetilde{\nabla}_q^{(2)}\nabla_{(j}^{(1)}G_{i)p}^{(1,2)}\big|_{k\ \ \nu}^{(2)(1)}\rangle$ определяют отклонение поля деформаций $\langle \varepsilon_{mn}^{(2)k}\big|_{\nu}^{(1)}\rangle$ от $\langle \varepsilon_{mn}^{(2)k}\rangle$. Получение вида на условно осреднённые члены $\langle \varepsilon_{mn}^{(2)k}\big|_{\nu}^{(1)}\rangle$ и $\langle \widetilde{\nabla}_q^{(2)}\nabla_{(j}^{(1)}G_{i)p}^{(1,2)}\big|_{k\ \ \nu}^{(2)(1)}\rangle$ представляет собой нетривиальный вопрос. Далее предлагается рассмотреть приближение

$$\langle \widetilde{\nabla}_q^{(2)}\nabla_{(j}^{(1)}G_{i)p}^{(1,2)}\big|_{k\ \ \nu}^{(2)(1)}\rangle\langle \varepsilon_{mn}^{(2)k}\big|_{\nu}^{(1)}\rangle = \langle \widetilde{\nabla}_q^{(2)}\nabla_{(j}^{(1)}G_{i)p}^{(1,2)}\rangle\langle \varepsilon_{mn}^{(2)k}\rangle,$$

которое предполагает, что информация о флуктуациях полей деформаций в фазах сосредоточена в осреднённом члене $\langle \widetilde{\nabla}_q^{(2)}\nabla_{(j}^{(1)}G_{i)p}^{(1,2)}\rangle$, связанном с функцией Грина. Также предполагается, что осреднённое слагаемое $\langle \widetilde{\nabla}_q^{(2)}\nabla_{(j}^{(1)}G_{i)p}^{(1,2)}\rangle$ осредненно учитывает то, какие фазы расположены в точках $\mathbf{r}^{(1)}$, $\mathbf{r}^{(2)}$. Далее рассмотрим ситуацию, для которой имеет место равенство

$$\langle \widetilde{\nabla}_q^{(2)}\nabla_{(j}^{(1)}G_{i)p}^{(1,2)}\rangle = -\partial_q^{(1)}\partial_{(j}^{(1)}\langle G_{i)p}^{(1,2)}\rangle,$$

что следует из постановки условия на скачки функции Грина $[\mathbf{G}]_{\mathbf{x}} = 0$ на внутренних границах, при котором сингулярные составляющие от действия оператора $\widetilde{\nabla}_q^{(2)}\nabla_j^{(1)}$ зануляются. С позиции действия на функционал (функцию Грина) оператор $\widetilde{\nabla}_q^{(2)}\nabla_j^{(1)}$ отличается от оператора $\nabla_q^{(1)}\nabla_j^{(1)}$ вследствие действия на разные точки и отличия $\widetilde{\nabla}_q^{(2)}$ от $\nabla_q^{(2)}$. Сингулярные составляющие оператора $\nabla_q^{(1)}\nabla_j^{(1)}$ не зануляются при условии $[\mathbf{G}]_{\mathbf{x}} = 0$ вследствие существования разрывов $[\boldsymbol{\partial}\mathbf{G}]_{\mathbf{x}} \neq 0$. Относительно тензора Грина $G_{mp}^{(1,2)}$, являющегося анизотропным и неоднородным на переходном масштабе, осреднённый тензор Грина $\langle G_{mp}^{(1,2)}\rangle$ является однородным и изотропным, что привело к изменению знака при смене $\partial_q^{(2)} \to \partial_q^{(1)}$ в последнем выражении.

Перепишем уравнение (14) с учётом проведённых выкладок:

$$\langle \varepsilon_{ij}^{(1)\nu}\rangle = \langle \varepsilon_{ij}^{(1)}\rangle - \sum_{k=1}^{2}\int\limits_V \partial_q^{(1)}\partial_{(j}^{(1)}\langle G_{i)p}^{(1,2)}\rangle\big(\lambda_{pqmn}^{k} - \lambda_{pqmn}^{*}\big)\langle \varepsilon_{mn}^{(2)k}\rangle w\big({}_{k}^{(2)}\big|_{\nu}^{(1)}\big)\, d\mathbf{r}^{(2)}. \tag{15}$$

Полученное решение отличается от [1] функцией Грина, полученной с учётом формализма обобщённых производных, направленного отобразить микроструктуру гетерогенной среды. Если умножить полученное решение (15) на $c_\nu\lambda_{pqmn}^{*}$ и просуммировать по фазам ν, $\nu = 1, 2$, то получившийся интеграл будет равен нулю. Это возможно, если подынтегральное выражение в каждой точке $\mathbf{r}^{(2)}$ зануляется, что следует из выполнения уравнения (12). Аналогично, если умножить решение (15) на c_ν и просуммировать по ν, то получившийся интеграл также будет равен нулю, что является корректным с учётом уравнения (12). Имея осреднённые уравнения на деформации в фазах (15), запишем уравнение на разницу осреднённых деформаций $\langle \varepsilon_{ij}^{\prime(1)}\rangle = \langle \varepsilon_{ij}^{1}\rangle - \langle \varepsilon_{ij}^{2}\rangle$:

$$\langle \varepsilon_{ij}^{\prime(1)}\rangle = -\int\limits_V \partial_q^{(1)}\partial_{(j}^{(1)}\langle G_{i)p}^{(1,2)}\rangle\varphi^{(1,2)}\big\{\lambda_{pqmn}^{\prime}\langle \varepsilon_{mn}^{(2)}\rangle + \big(\lambda_{pqmn}^{\prime\prime} - \lambda_{pqmn}^{*}\big)\langle \varepsilon_{mn}^{\prime(2)}\rangle\big\}\, d\mathbf{r}^{(2)}, \tag{16}$$

где в подынтегральном выражении использованы равенства

$$\begin{gathered}\left\langle\varepsilon^1_{\alpha\beta}\right\rangle = \langle\varepsilon_{\alpha\beta}\rangle + c_2\left\langle\varepsilon'_{\alpha\beta}\right\rangle, \quad \left\langle\varepsilon^2_{\alpha\beta}\right\rangle = \langle\varepsilon_{\alpha\beta}\rangle - c_1\left\langle\varepsilon'_{\alpha\beta}\right\rangle,\\ \lambda'_{ij\alpha\beta} = \lambda^1_{ij\alpha\beta} - \lambda^2_{ij\alpha\beta}, \quad \lambda''_{ij\alpha\beta} = c_2\lambda^1_{ij\alpha\beta} + c_1\lambda^2_{ij\alpha\beta}.\end{gathered} \tag{17}$$

Выделение зависимости $\left\langle\varepsilon'_{ij}\right\rangle = Q_{ij\alpha\beta}\langle\varepsilon_{\alpha\beta}\rangle$ из уравнения (16) приведёт к искомому нахождению эффективных коэффициентов, входящих в осреднённый закон Гука $\langle\sigma_{ij}\rangle = \lambda^*_{ij\alpha\beta}\langle\varepsilon_{\alpha\beta}\rangle$. Данный аргумент следует исходя из соотношений

$$\langle\sigma_{ij}\rangle = \lambda^*_{ij\alpha\beta}\langle\varepsilon_{\alpha\beta}\rangle = \langle\lambda_{ij\alpha\beta}\rangle\langle\varepsilon_{\alpha\beta}\rangle + c_1c_2\lambda'_{ij\alpha\beta}\left\langle\varepsilon'_{\alpha\beta}\right\rangle, \tag{18}$$

полученных с учётом выражений (12) и (17). Отметим, что если уравнение (15) умножить на $c_\nu\lambda^\nu_{pqmn}$ и провести суммирование по ν, то с учётом уравнения на разность осреднённых деформаций (16) будет следовать уравнение (18). Из работы [1] данный результат не получается, так как присутствует некорректность, связанная с отсутствием члена $\left\langle\varepsilon^{(1)}_{ij}\right\rangle$ в осреднённых уравнениях, начиная с (11).

Уравнение (16) в силу изотропии и однородности осреднённой функции Грина и корреляционной функции геометрии структуры представляет собой свёртку. Исходя из этого в МУМ для выделения зависимости $\left\langle\varepsilon'_{ij}\right\rangle = Q_{ij\alpha\beta}\langle\varepsilon_{\alpha\beta}\rangle$ к уравнению (16) применяется преобразование Фурье. Следствиеми выполненной операции являются: выражение в фигурной скобке связано с полями, и интегралы

$$R_{ijpq}(\mathbf{k}) = -\int \partial_q\partial_{(j}\langle G_{i)p}\rangle(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{kr}}\,d\mathbf{r} \tag{19}$$

отображают информацию об отклике поля в среде на распространяющееся поле и геометрии структуры. Представлять уравнения (16) в Фурье-пространстве здесь не будем, так как их вид остался аналогичным формализму подхода [1]. Зная вид уравнений (16) в Фурье-пространстве, мы знаем $\left\langle\varepsilon'_{\alpha\beta}\right\rangle = Q_{ij\alpha\beta}\langle\varepsilon_{\alpha\beta}\rangle$. Подставив это соотношение в Фурье-образ уравнения (18), получим итоговое выражение по вычислению эффективных коэффициентов упругости:

$$\lambda^*_{jk\alpha\beta} = \langle\lambda_{jk\alpha\beta}\rangle + c_1c_2\lambda'_{jkmn}\big(I_{\gamma\delta mn} + R_{\gamma\delta pq}\big(\lambda^*_{pqmn} - \lambda''_{pqmn}\big)\big)^{-1}R_{\gamma\delta r\nu}\lambda'_{r\nu\alpha\beta}. \tag{20}$$

В полученном равенстве считается, что интегралы $R_{jkpq}(\mathbf{k})$ не зависят от вектора $\mathbf{k}$, т. е. $R_{jkpq}(\mathbf{k}) = R_{jkpq}(\mathbf{0})$. Это связано с тем, что масштабы неоднородности в структуре полагаются малыми относительно характерного масштаба макроточки, отображающей осреднённое значение поля и характерный масштаб его изменения. Разложение $e^{-i\mathbf{kr}}$ по степеням $\mathbf{kr}$ приведёт к зависимости от $\mathbf{k}$ эффективного тензора упругости $\lambda^*_{jk\alpha\beta}(\mathbf{k})$, что при выполнении обратного преобразования Фурье модифицирует закон Гука с операторной точки зрения [1].

Для нахождения тензора $\lambda^*_{jk\alpha\beta}$ следует вычислить интегралы $R_{jkpq}(0)$, значения которых зависят от осреднённой функции Грина $\left\langle G^{(1,2)}_{mp}\right\rangle$. Считаем, что выполняется гипотеза эргодичности (об эквивалентности пространственного и статистического осреднений). Исходя из этого приведём уравнение на осреднённую функцию Грина $\left\langle G^{(1,2)}_{mp}\right\rangle$, которое получим путём осреднения уравнений (9) по координатам $\mathbf{r}^{(1)}$ и $\mathbf{r}^{(2)}$ согласно формулам (3):

$$\begin{aligned}\lambda^*_{ijml}\partial^{(1)}_j\partial^{(1)}_l\left\langle G^{(1,2)}_{mp}\right\rangle + \lambda^*_{ijml}\int\limits_S \left[\partial^{(y)}_l\left\langle G^{(y,2)}_{mp}\right\rangle\right]_{\mathbf{y}=\mathbf{R}^{(1)}+\mathbf{x}} ds_j&\\ + \lambda^*_{ijml}\partial^{(1)}_j\int\limits_S \left[\left\langle G^{(y,2)}_{mp}\right\rangle\right]_{\mathbf{y}=\mathbf{R}^{(1)}+\mathbf{x}} ds_l = \delta_{ip}\delta\big(\mathbf{R}^{(1)} - \mathbf{R}^{(2)}\big).&\end{aligned} \tag{21}$$

В данном уравнении осреднение функции Грина в поверхностных интегралах произведено только по координате $\mathbf{r}^{(2)}$. Уравнение (21) отображает информацию о том, что интегралы по поверхности, возникшие вследствие концепции обобщённой производной, дополняют источник $\delta(\mathbf{R}^{(1)} - \mathbf{R}^{(2)})$. Соответствующее дополнение обобщает работу [1], где используются оператор $\lambda^*_{ijml}\partial^{(1)}_j\partial^{(1)}_l$ и тривиальный источник. Анализ уравнения (21) представляет существенные трудности. Предположим, что решение на функцию осреднённого тензора Грина реальной среды $\left\langle G^{(1,2)}_{mp}\right\rangle$ найдено, исходя из чего запишем уравнение

$$\lambda^*_{ijml}\partial_j\partial_l\big\langle G^{(1,2)}_{mp}\big\rangle = T^{(1,2)}_{ip}, \tag{22}$$

где источниковый член $T^{(1,2)}_{ip}$ осредненно учитывает микроструктурные особенности системы, выраженные поверхностными интегралами в уравнении (9) и в его осреднённой версии (21). Представленное уравнение через источник направлено выразить переходный слой через конфигурацию зарядов и диполей, осредненно удовлетворяющих внутренним граничным условиям. С учётом этого представим выражение для источника в виде

$$T^{(1,2)}_{ip} = \delta_{ip}\sum_k \rho_k\delta(\mathbf{r}^{(1)} - \mathbf{r}^{(2)} - \mathbf{x}_k), \tag{23}$$

где точки $\mathbf{x}_k$ и функции ρ_k отражают геометрические свойства структуры и физические свойства фаз K_1, μ_1, K_2, μ_2. Пропорциональность источника символу Кронекера δ_{ip} подразумевает осреднённую изотропность в структуре. Зависимости источника по типу $\delta(\mathbf{r}^{(1)} - \mathbf{r}^{(2)} - \mathbf{x}_k)$ подразумевает осреднённую однородность в структуре. В случае непрерывного распределения точек $\mathbf{x}_k$ и функций ρ_k ряд в (23) в пределе переходит в интеграл.

Воспользуемся выражением для источника $T_{ip}(\mathbf{r})$ в виде (23). Члены $R_{jkpq}(0)$ при этом включают интеграл

$$\gamma = \int \sum_l \rho_l\delta(\mathbf{r} - \mathbf{x}_l)\varphi(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}, \tag{24}$$

что является следствием учёта только сингулярной составляющей от действия вторых производных на функцию Грина $\partial_q\partial_{(j}\langle G_{i)p}\rangle(\mathbf{r}) \propto \sum_k \rho_k\delta(\mathbf{r} - \mathbf{x}_k)$. То есть интегралы $R_{jkpq}(0)$ при этом отображают информацию о микроструктуре среды $\gamma = \sum_l \rho_l\varphi(\mathbf{x}_l)$. Если производные рассматриваются не в обобщённом смысле, то источник имеет вид, как в работе [1]: $T_{ip}(\mathbf{r}) = \delta_{ip}\delta(\mathbf{r})$ и учёт сингулярной составляющей от действия вторых производных на функцию Грина $\partial_q\partial_{(j}\langle G_{i)p}\rangle(\mathbf{r}) \propto \delta(\mathbf{r})$ приведёт при этом к потере информации о микроструктуре системы $\varphi(\mathbf{0}) = 1$ (если соответствующая информация имеется). При данных рассуждениях учитывается, что находить функцию Грина не нужно, так как имеет значение только сингулярная составляющая от действия на неё вторых производных. С позиции уравнения на функцию Грина (9) равенство источника $T_{ip}(\mathbf{r}) = \delta_{ip}\delta(\mathbf{r})$ эквивалентно отсутствию у системы поверхностных интегралов с конфигурацией дельта-функций, что отображает отсутствие нетривиального переходного слоя, за которым среда обладает эффективными свойствами. Равенство источника $T_{ip}(\mathbf{r}) = \delta_{ip}\delta(\mathbf{r})$ с топологической точки зрения означает, что относительно каждого рассматриваемого узла с определённой фазой в нём остальные узлы (микроточки) анализируемой евклидовой решётки являются нескоррелированными. Понятие границ и областей при этом справедливо на масштабах узла, так как за пределом рассматриваемого узла среда обладает эффективными свойствами. Вычисление интегралов (19) при $e^{-i\mathbf{kr}} = 1$ с учётом формулы (24) приводит к выражению

$$R_{jkpq} = \frac{\gamma}{3}\frac{1}{\mu^*}I_{jkpq} - \frac{\gamma}{15}\frac{K^* + \mu^*/3}{\mu^*\big(K^* + 4\mu^*/3\big)}(\delta_{jk}\delta_{pq} + 2I_{jkpq}), \tag{25}$$

отличающемуся от работы [1] наличием параметра $\gamma \neq 1$. Случаю $\gamma = 1$ соответствует $T_{ip}(\mathbf{r}) = \delta_{ip}\delta(\mathbf{r})$. Подставив вычисленные R_{jkpq} в формулу (20), получим модифицированные эффективные коэффициенты упругости:

$$\begin{aligned} K^* &= c_1K_1 + c_2K_2 - \frac{c_1c_2(K_1-K_2)^2}{c_1K_2 + c_2K_1 + K^*\frac{1-\gamma}{\gamma} + \frac{4}{3\gamma}\mu^*}, \\ \mu^* &= c_1\mu_1 + c_2\mu_2 - \frac{c_1c_2(\mu_1-\mu_2)^2}{c_1\mu_2 + c_2\mu_1 + \frac{\mu^*\left(\left(5/2-\gamma\right)K^* + 2\left(5/3-\gamma\right)\mu^*\right)}{K^*+2\mu^*}}. \end{aligned} \tag{26}$$

При $\gamma = 1$ полученные эффективные коэффициенты согласуются с работами [1, 2, 4, 6, 10].

4. ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРНОГО ВИДА ПАРАМЕТРА γ

Определяемая выражением (24) функция γ содержит характерные масштабы структуры, что является следствием формулы (19), в которой производится интегрирование корреляционной функции геометрии среды $\varphi(\mathbf{r})$ и функции Грина с действующими на неё производными $\partial_q\partial_{(j}\langle G_{i)p}\rangle(\mathbf{r})$.

Нахождение функции Грина для гетерогенной среды с реальной микроструктурой является нетривиальной задачей. Для отображения механизма получения размеров в выражении на функцию Грина (соответственно и в параметре γ) рассмотрим модельную ситуацию, в которой два шара радиуса R находятся на расстоянии l. Данное рассмотрение упрощённо отображает гетерогенную среду, в которой одна из фаз является шарами, а вторая заполняет оставшееся пространство. Для нахождения γ корреляционную функцию геометрии структуры $\varphi(\mathbf{r})$, как и в [20], представим в виде $\varphi(\mathbf{r}) = e^{-r/(\beta c_1 R)}$, где β — некоторый структурный коэффициент, c_1 — концентрация шаров. Для указания того, как рассматриваемая микроструктура дополняет главный заряд $\delta(\mathbf{r}^{(1)} - \mathbf{r}^{(2)})$ в уравнении на функцию Грина (9), применим метод изображений для оценивания структурного вида источника $T_{ip}(\mathbf{r})$, определяемого уравнениями (22), (23). Для определённости будем считать, что точка с координатой $\mathbf{r}^{(2)}$ находится в центре шара 1 и в ней помещён главный заряд $\rho_0\delta(\mathbf{r}^{(1)} - \mathbf{r}^{(2)})$, $\rho_0 = 1$. Для удовлетворения граничных условий на функцию Грина $K\mathbf{G}^\nu = \mathbf{0}$ на расстоянии $x_1 = R^2/l$ от центра второго шара на линии, соединяющей центры шаров, следует поместить изображение главного заряда. Значение ρ_1 этого заряда уже будет отлично от значения главного заряда ρ_0, будет пропорционально отношению R/l и будет содержать зависимость, связанную с различными модулями упругости фаз K_1, μ_1 и K_2, μ_2. Помещённый заряд $\rho_1\delta(\mathbf{r}^{(1)} - \mathbf{r}^{(2)} - \mathbf{x}_1)$ в свою очередь создаст изображение в шаре один. При этом $\rho_2 \propto (R/l)^2/(1-(R/l)^2)$, $x_2 = R^2/(l-R^2/l)$. Соответствующим образом строится конфигурация зарядов ρ_l в точках $\mathbf{x}_l$, описывающая взаимовлияние областей, разделённых областью с другими физическими свойствами, на распространение поля по структуре. Здесь игнорировалось возможное (зависящее от граничных условий) помещение зарядов-изображений в центры каждого из шаров и различие коэффициентов упругости фаз. С учётом приведённой модельной ситуации запишем функцию γ в виде

$$\gamma = \sum_l \rho_l\varphi(\mathbf{x}_l) = 1 + \frac{R}{l}Q\left(\frac{R}{l}, \frac{K_1}{K_2}, \frac{\mu_1}{\mu_2}, \frac{\mu_1}{K_2}, \frac{K_1}{\mu_2}\right), \tag{27}$$

где масштаб l можно интерпретировать как осреднённое расстояние между шарами в структуре. Свяжем характерные масштабы R и l с объёмными концентрациями фазы сфер c_1 и второй фазы c_2 соответственно. Имеем $c_1 = R^3/V_0$, $c_2 = \alpha^3 l^3/V_0$, где α — некоторый масштабный коэффициент. Представим выражение для γ в следующем виде:

$$\gamma = 1 + \widetilde{Q}\left(c_1, \frac{K_1}{K_2}, \frac{\mu_1}{\mu_2}, \frac{\mu_1}{K_2}, \frac{K_1}{\mu_2}\right). \tag{28}$$

В случае $\gamma = 1$ информация о масштабах в структуре отсутствует, т. е. выделение масштабов R и l теряет при этом смысл. Согласно приведённым выше выкладкам значение $\gamma = 1$ есть следствие отсутствия поверхностных интегралов в уравнении на функцию Грина (9). Определяемая при этом оператором $\lambda^*_{ijml}\partial_j\partial_l$ и источником, содержащим один заряд $\delta(\mathbf{r}^{(1)} - \mathbf{r}^{(2)})$, функция Грина не отображает микроструктуру гетерогенной среды. Оператор $\lambda^*_{ijml}\partial_j\partial_l$ с тривиальным источником $\delta(\mathbf{r}^{(1)} - \mathbf{r}^{(2)})$ не описывает шар как совокупность микроточек, отделённых от фазы с другими свойствами. Согласно указанной топологической точки зрения в случае $\gamma = 1$ в каждом из узлов в среде присутствует одна из фаз и фазы в соседних и более удалённых узлах при этом не являются скоррелированными, т. е. информация об областях фаз с соответствующими им границами и масштабами не отображается при $\gamma = 1$. Переходный слой при этом ограничивается рассматриваемым узлом (микроточкой). Отметим, что при малой концентрации сфер $c_1 \ll 1$, $R/l \ll 1$ также имеет место равенство $\gamma = 1$, отклонение от которого (по типу $\gamma = 1 + c_1$) приведёт в превышению порядка точности при разложении коэффициентов (26). Причём в случае $c_1 \ll 1$ не важно, как распределена среда — случайно или упорядоченно. (Это утверждение следует из аналогии для моделей Релея [21] и Максвелла [22], описывающих электропроводность гетерогенных сред.) Случай $\gamma = 1$ при этом отображает отсутствие взаимовлияния полей между составляющими одной фазы.

Представим модельные выражения (27), (28) на функцию γ в случае существенного различия между упругими параметрами фаз. Для этого возьмём выражение для источника в виде

$$T_{ip}(\mathbf{r}) = \delta_{ip}\delta(\mathbf{r}) + \delta_{ip}\frac{R}{l}\delta\left(\mathbf{r} - \frac{R^2}{l}\mathbf{n}_l\right), \tag{29}$$

приближённо отображающем рассмотренное выше взаимовлияние двух шаров. Единичный вектор $\mathbf{n}_l$ в силу изотропии зададим в виде $\mathbf{n}_l = \mathbf{r}/r$. С учётом выражения $\varphi(\mathbf{r}) = e^{-r/(\beta c_1 R)}$ найдём функцию γ:

$$\gamma = 1 + \frac{R}{l}\exp\left(-\frac{1}{\beta c_1}\frac{R}{l}\right) = 1 + \alpha\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{1/3}\exp\left(-\frac{\alpha}{\beta c_1}\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{1/3}\right). \tag{30}$$

Переход ко второму равенству осуществлён с учётом формул $c_1 = R^3/V_0$, $c_2 = \alpha^3 l^3/V_0$. Полученное модельное выражение на γ является функцией двух структурных параметров α и β. Как функция объёмной концентрации сфер c_1 формула (30) испытывает экстремум, являющийся максимумом. Свяжем этот экстремум с критической объёмной концентрацией сфер $c_{1\,\mathrm{crit}}$, при которой они становятся макроскопически связными. Выражение на критическую концентрацию $c_{1\,\mathrm{crit}}$ следует из анализа коэффициентов (26). Экстремум в точке $c_1 = c_{1\,\mathrm{crit}}$ позволяет получить выражение $\left(\dfrac{c_{1\,\mathrm{crit}}}{c_{2\,\mathrm{crit}}}\right)^{1/3}\dfrac{\alpha}{\beta c_{1\,\mathrm{crit}}} = 1$, связывающее параметры α и β, в результате чего модель (30) определяется только одним параметром. Соответствующий параметр можно найти из эксперимента, направленного на поиск модуля Юнга системы при определённой объёмной концентрации фаз.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для анализа микроструктуры гетерогенной среды в работе введена концепция обобщённой производной, отображающая сингулярной составляющей поведение полей на внутренних границах неоднородной структуры. Во введённом формализме обобщённой производной поверхностная дельта-функция выражена альтернативным образом относительно подхода Шварца, но не противоречит ему. В результате применения пространственного осреднения к формуле для обобщённой производной получена пространственная теорема осреднения в рамках теории смесей. Замена в исходной модели линейной теории упругости обычных производных на обобщённые сохраняет физическую суть исследуемых уравнений и корректность постановки задачи. Модифицированный обобщёнными производными оператор в исходной модели приводит к функции Грина, характеризующей микроструктурные особенности гетерогенной среды. В результате использования метода условных моментов, базирующегося на функции Грина, в итоговых эффективных коэффициентах упругости интегрально учтена микроструктура системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Khoroshun L. P.* A new mathematical model of the nonuniform deformation of composites // Mekh. Kompos. Mater. 1995. V. 31, N 3. P. 310–318.
2. *Khoroshun L. P.* Mathematical models and methods of the mechanics of stochastic composites // Appl. Mechanics. 2000. V. 30, N 10. P. 30–62.
3. *Hashin Z., Shtrikman S.* On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity // J. Mech. Phys. Solids. 1962. V. 10, N 4. P. 335–342.
4. *Hashin Z., Shtrikman S.* A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiphase materials // J. Mech. Phys. Solids. 1963. V. 11, N 2. P. 127–140.
5. *Hashin Z., Shtrikman S.* Conductivity of polycrystals // Phys. Rev. 1963. V. 130, N 129. P. 129–133.
6. *Шермергор Т. Д.* Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977.
7. *Bruggeman D. A. G.* Berechnung verschiedener physikalischer Konstanten von heterogenen Substanzen. II. Dielektrizitätskonstanten und Leitfähigkeiten von Vielrkistallen der nichtregularen Systeme // Ann. Phys. 1936. Bd. 417, N 25. P. 645–672.
8. *Kroner E.* Berechnung der elastischen Konstanten des Vielkristalls aus den Konstanten des Einkristalls // Z. Phys. 1958. Bd. 151, N 4. P. 504–518.
9. *Hill R. A.* Self-consistent mechanics of composite materials // J. Mech. Phys. Solids. 1965. V. 13, N 4. P. 213–222.
10. *Christensen R. M.* Theory of Viscoelasticity. N. Y.: Acad. Press, 1982.
11. *Khoroshun L. P.* Random functions theory in problems on the macroscopic characteristics of microinhomogeneous media // Appl. Mechanics. 1978. V. 14. P. 3–17.
12. *Khoroshun L. P.* Conditional-moment method in problems of the mechanics of composite materials // Appl. Mechanics. 1987. V. 23, N 10. P. 100–108.
13. *Bolotin V. V., Moskalenko V. N.* Determination of the elastic constants of a micro inhomogeneous medium // Zh. Prikl. Mekh. Tekhn. Fiz. 1968. V. 34, N 1. P. 66–72.
14. *Нигматуллин Р. И.* Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978.
15. *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.
16. *Mori T., Tanaka K.* Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions // Acta Metall. 1973. V. 21. P. 571–574.
17. *Castaneda P. P., Willis J. R.* The effect of spatial distribution on the effective behavior of composite materials and cracked media // J. Mech. Phys. Solids. 1995. V. 43. P. 1919–1951; http://dx.doi.org/10.1016/0022-5096(95)00058-Q
18. *Fedotov A.* The hybrid homogenization model of elastic anisotropic porous materials // J. Mater. Sci. 2018. V. 53. P. 5092–5102.
19. *Шварц Л.* Математические методы для физических наук. М.: Мир, 1965.
20. *Khoroshun L. P.* Elastic properties of materials reinforced with unidirectional short fibers // Appl. Mechanics. 1972. V. 8, N 10. P. 1–7.
21. *Maxwell J. C.* A Treatise on Electricity and Magnetism. Oxford: Clarendon Press, 1873.
22. *Rayleigh L.* On the influence of obstacles arranged in rectangular order upon the properties of a medium // Phil. Mag. 1892. V. 34. P. 481.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 539.3

GENERALIZED DERIVATIVE AND ITS USE FOR ANALYSIS OF THE MICROSTRUCTURE OF A HETEROGENEOUS MEDIUM

A. V. Mishin[1,2]

[1]*Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, ul. Institutskaya 4/1, Novosibirsk 630090, Russia;*
[2]*Novosibirsk State University, ul. Pirogova 1, Novosibirsk 630090, Russia*

E-mail: alekseymishin1994@gmail.com

Received 02.07.2021, revised 27.08.2021, accepted 21.10.2021

Abstract. An analytical account of the influence of the heterogeneous medium internal boundaries on the propagation of an elastic stress field through it is carried out. The introduced mathematical concept aimed at displaying the microstructure of a heterogeneous system is a derivative in a generalized sense. Based on the formalism of the generalized derivative, the operator is modified in the used initial model of the linear theory of elasticity. Green's function (built on the transformed operator) displays the microstructural features of the system. To obtain the effective coefficients of elasticity included in the averaged equations and describing the elastic properties of a heterogeneous medium, the method of conditional moments is used. Carrying out operations within the framework of this approach leads to integrals containing the modified averaged Green's function and the correlation function of the geometry of the structure. Based on these terms the microstructure of the system is integrally taken into account in the final effective elasticity coefficients.

Keywords: heterogeneous medium, microstructure, generalized derivative, Green's function, stochastic model, averaging.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.406

REFERENCES

1. Khoroshun L.P. A new mathematical model of the nonuniform deformation of composites. *Mekh. Kompos. Mater.*, 1995, Vol. 31, No. 3, pp. 310–318.
2. Khoroshun L.P. Mathematical models and methods of the mechanics of stochastic composites. *Appl. Mechanics*, 2000, Vol. 30, No. 10, pp. 30–62.
3. Hashin Z., Shtrikman S. On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, 1962, Vol. 10, No. 4, pp. 335–342.
4. Hashin Z., Shtrikman S. A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiphase materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 1963, Vol. 11, No. 2, pp. 127–140.
5. Hashin Z., Shtrikman S. Conductivity of polycrystals. *Phys. Rev.*, 1963, Vol. 130, No. 129, pp. 129–133.
6. Shermergor T.D. Elasticity theory for microinhomogeneous Materials. M.: Nauka, 1977 (in Russian).
7. Bruggeman D.A.G. Berechnung verschiedener physikalischer Konstanten von heterogenen Substanzen. II. Dielektrizitätskonstanten und Leitfähigkeiten von Vielrkistallen der nichtregularen Systeme. *Ann. Phys.*, 1936, Bd. 417, No. 25, pp. 645–672.
8. Kroner E. Berechnung der elastischen Konstanten des Vielkristalls aus den Konstanten des Einkristalls. *Z. Phys.*, 1958, Bd. 151, No. 4, pp. 504–518.

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2021, Vol. 15, No. 4.

9. Hill R.A. Self-consistent mechanics of composite materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 1965, Vol. 13, No. 4, pp. 213–222.
10. Christensen R.M. Theory of Viscoelasticity. N. Y.: Acad. Press, 1982.
11. Khoroshun L.P. Random functions theory in problems on the macroscopic characteristics of microinhomogeneous media. *Appl. Mechanics*, 1978, Vol. 14, pp. 3–17.
12. Khoroshun L.P. Conditional-moment method in problems of the mechanics of composite materials. *Appl. Mechanics*, 1987, Vol. 23, No. 10, pp. 100–108.
13. Bolotin V.V., Moskalenko V.N. Determination of the elastic constants of a micro inhomogeneous medium. *Zh. Prikl. Mekh. Tekhn. Fiz.*, 1968, Vol. 34, No. 1, pp. 66–72 (in Russian).
14. Nigmatullin R.I. Osnovy mekhaniki geterogennykh sred. M.: Nauka, 1978.
15. Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh. M.: Nauka, 1984.
16. Mori T., Tanaka K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metall*, 1973, Vol. 21, pp. 571–574.
17. Castaneda P.P., Willis J.R. The effect of spatial distribution on the effective behavior of composite materials and cracked media. *J. Mech. Phys. Solids*, 1995, Vol. 43, pp. 1919–1951; http://dx.doi.org/10.1016/0022-5096(95)00058-Q
18. Fedotov A. The hybrid homogenization model of elastic anisotropic porous materials. *J. Mater. Sci.*, 2018, Vol. 53, pp. 5092–5102.
19. Shvarts L. Matematicheskie metody dlya fizicheskikh nauk. M.: Mir, 1965.
20. Khoroshun L.P. Elastic properties of materials reinforced with unidirectional short fibers. *Appl. Mechanics*, 1972, Vol. 8, No. 10, pp. 1–7.
21. Maxwell J.C. A Treatise on Electricity and Magnetism. Oxford: Clarendon Press, 1873.
22. Rayleigh L. On the influence of obstacles arranged in rectangular order upon the properties of a medium. *Phil. Mag.*, 1892, Vol. 34, pp. 481.