СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ. 2021. Т. 24, № 4. С. 97–110

УДК 517.95

МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗОТРОПНОГО РОСТА НЕСЖИМАЕМОГО МАТЕРИАЛА НЕО-ГУКА

© 2021 П. И. Плотников

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
просп. Лаврентьева, 15, Новосибирск 630090, Россия

E-mail: piplotnikov@mail.ru

Поступила в редакцию 01.09.2021 г.; после доработки 08.09.2021 г.;
принята к публикации 21.10.2021 г.

Дан вывод математической модели объёмного роста несжимаемого материала нео-Гука. Такого рода модели используются для описании эволюции головного мозга под действием внешней нагрузки. Доказывается, что поле деформаций в гомеостатическом состоянии совпадает с группой Мёбиуса конформных преобразований. Даётся анализ линейной краевой задачи, полученной линеаризацией уравнений нелинейной модели на гомеостатическом состоянии. Исследуется поведение решений при неограниченном росте временной переменной. Основной вывод состоит в том, что изменения в материале, вызванные временным повышением давления (гидроцефалия), являются необратимыми.

Ключевые слова: объёмный рост, материал нео-Гука, уравнения Стокса, группа Мёбиуса.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.407

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

1.1. Материал нео-Гука

Несжимаемый материал нео-Гука является простейшей моделью нелинейного материала, которая находит широкое применение при математическом моделировании поведения биологических субстанций и, в частности, при моделировании эволюции головного мозга. В настоящей статье рассматривается краевая задача для системы дифференциальных уравнений, описывающей объёмный рост несжимаемого материала нео-Гука под действием приложенной нагрузки. На протяжении статьи мы будем предполагать, что материал занимает ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей в пространстве расчётных (лагранжевых) координат $x = (x_1, x_2, x_3)$. Далее для простоты мы будем предполагать, что область Ω является односвязной. Состояние материала полностью характеризуется полем деформаций $\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ и распределением давления $p\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Градиент поля деформаций $\nabla\mathbf{u}$ совпадает с матрицей Якоби отображения $\mathbf{u}\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$, которая имеет элементы $(\nabla\mathbf{u})_{ij} = \partial_j u_i, \quad \partial_j = \dfrac{\partial}{\partial_{x_j}}$. Для краткости используется обозначение $\mathbf{F} = \nabla\mathbf{u}$. Напомним, что материал является несжимаемым, если выполняется равенство

$$\det \nabla\mathbf{u} = 1 \quad \text{в} \quad \Omega.$$

Дивергенция векторного поля $\mathbf{u}$ и матричнозначной функции $\mathbf{A}$ определяется следующим образом:

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = \partial_i u_i, \quad \operatorname{div}\mathbf{A} = \partial_j \mathbf{A}_j, \tag{1.1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-11-00069).

где $\mathbf{A}_i$ — столбцы матрицы $\mathbf{A}$. Наконец, мы будем использовать обозначение [1]

$$\operatorname{cof}\mathbf{A} := \det\mathbf{A}\mathbf{A}^{-\top} \tag{1.2}$$

для матрицы, сопряжённой к присоединённой матрице $\operatorname{adj}\mathbf{A}$. Состояние гиперупругого материала полностью характеризуется плотностью упругой запасённой энергии. Для несжимаемого материала нео-Гука плотность запасённой энергии имеет вид [1]

$$\Psi = \frac{1}{2}(|\nabla\mathbf{u}|^2 - 3). \tag{1.3}$$

1.2. Основные положения теории объёмного роста несжимаемого материала нео-Гука

Напомним основные факты теории объёмного роста гиперупругого материала. Их подробное изложение можно найти в работах [2–4]. Наш анализ опирается на подход, развитый в [5, 6]. Основным постулатом теории является гипотеза о том, что $\nabla\mathbf{u} = \mathbf{F}_e\mathbf{F}_g$, где матричнозначная функция $\mathbf{F}_g$ отвечает за рост материала и называется фактором роста, а $\mathbf{F}_e$ отвечает за корректирующую упругую деформацию. Плотность запасённой энергии Ψ_g растущего материала определяется через плотность свободной энергии исходного гиперупругого материала Ψ посредством равенства (см. [5])

$$\Psi_g = \det\mathbf{F}_g\,\Psi(\mathbf{F}_e) \equiv \det\mathbf{F}_g\Psi\big(\mathbf{F}\mathbf{F}_g^{-1}\big) \equiv \det\mathbf{F}_g\frac{1}{2}\big(\big|\mathbf{F}\mathbf{F}_g^{-1}\big|^2 - 3\big). \tag{1.4}$$

Тензор $\mathbf{F}_e$ соответствует градиенту деформаций исходного несжимаемого материала нео-Гука, что влечёт равенство $\det\mathbf{F}_e = 1$. Отсюда вытекает определяющее соотношение

$$\det\mathbf{F} = \det\mathbf{F}_g \quad \text{или эквивалентно} \quad \det\nabla\mathbf{u} = \det\mathbf{F}_g. \tag{1.5}$$

В большинстве случаев теория ограничивается случаем изотропного роста, когда тензор фактора роста имеет простой вид:

$$\mathbf{F}_g(x,t) = w(x,t)\,\mathbf{I}, \quad w\colon \Omega\times(0,T)\to\mathbb{R}. \tag{1.6}$$

Отсутствию роста или атрофии соответствует значение фактора роста $w = 1$. Значения $w > 1$ соответствуют росту, а значения $w < 1$ соответствуют атрофии материала. Напомним, что поле деформаций является положительно ориентируемым, т. е. $\det\nabla\mathbf{u} > 0$ и $w > 0$. При сделанных предположениях задача о росте гиперупругого материала сводится к определению поля деформаций и фактора роста. Для этого необходимо вывести систему управляющих дифференциальных уравнений для $\mathbf{u}$ и w. В свою очередь вывод системы управляющих уравнений требует знания основных реологических соотношений. Наиболее важным из них является эффективное представления для тензора напряжений. Мы получим определяющие реологические соотношения как следствие неравенства Клаузиуса — Дюгема. Далее мы будем предполагать, что механическая система удовлетворяет следующим принципам.

Принцип независимости движений. Определяющие реологические соотношения должны выполняться для всех возможных нагрузок материального объёма, т. е. для всех достаточно гладких полей деформаций $\mathbf{u}$.

Второй принцип термодинамики. Для механической системы должно выполняться неравенство Клаузиуса — Дюгема. В изотермическом случае в теории объёмного роста гиперупругого материала неравенство Клаузиуса — Дюгема имеет вид (см. [5, 6])

$$\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial\Psi_g(\mathbf{F},w)}{\partial\mathbf{F}} : \partial_t\mathbf{F} + \frac{\partial\Psi_g(\mathbf{F},w)}{\partial w}\partial_t w - \mathbf{T} : \partial_t\mathbf{F}\right)dx \leqslant 0, \tag{1.7}$$

где $\mathbf{T}$ — тензор напряжений,

$$\Psi_g(\mathbf{F},w)=\frac{1}{2}(w|\mathbf{F}|^2-3w^3),\quad \frac{\partial\Psi_g(\mathbf{F},w)}{\partial\mathbf{F}}=w\mathbf{F},\quad \frac{\partial\Psi_g(\mathbf{F},w)}{\partial w}=\frac{1}{2}|\mathbf{F}|^2-\frac{9}{2}w^2.$$

Эволюционный принцип. Фактор роста должен удовлетворять эволюционному уравнению. Это означает, что производная $\partial_t w$ должна полностью определяться распределением поля деформаций $\mathbf{u}$ в момент времени t. Вид и тип этого уравнения роли не играют.

Из эволюционного принципа и тождества $\partial_t(\det\nabla\mathbf{u})\equiv(\operatorname{cof}\nabla\mathbf{u}):\partial_t\nabla\mathbf{u}$ вытекает, что при произвольно фиксированном поле деформаций величина σ, определённая соотношениями

$$\sigma=(\operatorname{cof}\nabla\mathbf{u}):\partial_t\nabla\mathbf{u},\quad \partial_t w=\frac{1}{3}(\det\nabla\mathbf{u})^{-2/3}\sigma=\frac{1}{3}w^{-2}\,\sigma, \tag{1.8}$$

также фиксирована. Отсюда и из принципа независимости движений следует, что в неравенстве Клаузиуса — Дюгема в качестве $\partial_t\nabla u$ можно выбрать произвольное векторное поле с фиксированной величиной σ, которая в свою очередь полностью определяется полем деформаций. Легко видеть, что требуемым условиям удовлетворяет каждое векторное поле вида

$$\partial_t\nabla\mathbf{u}=\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta},\quad \boldsymbol{\xi}=(\operatorname{cof}\nabla\mathbf{u})^{-\top}\operatorname{rot}\mathbf{A},\quad \boldsymbol{\eta}=(\operatorname{cof}\nabla\mathbf{u})^{-\top}\nabla\varphi, \tag{1.9}$$

где $\mathbf{A}\in C_0^\infty(\Omega)$ — произвольное векторное поле и φ — решение краевой задачи

$$\begin{aligned}\Delta\varphi&=\sigma\quad \text{в}\quad \Omega,\\ \varphi&=0\quad \text{на}\quad \partial\Omega.\end{aligned}$$

Для доказательства этого факта введём временное обозначение $\mathbf{M}=\operatorname{cof}\nabla\mathbf{u}$ и напомним, что согласно тождеству Пиолы $\operatorname{div}\mathbf{M}\equiv 0$. Имеем

$$\mathbf{M}:\nabla\boldsymbol{\xi}=(\mathbf{M})_{ij}\,\partial_j\big((\mathbf{M}^{-\top})_{ik}(\operatorname{rot}\mathbf{A})_k\big)=\partial_j\big((\mathbf{M}^{\top})_{ji}(\mathbf{M}^{-\top})_{ik}(\operatorname{rot}\mathbf{A})_k\big)=\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{A}=0,$$

что влечёт $\operatorname{cof}\nabla\mathbf{u}:\nabla\boldsymbol{\xi}=0$. Аналогично получаем

$$\mathbf{M}:\nabla\boldsymbol{\eta}=(\mathbf{M})_{ij}\,\partial_j\big((\mathbf{M}^{-\top})_{ik}\partial_k\varphi\big)=\partial_j\big((\mathbf{M}^{\top})_{ji}(\mathbf{M}^{-\top})_{ik}\partial_k\varphi\big)=\partial_j\big(\delta_{jk}\partial_k\varphi\big)=\Delta\varphi=\sigma,$$

что влечёт $\operatorname{cof}\nabla\mathbf{u}:\nabla\boldsymbol{\eta}=\sigma$. Таким образом, векторное поле $\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}$ удовлетворяет равенству

$$\operatorname{cof}\nabla\mathbf{u}:\nabla(\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta})=\sigma$$

для любого поля $\mathbf{A}\in C_0^\infty(\Omega)$. Подстановка соотношения (1.9) в (1.7) приводит к неравенству

$$\int\limits_\Omega\left(\frac{\partial\Psi_g(\mathbf{F},w)}{\partial\mathbf{F}}-\mathbf{T}\right):\nabla\boldsymbol{\xi}\,dx+\int\limits_\Omega\left(\frac{\partial\Psi_g(\mathbf{F},w)}{\partial\mathbf{F}}-\mathbf{T}\right):\nabla\boldsymbol{\eta}\,dx+\int\limits_\Omega\frac{\partial\Psi_g(\mathbf{F},w)}{\partial w}\,\partial_t w\,dx\leqslant 0. \tag{1.10}$$

Рассмотрим по отдельности каждый интеграл в левой части этого неравенства. Интегрируя по частям, находим

$$\int\limits_\Omega\left(\frac{\partial\Psi_g(\mathbf{F},w)}{\partial\mathbf{F}}-\mathbf{T}\right):\nabla\boldsymbol{\xi}\,dx=-\int\limits_\Omega(\operatorname{cof}\nabla\mathbf{u})^{-1}\operatorname{div}\left(\frac{\partial\Psi_g(\mathbf{F},w)}{\partial\mathbf{F}}-\mathbf{T}\right)\cdot\operatorname{rot}\mathbf{A}\,dx.$$

Так как $\mathbf{A}\in C^\infty(\Omega)$ произвольно и не зависит от σ, то оба интеграла в этом равенстве равны нулю. Действительно, в противном случае путём замены $\mathbf{A}\to\operatorname{const}\mathbf{A}$ всегда можно добиться того, что левая часть неравенства (1.10) будет положительной. Приравнивая второй интеграл в последнем равенстве к нулю, получим, что соотношение

$$\int\limits_{\Omega} (\operatorname{cof} \nabla \mathbf{u})^{-1} \operatorname{div} \left(\frac{\partial \Psi_g(\mathbf{F}, w)}{\partial \mathbf{F}} - \mathbf{T} \right) \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} \, dx = 0$$

будет выполняться для любого векторного поля $\mathbf{A} \in C_0^\infty(\Omega)$. Так как поле деформаций является гладким, то по теореме Вейля найдётся гладкое скалярное поле $p \colon \Omega \to \mathbb{R}$ такое, что

$$(\operatorname{cof} \nabla \mathbf{u})^{-1} \operatorname{div} \left(\frac{\partial \Psi_g(\mathbf{F}, w)}{\partial \mathbf{F}} - \mathbf{T} \right) = \nabla p \quad \text{в} \quad \Omega$$

для каждого момента времени t. Отсюда получаем

$$\operatorname{div} \left(\frac{\partial \Psi_g(\mathbf{F}, w)}{\partial \mathbf{F}} - \mathbf{T} \right) + (\operatorname{cof} \nabla \mathbf{u}) \nabla p = \operatorname{div} \left(\frac{\partial \Psi_g(\mathbf{F}, w)}{\partial \mathbf{F}} + p \operatorname{cof} \nabla \mathbf{u} - \mathbf{T} \right) = 0.$$

Следовательно, выражение под знаком дивергенции во втором интеграле равно нулю с точностью до некоторого несущественного тензора с тождественно равной нулю дивергенцией. Такого рода тензоры аннулируются уравнениями динамики упругого тела и ими можно пренебречь. Поэтому можно считать, что

$$\mathbf{T} = \frac{\partial \Psi_g(\mathbf{F}, w)}{\partial \mathbf{F}} + p \operatorname{cof} \nabla \mathbf{u}. \tag{1.11}$$

Рассмотрим второй интеграл в левой части неравенства (1.10). Вернёмся к обозначению $\mathbf{M} = \operatorname{cof} \nabla \mathbf{u}$. Из формулы (1.11) вытекает, что

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial \Psi_g(\mathbf{F}, w)}{\partial \mathbf{F}} - \mathbf{T} \right) : \nabla \boldsymbol{\eta} \, dx = - \int\limits_{\Omega} p \operatorname{cof} \nabla \mathbf{u} : \nabla \boldsymbol{\eta} \, dx \\ = \int\limits_{\Omega} \operatorname{div}(p\mathbf{M}) \cdot \eta \, dx - \int\limits_{\partial\Omega} (p\mathbf{M}\mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\eta} \, ds = \int\limits_{\Omega} \mathbf{M} \nabla p \cdot \eta \, dx - \int\limits_{\partial\Omega} (p\mathbf{M}\mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\eta} \, ds \\ = \int\limits_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla \varphi \, dx - \int\limits_{\partial\Omega} p\mathbf{n} \cdot \nabla \varphi \, ds = - \int\limits_{\Omega} p \cdot \Delta \varphi \, dx = - \int\limits_{\Omega} p \, \sigma \, dx = - \int\limits_{\Omega} 3 \, p \, w^2 \partial_t w \, dx. \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в неравенство (1.10) и замечая, что первый интеграл в левой части этого неравенства равен нулю, получаем

$$- \int\limits_{\Omega} 3pw^2 \partial_t w \, dx + \int\limits_{\Omega} \frac{\partial \Psi_g(\mathbf{F}, w)}{\partial w} \partial_t w \, dx = \int\limits_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla \mathbf{u}|^2 - 3 \left(\frac{3}{2} + p \right) w^2 \right) \partial_t w \, dx \leqslant 0.$$

Введём в рассмотрение важную величину

$$\mathbf{I}_1 = \frac{1}{2} w |\nabla \mathbf{u}|^2 - 3 \left(\frac{3}{2} + p \right) w^3. \tag{1.12}$$

Она имеет физический смысл и совпадает со следом материального тензора Эшелби для изотропного несжимаемого материала (см. [5, 6]). С учётом введённого понятия мы можем переписать неравенство Клаузиуса — Дюгема в окончательной форме:

$$\int\limits_{\Omega} \mathbf{I}_1 w^{-1} \partial_t w \, dx \leqslant 0. \tag{1.13}$$

1.3. Уравнения динамики растущего материала нео-Гука

Далее мы будем рассматривать квазистационарный процесс, пренебрегая инерционными членами в уравнениях динамики упругого континуума. Кроме того, будем предполагать, что на материальное тело действуют распределённая объёмная сила $\mathbf{f}$ и поверхностная сила $\mathbf{g}$. Тогда в каждый момент тело будет находиться в равновесии, что влечёт равенства

$$\operatorname{div}\mathbf{T} = \mathbf{f} \quad \text{в} \quad \Omega \times (0,T), \qquad \mathbf{Tn} + \mathbf{g} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \times (0,T), \tag{1.14}$$

где $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к границе Ω. Не существует общепринятых уравнений для определения фактора роста w. Как правило, используются различные варианты неконсервативной модели, основанной на предположении, что временная производная фактора роста является функцией фактора роста и градиента поля деформаций. Дополнительной гипотезой, которая может уточнить вид эволюционного уравнения для фактора роста, является предположение о том, что правая часть этого уравнения служит тензорной изотропной функцией от тензора Эшелби (см. [5, 6]). Для модели изотропного роста, основанной на неравенстве Клаузиуса — Дюгема, уравнение эволюции фактора роста определяется однозначно с точностью до одной скалярной функции следа тензора Эшелби $\mathbf{I}_1$. Действительно, из неравенства (1.13) и принципа независимости движений вытекает, что

$$w^{-1}\partial_t w = -\mathbf{a}(\mathbf{I}_1), \quad \text{где} \quad \mathbf{a}(s)s \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad s \in \mathbb{R}. \tag{1.15}$$

При выбранном $\mathbf{a}$ соотношение (1.15) даёт уравнение для определения фактора роста. Комбинируя эти результаты с (1.11) и (1.14), мы приходим к следующей системе уравнений и граничных условий для поля деформаций, давления и фактора роста:

$$\operatorname{div}(w\nabla\mathbf{u} + p\operatorname{cof}\nabla\mathbf{u}) = \mathbf{f}, \quad \det\nabla\mathbf{u} - w^3 = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \times (0,T), \tag{1.16a}$$

$$w^{-1}\partial_t w + \mathbf{a}(\mathbf{I}_1) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \times (0,T), \tag{1.16b}$$

$$(w\nabla\mathbf{u} + p\operatorname{cof}\nabla\mathbf{u})\mathbf{n} = -\mathbf{g} \quad \text{на} \quad \partial\Omega \times (0,T), \quad w(x,0) = w_0(x) \quad \text{в} \quad \Omega. \tag{1.16c}$$

Здесь след тензора Эшелби определяется равенством (1.12), коэффициент $\mathbf{a}$ — гладкая функция, удовлетворяющая условию (1.15). Уравнения (1.16a)–(1.6c) образуют замкнутую систему уравнений для векторного поля деформаций, скалярной функции давления и фактора роста, которая ляжет в основу дальнейших рассмотрений.

2. ГОМЕОСТАТИЧЕСКИЕ СОСТОЯНИЯ. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

2.1. Гомеостатические состояния

С некоторой долей неаккуратности мы будем говорить, что система находится в гомеостатическом состоянии, если она находится в равновесии и её энергия достигает абсолютного минимума. В нашем случае это означает, что

$$|\nabla\mathbf{u}|^2 = 3w^2, \quad \det\nabla\mathbf{u} = w^3, \quad \mathbf{I}_1 = 0.$$

Отсюда вытекает равенство $|\nabla\mathbf{u}|^2 = 3(\det\nabla\mathbf{u})^{2/3}$. Известно [7], что оно выполняется тогда и только тогда, когда отображение $\mathbf{u}\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ является конформным. Кроме того, из приведённых соотношений следует, что

$$w = (\det\mathbf{u})^{1/3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,|\nabla\mathbf{u}|, \quad p = -1. \tag{2.1}$$

Тем самым мы приходим к следующему утверждению.

Лемма 2.1. *Тройка* $(\mathbf{u}, p, w)$ *определяет гомеостатическое состояние тогда и только тогда, когда отображение* $\mathbf{u}\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ *является конформным, фактор роста и давление определяются равенствами* (2.1). *Каждое гомеостатическое состояние является стационарным решением краевой задачи* (1.16).

Согласно теореме Лиувилля, каждое конформное отображение $\mathbf{u}$ в $\mathbb{R}^3$ является суперпозицией преобразований сдвига, растяжения, вращения и инверсии:

$$x \to x + \mathbf{c}, \quad x \to \lambda x, \quad x \to \mathbf{O}x, \quad x \to \frac{x-a}{|x-a|^2}.$$

Здесь $a, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$ — произвольные постоянные и $\mathbf{O}$ — произвольная ортогональная матрица. Физический смысл имеют только такие преобразования инверсии, у которых полюс инверсии a находится вне области Ω. Напомним, что область Ω лежит в пространстве расчётных координат. В реальном физическом пространстве материал занимает область $\mathbf{u}(\Omega)$. Если Ω является сферой, то в гомеостатическом состоянии физическая область также является сферой. Если, например, Ω является эллипсоидом, то среди областей $\mathbf{u}(\Omega)$ могут встречаться весьма экзотические конфигурации.

Совокупность всех конформных отображений в $\mathbb{R}^3$ образует группу Мёбиуса $\mathcal{M}$ с единицей, соответствующей тождественному отображению (см. [8]). Группа Мёбиуса является 10-мерным многообразием. Касательное пространство $T\mathcal{M}$ к этому многообразию в единице (инфинитезимальное пространство группы) состоит из всех отображений вида

$$\boldsymbol{\zeta}(x) = \mathbf{b} + \mathbf{S}x + \lambda x + (A \cdot x)x - \frac{1}{2}|x|^2 A, \tag{2.2}$$

где $\mathbf{b}, A \in \mathbb{R}^3$ — произвольные векторы, λ — произвольная постоянная и $\mathbf{S}$ — произвольная антисимметрическая матрица. Важно отметить, что 10-мерное пространство всех отображений вида (2.2) совпадает с пространством решений переопределённой системы дифференциальных уравнений

$$\nabla\boldsymbol{\zeta} + \nabla\boldsymbol{\zeta}^\top - \frac{2}{3}\operatorname{div}\boldsymbol{\zeta}\mathbf{I} = 0. \tag{2.3}$$

Для читателей, знакомых с теорией групп Ли, заметим, что уравнения (2.3) являются обобщёнными уравнениями Киллинга для группы конформных преобразований в пространства $\mathbb{R}^3$ [9].

Вычисления показывают, что для любого поля из касательного пространства, определённого соотношением (2.2), выполняется равенство

$$\frac{1}{3}\operatorname{div}\boldsymbol{\zeta} = \lambda + A \cdot x. \tag{2.4}$$

Определение 2.1. Через $T\mathcal{M}$ обозначим линейное пространство всех отображений $\boldsymbol{\zeta}$, допускающих представление (2.2). Через $T\mathcal{M}_{\mathrm{div}}$ обозначим линейное пространство отображений, допускающих представление (2.4). Другими словами, $T\mathcal{M}_{\mathrm{div}}$ — это пространство дивергенций всех векторных полей, принадлежащих $T\mathcal{M}$.

Замечание 2.1. В этой работе мы имеем дело с трёхмерным материалом. Уравнения (1.16) зависят от размерности пространства явным образом (сомножители в выражении для следа тензора Эшелби, показатели степеней фактора роста в уравнениях динамики и т. п.). В этом смысле равновесное поле деформаций всегда является трёхмерным. Теоретически мы можем рассматривать двумерные материалы, для которых плотность запасённой энергии и условие несжимаемости имеют вид

$$\Psi_g = \frac{1}{2}(|\nabla\mathbf{u}|^2 - 2w^2), \quad \det\nabla\mathbf{u} = w^2.$$

Все предыдущие выводы остаются в силе для двух пространственных измерений, но в этом случае многообразие конформных отображений бесконечномерно. В частности, любая односвязная область физической плоскости может служить равновесной конфигурацией.

2.2. Линеаризованные уравнения

Система уравнений и краевых условий (1.16) является довольно сложной и её исследование целесообразно начать с изучения линеаризованной краевой задачи. Особый интерес представляет исследование линеаризации этих уравнений на гомеостатических состояниях. Мы ограничимся изучением линеаризации задачи на равновесном состоянии $\mathbf{u} = \mathbf{id}$, $p = -1$, $w = 1$. Линеаризация системы (1.16) на этом состоянии приводит к следующей линейной системе уравнений для малых отклонений $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\pi}$, φ поля деформаций, функции давления и фактора роста от равновесного состояния под действием распределённой силы $\mathbf{f}$ и поверхностной силы $\mathbf{g}$:

$$\operatorname{div}\Big(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^\top - \frac{2}{3}\operatorname{div}\mathbf{v}\mathbf{I} + \boldsymbol{\pi}\mathbf{I}\Big) = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 3\varphi \quad \text{в} \quad \Omega\times(0,T), \tag{2.5a}$$

$$\Big(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^\top - \frac{2}{3}\operatorname{div}\mathbf{v}\mathbf{I} + \boldsymbol{\pi}\,\mathbf{I}\Big)\cdot\mathbf{n} + \mathbf{g} = 0, \quad \text{на} \quad \partial\Omega\times(0,T), \tag{2.5b}$$

$$\partial_t\varphi = \alpha\boldsymbol{\pi} \quad \text{в} \quad \Omega\times(0,T), \quad \varphi = \varphi_0 \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{2.5c}$$

где $\alpha = 3\mathbf{a}'(0)$. Без ограничения общности можно считать, что $\alpha > 0$. Далее мы будем рассматривать наиболее общий класс решений начально-краевой задачи (2.5), обладающих конечной энергией.

Определение 2.2. Пусть $\mathbf{f} \in L^2(\Omega\times(0,T))$, $\mathbf{g} \in \mathrm{Ł}^2(\partial\Omega\times(0,T))$ и $\varphi_0 \in L^2(\Omega)$. Будем говорить, что тройка $\mathbf{v} \in L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega))$, $\boldsymbol{\pi} \in L^2(\Omega\times(0,T))$, $\varphi \in W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega))$ является слабым решением задачи (2.5a)–(2.5c), если уравнение несжимаемости $\operatorname{div}\mathbf{v} = 3\varphi$ и уравнение для фактора роста (2.5c) выполняются в сильном смысле, а уравнения динамики и граничное условие (2.5b) выполняются в смысле интегрального тождества. Последнее означает, что для каждого векторного поля $\boldsymbol{\zeta} \in C^\infty(\Omega\times(0,T)$ выполняется равенство

$$\int\limits_{\Omega\times(0,T)}\Big(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^\top - \frac{2}{3}\operatorname{div}\mathbf{v}\mathbf{I} + \boldsymbol{\pi}\mathbf{I}\Big) : \nabla\boldsymbol{\zeta}\,dxdt + \int\limits_{\Omega\times(0,T)}\mathbf{f}\cdot\boldsymbol{\zeta}\,dxdt + \int\limits_{\partial\Omega\times(0,T)}\mathbf{g}\cdot\boldsymbol{\zeta}\,dsdt = 0.$$

3. КОРРЕКТНОСТЬ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ

Основной целью этого раздела является исследование корректности краевой задачи (2.5a)–(2.5c). Наша стратегия состоит в следующем. Используя уравнения (2.5a) и (2.5b), мы представим поле деформаций $\mathbf{v}$ и давление $\boldsymbol{\pi}$ как линейные операторы от фактора роста φ. После подстановки этих операторов в уравнение (2.5c) мы получим операторное эволюционное уравнение для фактора роста и проведём анализ его решений. Для реализации этой программы представим решение задачи (2.5a), (2.5b) в виде суммы решений

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_f + \mathbf{w}, \quad \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}_f + \boldsymbol{\mu} \tag{3.1}$$

двух краевых задач

$$\begin{gathered}\operatorname{div}\big(\nabla\mathbf{v}_f + \nabla\mathbf{v}_f^\top + \boldsymbol{\pi}_f\,\mathbf{I}\big) = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div}\mathbf{v}_f = 0 \quad \text{в} \quad \Omega,\\ \big(\nabla\mathbf{v}_f + \nabla\mathbf{v}_f^\top + \boldsymbol{\pi}_f\mathbf{I}\big)\cdot\mathbf{n} + \mathbf{g} = 0, \quad \text{на} \quad \partial\Omega,\end{gathered} \tag{3.2}$$

$$\operatorname{div}\big(\nabla\mathbf{w}+\nabla\mathbf{w}^\top-\frac{2}{3}\operatorname{div}\mathbf{w}\mathbf{I}+\boldsymbol{\mu}\mathbf{I}\big)=0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad \operatorname{div}\mathbf{w}=3\varphi \quad \text{в} \quad \Omega,$$
$$\big(\nabla\mathbf{w}+\nabla\mathbf{w}^\top-\frac{2}{3}\operatorname{div}\mathbf{w}\mathbf{I}+\boldsymbol{\mu}\mathbf{I}\big)\mathbf{n}=0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{3.3}$$

Далее рассмотрим следующую конструкцию. Напомним определение 2.1 инфинитезимального пространства $T\mathcal{M}$ и соответствующего ему пространства $T\mathcal{M}_{\mathrm{div}}$. Разложим инфинитезимальное пространство $T\mathcal{M}$ в прямую сумму подпространств:

$$\mathcal{E}_{\mathrm{el}}=\{\mathbf{c}+\mathbf{S}x \mid \mathbf{c}\in\mathbb{R}^3, \mathbf{S}=-\mathbf{S}^\top\}, \quad \mathcal{E}_{\mathrm{gr}}=\Big\{\lambda x+(\mathbf{A}\cdot x)x-\frac{|x|^2}{2}\mathbf{A} \mid \lambda\in\mathbb{R},\ \mathbf{A}\in\mathbb{R}^3\Big\}.$$

Обозначим через $\mathcal{V}$ замкнутое подпространство $W^{1,2}(\Omega)$, состоящее из векторных полей, ортогональных $\mathcal{E}_{\mathrm{el}}$, через $\mathcal{W}$ — замкнутое подпространство $W^{1,2}(\Omega)$, состоящее из векторных полей, ортогональных $T\mathcal{M}$, а через $\mathcal{H}$ — замкнутое подпространство $L^2(\Omega)$, состоящее из векторных полей, ортогональных $T\mathcal{M}_{\mathrm{div}}$:

$$\mathcal{V}=\Big\{\mathbf{v}\in W^{1,2}(\Omega) \mid \int\limits_\Omega \mathbf{v}\cdot\zeta\,dx=0 \text{ для всех } \zeta\in\mathcal{E}_{\mathrm{el}}\Big\},$$
$$\mathcal{W}=\Big\{\mathbf{w}\in W^{1,2}(\Omega) \mid \int\limits_\Omega \mathbf{w}\cdot\zeta\,dx=0 \text{ для всех } \zeta\in T\mathcal{M}\Big\},$$
$$\mathcal{H}=\Big\{\varphi\in L^2(\Omega) \mid \int\limits_\Omega \varphi\cdot\zeta\,dx=0 \text{ для всех } \zeta\in T\mathcal{M}_{\mathrm{div}}\Big\}.$$

Пространства $W^{1,2}(\Omega)$ и $L^2(\Omega)$ представляются как прямые суммы замкнутых подпространств

$$W^{1,2}(\Omega)=\mathcal{E}_{\mathrm{el}}+\mathcal{V}=\mathcal{E}_{\mathrm{el}}+\mathcal{E}_{\mathrm{gr}}+\mathcal{W}, \quad L^2(\Omega)=T\mathcal{M}_{\mathrm{div}}+\mathcal{H}.$$

Далее через $\Pi: L^2(\Omega)\to\mathcal{H}$ мы будем обозначать оператор ортогонального проектирования пространства $L^2(\Omega)$ на подпространство $\mathcal{H}$.

Подпространство $\mathcal{E}_{\mathrm{el}}$ состоит из полей деформаций, которые порождены твердотельными движениями упругого материала. Такие поля не меняют расстояний между материальными частицами и не влияют на процесс роста. Поэтому целесообразно факторизовать пространства решений задач (3.2) и (3.3) по подпространству $\mathcal{E}_{\mathrm{el}}$. Далее мы будем предполагать, что

$$\mathbf{v}_f\in\mathcal{V}, \quad \mathbf{w}\in\mathcal{E}_{\mathrm{gr}}+\mathcal{W}.$$

Такого рода факторизация возможна только в линейной задаче. Следующее утверждение, которое является частным случаем предложения 3.6 из [11], гарантирует корректность задачи (3.2).

Лемма 3.1. *Пусть пара* $(\mathbf{f},\mathbf{g})\in L^2(\Omega)\times L^2(\partial\Omega)$ *уравновешена, т. е. удовлетворяет условиям*

$$\int\limits_\Omega \mathbf{f}\cdot\zeta\,dx+\int\limits_{\partial\Omega}\mathbf{g}\cdot\zeta\,ds=0 \quad \textit{для всех} \quad \zeta\in\mathcal{E}_{\mathrm{el}}.$$

Тогда задача (3.2) *имеет единственное слабое решение* $\mathbf{v}_f\in\mathcal{V}$, $\boldsymbol{\pi}_f\in L^2(\Omega)$, *допускающее оценку*

$$\|\mathbf{v}_f\|_{W^{1,2}(\Omega)}+\|\boldsymbol{\pi}_f\|_{L^2(\Omega)}\leqslant c(\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}+\|\mathbf{g}\|_{L^2(\partial\Omega)}). \tag{3.4}$$

Здесь постоянная c зависит только от области Ω.

Уравнения (3.2) является частным случаем уравнений (2.5a), (2.5b) с $\varphi=0$. Поэтому слабое решение задачи (3.2) понимается в соответствии с определением 3.1, приведённым ниже. Рассмотрим вопрос о корректности задачи (3.3) в классе слабых решений.

Определение 3.1. Будем говорить, что $\mathbf{w} \in W^{1,2}(\Omega)$ и $\boldsymbol{\mu} \in L^2(\Omega)$ являются слабым решением задачи (3.3), если $\operatorname{div} \mathbf{w} = 3\varphi$ и для любых векторных полей $\boldsymbol{\xi} \in W^{1,2}(\Omega)$ выполняется интегральное тождество

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}(\nabla\mathbf{w} + \nabla\mathbf{w}^{\top} - \frac{2}{3}\operatorname{div}\mathbf{w}\mathbf{I}) : \Big(\nabla\boldsymbol{\xi} + \nabla\boldsymbol{\xi}^{\top} - \frac{2}{3}\operatorname{div}\boldsymbol{\xi}\mathbf{I}\Big)\,dx + \int\limits_{\Omega}\boldsymbol{\mu}\operatorname{div}\boldsymbol{\xi}\,dx = 0. \qquad (3.5)$$

Следующее утверждение гарантирует существование и единственность слабых решений задачи (3.3).

Теорема 3.1. *Для любого $\varphi \in L^2(\Omega)$ задача* (3.3) *имеет единственное слабое решение $\mathbf{w} \in \mathcal{E}_{\rm gr} + \mathcal{W}$, $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{H}$, допускающее оценку*

$$\|\mathbf{w}\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|\boldsymbol{\mu}\|_{L^2(\Omega)} \leqslant c\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}. \qquad (3.6)$$

Функция давления $\boldsymbol{\mu}$ обращается в нуль тогда и только тогда, когда φ ортогональна $\mathcal{H}$, т. е. $\varphi \in T\mathcal{M}$. Существует постоянная $c > 0$, зависящая только от области Ω, такая, что

$$\int\limits_{\Omega}\boldsymbol{\mu}\varphi\,dx \leqslant -c^{-1}\|\Pi\varphi\|^2_{L^2(\Omega)}. \qquad (3.7)$$

Доказательство. Шаг 1. Сначала рассмотрим случай $\varphi = \Pi\varphi \in \mathcal{H}$. Заметим, что согласно обобщённому неравенству Корна [10] существует постоянная $c > 0$, зависящая только от области Ω, такая, что для всех $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ выполняются неравенства

$$c^{-1}\|\mathbf{w}\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} \leqslant \int\limits_{\Omega}\Big|\nabla\mathbf{w} + \nabla\mathbf{w}^{\top} - \frac{2}{3}\operatorname{div}\mathbf{w}\mathbf{I}\Big|^2\,dx \leqslant c\|\mathbf{w}\|^2_{W^{1,2}(\Omega)}. \qquad (3.8)$$

Мы будем искать пару $(\mathbf{w}, \boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{W} \times \mathcal{H}$ как критическую точку функционала

$$\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{w}, \boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{4}\int\limits_{\Omega}\Big|\nabla\mathbf{w} + \nabla\mathbf{w}^{\top} - \frac{2}{3}\operatorname{div}\mathbf{w}\mathbf{I}\Big|^2\,dx + \int\limits_{\Omega}\boldsymbol{\mu}(\operatorname{div}\mathbf{w} - 3\varphi)\,dx. \qquad (3.9)$$

С этой целью мы рассмотрим следующую задачу о максимине:

$$\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{w}, \boldsymbol{\mu}) = \max_{\widetilde{\boldsymbol{\mu}}\in\mathcal{H}}\ \min_{\widetilde{\mathbf{w}}\in\mathcal{W}}\ \boldsymbol{\Psi}(\widetilde{\mathbf{w}}, \widetilde{\boldsymbol{\mu}}).$$

Её анализ начнём с исследования вспомогательной вариационной задачи для фиксированного $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{H}$:

$$\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{w}_\mu, \boldsymbol{\mu}) = \min_{\tilde{\mathbf{w}}\in\mathcal{W}}\ \boldsymbol{\Psi}(\widetilde{\mathbf{w}}, \boldsymbol{\mu}). \qquad (3.10)$$

Для фиксированного $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{H}$ функционал $\boldsymbol{\Psi}(\cdot, \boldsymbol{\mu})$ является коэрцитивным и строго выпуклым в пространстве $\mathcal{W}$. Следовательно, задача (3.10) имеет единственное решение. Вычисление вариации функционала $\boldsymbol{\Psi}(\cdot, \boldsymbol{\mu})$ в точке экстремума приводит к интегральному тождеству

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\Big(\nabla\mathbf{w}_\mu + \nabla\mathbf{w}_\mu^{\top} - \frac{2}{3}\operatorname{div}\mathbf{w}_\mu\mathbf{I}\Big) : \Big(\nabla\boldsymbol{\xi} + \nabla\boldsymbol{\xi}^{\top} - \frac{2}{3}\operatorname{div}\boldsymbol{\xi}\mathbf{I}\Big)\,dx + \int\limits_{\Omega}\boldsymbol{\mu}\operatorname{div}\boldsymbol{\xi}\,dx = 0, \qquad (3.11)$$

которое выполняется для любого элемента $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{W}$. Заметим что пространство $W^{1,2}(\Omega)$ разлагается в прямую сумму двух подпространств $T\mathcal{M} + \mathcal{W}$. Каждый элемент $\boldsymbol{\zeta} \in T\mathcal{M}$ удовлетворяет переопределённой системе (2.3). Кроме того, дивергенция $\operatorname{div}\boldsymbol{\zeta}$ ортогональна пространству $\mathcal{H}$.

Отсюда следует, что добавление к полю $\boldsymbol{\xi}$ любого элемента из пространства $T\mathcal{M}$ не меняет (3.11). Следовательно, это равенство выполняется для любого элемента $\boldsymbol{\xi} \in W^{1,2}(\Omega)$ из более широкого гильбертова пространства $W^{1,2}(\Omega)$. Далее, полагая $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{w}_\mu$ в (3.11), мы получим равенство

$$\int\limits_\Omega \boldsymbol{\mu}\,\mathrm{div}\,\mathbf{w}_\mu\,dx = -\frac{1}{2}\int\limits_\Omega \Big|\nabla\mathbf{w}_\mu + \nabla\mathbf{w}_\mu^\top - \frac{2}{3}\,\mathrm{div}\,\mathbf{w}_\mu\mathbf{I}\Big|^2\,dx,$$

которое вместе с (3.9) влечёт следующее представление для маргинальной функции:

$$\mathfrak{P}(\boldsymbol{\mu}) \equiv \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{w}_\mu, \boldsymbol{\mu}) = -\frac{1}{4}\int\limits_\Omega \Big|\nabla\mathbf{w}_\mu + \nabla\mathbf{w}_\mu^\top - \frac{2}{3}\,\mathrm{div}\,\mathbf{w}_\mu\,\mathbf{I}\Big|^2\,dx - 3\int\limits_\Omega \boldsymbol{\mu}\,\varphi\,dx. \tag{3.12}$$

Наконец отметим, что норма $\|\boldsymbol{\mu}\|_{L^2(\Omega)}$ допускает оценку через норму $\|\mathbf{w}_\mu\|_{W^{1,2}(\Omega)}$. Действительно, согласно лемме Боговского существует векторное поле $\boldsymbol{\xi}$ со следующими свойствами:

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\mu} \text{ в } \Omega, \quad \boldsymbol{\xi} = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad \|\boldsymbol{\xi}\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leqslant c(\Omega)\,\|\boldsymbol{\mu}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Подстановка этого поля в (3.11) даёт неравенство

$$\int\limits_\Omega \boldsymbol{\mu}^2\,dx \leqslant \bigg(\int\limits_\Omega \Big|\nabla\mathbf{w}_\mu + \nabla\mathbf{w}_\mu^\top - \frac{2}{3}\,\mathrm{div}\,\mathbf{w}_\mu\Big|^2\,dx\bigg)^{1/2}\bigg(\int\limits_\Omega |\nabla\boldsymbol{\xi}|^2\,dx\bigg)^{1/2},$$

которое влечёт за собой оценку

$$\|\boldsymbol{\mu}\|_{L^2(\Omega)} \leqslant c\|\mathbf{w}_\mu\|_{W^{1,2}(\Omega)}. \tag{3.13}$$

Рассмотрим вариационную задачу $\mathfrak{P}(\boldsymbol{\mu}) = \max\limits_{\tilde{\boldsymbol{\mu}}\in\mathcal{H}} \mathfrak{P}(\tilde{\boldsymbol{\mu}})$ для маргинальной функции $\mathfrak{P}$. Пусть $\boldsymbol{\mu}_n$ — соответствующая максимизирующая последовательность. Заметим, что $\mathfrak{P}(0) = 0$ и $-\mathfrak{P}(\boldsymbol{\mu}_n) \leqslant 0$. Так как $\boldsymbol{w}_\mu \in \mathcal{W}$, то из обобщённого неравенства Корна, формулы (3.12) и оценки (3.13) вытекает, что

$$\|\mathbf{w}_{\mu_n}\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} - c\|\mathbf{w}_{\mu_n}\|_{W^{1,2}(\Omega)}\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leqslant -c\mathfrak{P}(\boldsymbol{\mu}_n) \leqslant 0.$$

Отсюда следует, что последовательность $\mathbf{w}_{\mu_n}$ ограничена в $W^{1,2}(\Omega)$, а в силу оценки (3.13) последовательность $\boldsymbol{\mu}_n$ ограничена в $L^2(\Omega)$. Более того, справедлива оценка

$$\|\mathbf{w}_{\mu_n}\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|\boldsymbol{\mu}_n\|_{L^2(\Omega)} \leqslant c\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.14}$$

Переходя к подпоследовательности, можно считать, что для некоторых $\mathbf{w}^* \in \mathcal{W}$ и $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{H}$ последовательность $\mathbf{w}_{\mu_n}$ сходится к $\mathbf{w}^*$ слабо в $W^{1,2}(\Omega)$, а последовательность $\boldsymbol{\mu}_n$ сходится к $\boldsymbol{\mu}$ слабо в $L^2(\Omega)$. Легко видеть, что $\mathbf{w}_\mu$ линейно зависит от $\boldsymbol{\mu}$ и отображение $\boldsymbol{\mu} \to \mathbf{w}_\mu$ пространства $\mathcal{H}$ в $\mathcal{W}$ является непрерывным. Отсюда следует, что $\mathbf{w}^* = \mathbf{w}_\mu$. Кроме того, функционал $-\mathfrak{P} : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ является выпуклым как композиция линейной и выпуклой функций. Поэтому предельная функция $\boldsymbol{\mu}$ является точкой абсолютного максимума маргинальной функции $\mathfrak{P}$. Очевидно, функции $\mathbf{w}_\mu$ и $\boldsymbol{\mu}$ также допускают оценку (3.14). Вычисление вариации маргинальной функции в точке максимума приводит к равенствам

$$\mathfrak{P}'(\boldsymbol{\mu})\psi \equiv \boldsymbol{\Psi}'_{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{w}_\mu, \boldsymbol{\mu})\psi = \int\limits_\Omega \psi(\mathrm{div}\,\mathbf{w}_\mu - 3\varphi)\,dx = 0 \quad \text{для любого} \quad \psi \in \mathcal{H}. \tag{3.15}$$

Отсюда следует, что функция $\operatorname{div}\mathbf{w}_\mu - 3\varphi$ ортогональна подпространству $\mathcal{H}$. В частности, она допускает представление

$$\operatorname{div}\mathbf{w}_\mu - 3\varphi = -\operatorname{div}\boldsymbol{\zeta}_\mu = 3\lambda + 3\mathbf{A}\cdot x \in T\mathcal{M}_{\mathrm{div}}, \quad -\boldsymbol{\zeta}_\mu = \lambda x + (\mathbf{A}\cdot x)x - \frac{|x|^2}{2}\mathbf{A} \in T\mathcal{M},$$

в котором $\operatorname{div}\boldsymbol{\zeta}_\mu$ — ортогональная проекция $\operatorname{div}\mathbf{w}_\mu - 3\varphi$ на подпространство $T\mathcal{M}_{\mathrm{div}}$. Из оценки (3.14) для $\mathbf{w}_\mu$ вытекают неравенства

$$\|\boldsymbol{\zeta}_\mu\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leqslant c(|\lambda| + |\mathbf{A}|) \leqslant c\|\operatorname{div}\boldsymbol{\zeta}_\mu\|_{L^2(\Omega)} \leqslant c\|\mathbf{w}_\mu\|_{W^{1,2}(\Omega)} + c\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leqslant c\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.16}$$

Очевидно, что $\boldsymbol{\zeta}_\mu$ служит слабым решением задачи (3.3) с $3\varphi = \operatorname{div}\boldsymbol{\zeta}_\mu$ и функцией давления, равной нулю. Поэтому

$$\mathbf{w}_\Pi = \boldsymbol{\zeta}_\mu + \mathbf{w}_\mu \in \mathcal{E}_{gr} + \mathcal{W} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{\mu}_\Pi = \boldsymbol{\mu} \in \mathcal{H} \tag{3.17}$$

определяют искомое решение задачи (3.3) в случае $\varphi = \Pi\varphi \in \mathcal{H}$. Оценка (3.6) для $\mathbf{w}_\Pi$ и $\boldsymbol{\mu}_\Pi$ очевидным образом вытекает из оценки (3.14) для $\mathbf{w}_\mu$, $\boldsymbol{\mu}$ и оценки (3.16). Отметим одно полезное неравенство, которое позволяет оценить $\Pi\varphi$ через $\mathbf{w}_\Pi$. Заметим, что $\mathbf{w}_\mu \in \mathcal{W}$ удовлетворяет обобщённому неравенству Корна (3.8). С другой стороны, из соотношения (3.15) вытекает, что $\Pi\operatorname{div}\mathbf{w}_\mu = 3\Pi\varphi$. Комбинируя это равенство с неравенством Корна, приходим к оценке

$$\left\|\nabla\mathbf{w}_\mu + \nabla\mathbf{w}_\mu^\top - \frac{2}{3}\operatorname{div}\mathbf{w}_\mu\right\|_{L^2(\Omega)} \geqslant c^{-1}\|\Pi\operatorname{div}\mathbf{w}_\mu\|_{L^2(\Omega)} \geqslant c^{-1}\|\Pi\varphi\|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.18}$$

Векторное поле $\boldsymbol{\zeta}_\mu$ удовлетворяет переопределённой системе (2.3). Поэтому включение слагаемого $\boldsymbol{\zeta}_\mu$ в выражение для поля деформаций оставляет левую часть неравенства (3.18) неизменной, что влечёт за собой оценку

$$\left\|\nabla\mathbf{w}_\Pi + \nabla\mathbf{w}_\Pi^\top - \frac{2}{3}\operatorname{div}\mathbf{w}_\Pi\right\|_{L^2(\Omega)} \geqslant c^{-1}\|\Pi\varphi\|_{L^2(\Omega)} \tag{3.19}$$

с положительной постоянной c, зависящей только от Ω.

Шаг 2. Рассмотрим общий случай $\varphi \in L^2$. В этом случае заданная функция $\varphi \in L^2(\Omega)$ допускает ортогональное разложение $\varphi = \varphi_M + \Pi\varphi$, в котором $\varphi_M = (\mathbf{I} - \Pi)\varphi$ — некоторый элемент из пространства $T\mathcal{M}_{\mathrm{div}}$, допускающий представление $\varphi_M = \operatorname{div}\boldsymbol{\zeta}_M$, $\boldsymbol{\zeta}_M \in T\mathcal{M}$. Таким образом, решение $(\mathbf{w}, \boldsymbol{\mu})$ задачи (3.3) представляется в виде суммы двух решений $(\mathbf{w}_\Pi, \boldsymbol{\mu}_\Pi)$ и $(\mathbf{w}_M, \boldsymbol{\mu}_M)$, соответствующих заданным функциями $\Pi\varphi$ и φ_M. Решение $(\mathbf{w}_\Pi, \boldsymbol{\mu}_\Pi)$ было определено на первом шаге доказательства, когда было показано, что задача (3.3) при $\varphi = \Pi\varphi$ имеет решение, допускающее оценки (3.6) и (3.19). Осталось рассмотреть второй случай, когда $\varphi = \varphi_M$. В этом случае решение имеет явный вид $(\mathbf{w}_M, \boldsymbol{\mu}_M) = (3\boldsymbol{\zeta}_M, 0)$. Более того, в этом случае $\boldsymbol{\mu}_M = 0$, а оценка (3.6) для $\mathbf{w}_M$ очевидным образом вытекает из неравенств

$$\|\boldsymbol{\zeta}_M\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leqslant c\|\operatorname{div}\boldsymbol{\zeta}_M\|_{L^2(\Omega)} = \|\varphi_M\|_{L^2(\Omega)} \equiv \|(\mathbf{I} - \Pi)\varphi\|_{L^2(\Omega)}.$$

Остаётся заметить, что векторное поле $\mathbf{w}_M = \boldsymbol{\zeta}_M$ удовлетворяет переопределённой системе (2.3). Отсюда и из неравенства (3.19) вытекает следующая оценка для решения задачи (3.3):

$$\left\|\nabla\mathbf{w} + \nabla\mathbf{w}^\top - \frac{2}{3}\operatorname{div}\mathbf{w}\right\|_{L^2(\Omega)} \geqslant c^{-1}\|\Pi\varphi\|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.20}$$

Таким образом, мы установили существование решения задачи (3.6). Единственность построенного решения следует из оценки (3.6).

Шаг 3. Осталось исследовать свойства функции давления $\boldsymbol{\mu}$ для решений задачи (3.3). Прежде всего заметим, что если $\Pi\varphi = 0$, то $(\mathbf{w}, \boldsymbol{\mu}) = (\mathbf{w}_M, \boldsymbol{\mu}_M)$. Следовательно, $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_M \equiv 0$. Обратно, если $\boldsymbol{\mu} = 0$, то, полагая в тождестве (3.5) $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{w}$, получим

$$\nabla\mathbf{w} + \nabla\mathbf{w}^\top - 3^{-1}2\operatorname{div}\mathbf{w}\mathbf{I} = 0.$$

Отсюда вытекает, что $\mathbf{w} \in T\mathcal{M}$ и $3\varphi = \operatorname{div}\mathbf{w} \in T\mathcal{M}_{\mathrm{div}}$. Следовательно, $\Pi\varphi = 0$. Таким образом, $\boldsymbol{\mu}$ обращается в нуль тогда и только тогда, когда $\Pi\varphi = 0$. Включение $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{H}$, равенство $\operatorname{div}\mathbf{w} = 3\varphi$ и тождество (3.5) с $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{w}$ влекут за собой соотношения

$$3\int\limits_\Omega \boldsymbol{\mu}\Pi\varphi\,dx = 3\int\limits_\Omega \boldsymbol{\mu}\varphi\,dx = \int\limits_\Omega \boldsymbol{\mu}\operatorname{div}\mathbf{w}\,dx = -\frac{1}{2}\int\limits_\Omega \left|\nabla\mathbf{w} + \nabla\mathbf{w}^\top - \frac{2}{3}\operatorname{div}\mathbf{w}\mathbf{I}\right|^2 dx. \tag{3.21}$$

Отсюда и из (3.20) следует нужное неравенство (3.7). □

3.1. Редукция линейной задачи к эволюционному операторному уравнению

Теперь мы в состоянии доказать корректность основной линейной задачи (2.5) и исследовать поведение её решений. Прежде всего заметим, что согласно лемме 3.1 и теореме 3.1 поле деформаций $\mathbf{v} = \mathbf{v}_f + \mathbf{w}$ и поле давления $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}_f + \boldsymbol{\mu}$ определяются фактором роста φ. Более того, упругие деформация $\mathbf{v}_f$ и функция давления $\boldsymbol{\pi}_f$ полностью определяются силами $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ и не зависят от φ. Поэтому нам достаточно найти фактор роста и исследовать его свойства. Для этого мы сведём исходную линейную задачу к операторному уравнению. Построение опирается на следующую лемму.

Лемма 3.2. *Пусть* $(\mathbf{w}, \boldsymbol{\mu})$ *— решение задачи* (3.3) *с произвольной функцией* $\varphi \in L^2(\Omega)$. *Тогда отображение* $\mathbf{B} : \varphi \to \boldsymbol{\mu}$ *определяет ограниченный симметричный оператор в* $L^2(\Omega)$. *Ортогональные подпространства* $T\mathcal{M}_{\mathrm{div}}$ *и* $\mathcal{H}$ *являются инвариантными подпространствами* $\mathbf{B}$. *Оператор* $\mathbf{B}$ *обращается в нуль на* $T\mathcal{M}_{\mathrm{div}}$ *и строго отрицателен на* $\mathcal{H}$, *т. е.*

$$\mathbf{B}(\mathbf{I} - \Pi) = 0, \quad \langle\mathbf{B}\varphi, \varphi\rangle_{L^2(\Omega)} \leqslant -c^{-1}\|\Pi\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} \quad \text{для всех} \quad \varphi \in L^2(\Omega). \tag{3.22}$$

Доказательство. Очевидно, что оператор $\mathbf{B}$ линеен. Его ограниченность следует из оценки (3.6), а симметричность вытекает из формулы Грина для задачи (3.3). Соотношения (3.22) очевидным образом вытекают из свойств функции давления $\boldsymbol{\mu}$, указанных в теореме 3.1. □

Из леммы 3.2, уравнения (2.5c) в системе (2.5a)–(2.5c) и разложения (3.1) вытекает следующее эволюционное операторное уравнение в пространстве $L^2(\Omega)$ для фактора роста φ:

$$\partial_t\varphi = \alpha\mathbf{B}\varphi + \alpha\boldsymbol{\pi}_f \quad \text{на интервале} \quad (0, \infty), \quad \varphi(0) = \varphi_0, \tag{3.23}$$

где $\varphi_0 \in L^2(\Omega)$ — произвольно заданная функция. Упругое давление $\boldsymbol{\pi}_f$ дано леммой 3.1. Оно полностью определяется заданными силами $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$. Следующее утверждение является основным результатом настоящей работы.

Теорема 3.2. *Пусть заданные силы* $\mathbf{f} \in L^1(0, \infty; L^2(\Omega))$ *и* $\mathbf{g} \in L^2(0, \infty; L^2(\partial\Omega))$ *уравновешены в каждый момент времени* t. *Тогда* $\boldsymbol{\pi}_f \in L^1(0, \infty; L^2(\Omega))$ *и задача* (3.23) *имеет единственное решение* $\varphi \in C(0, \infty; L^2(\Omega))$, *которое при неограниченном возрастании временной переменной стремится к предельному значению*

$$\varphi(t) \to (\mathbf{I} - \Pi)\varphi_0 + \alpha\int\limits_0^\infty (\mathbf{I} - \Pi)\boldsymbol{\pi}_f(s)\,ds \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

В частности, отсюда следует, что предельное состояние принадлежит пространству $T\mathcal{M}_{\mathrm{div}}$ *и является гомеостатическим. Кроме того, в общем случае оно не совпадает с начальным состоянием, даже если начальное состояние является гоместатическим, т. е.* $\varphi_0 \in T\mathcal{M}_{\mathrm{div}}$. *Это указывает на необратимость процесса роста.*

Доказательство. Принадлежность функции давления $\boldsymbol{\pi}_f$ классу $L^1(0,\infty;L^2(\Omega))$ следует из оценки (3.4). Решение эволюционного операторного уравнения (2.23) даётся явными формулами

$$\Pi\,\varphi(t)=e^{\alpha t\mathbf{B}}\varphi_0+\alpha\int\limits_0^t e^{\alpha(t-s)t\mathbf{B}}\Pi\boldsymbol{\pi}_f(s)\,ds,\quad (\mathbf{I}-\Pi)\,\varphi(t)=(\mathbf{I}-\Pi)\varphi_0+\alpha\int\limits_0^t(\mathbf{I}-\Pi)\boldsymbol{\pi}_f(s)\,ds,$$

которые вместе с соотношениями (3.22) гарантируют требуемые свойства φ. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ciarlet P.* Mathematical Elasticity 1: Three-dimensional Elasticity. Basel: Elsevier Sci. Publ., 1988.
2. *Cowin S. C.* Tissue growth and remodeling // Ann. Rev. Biomed. Eng. 2004. V. 6. P. 77–107.
3. *Rodriguez E., Hoger A., McCulloch A.* Stress-dependent finite growth law in soft elastic tissue // J. Biomech. 1994. V. 27. P. 455–467.
4. *Skalak R., Dasgupta G., Moss M., Otten E., Dullemeijer P., Vilmann H.* Analytical description of growth // J. Theor. Biol. 1982. V. 94. P. 555–577.
5. *Epstein M., Maugin G. A.* Thermomechanics of volumetric growth in uniform bodies // Int. J. Plasticity. 2000. V. 16. P. 951-978.
6. *Ciarletta P., Ambrosi D., Maugin G. A.* Mass transport in morphogenetic processes: a second gradient theory for volumetric growth and material remodeling // J. Mech. Phys. Solids. 2012. V. 60. P. 432–450.
7. *Reshetnyak Yu. G.* Stability Theorems in Geometry and Analysis. Dordrecht: Kluwer, 1994.
8. *Альфорс Л.* Преобразования Мёбиуса в многомерном пространстве. М.: Мир, 1981.
9. *Эйзенхарт Л.* Риманова геометрия. М.: Изд-во иностр. лит., 1948.
10. *Решетняк Ю. Г.* Оценки для некоторых дифференциальных операторов с конечномерным ядром // Сиб. мат. журн. 1970. Т. 11, № 2. С. 414–428.
11. *Плотников П. И.* Обёмный рост несжимаемого материала нео-Гука // Сиб. электрон. мат. известия. 2020. Т. 17. С. 1990–2027.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 517.95

MODELING THE ISOTROPIC GROWTH OF INCOMPRESSIBLE NEO-HOOKEAN MATERIAL

© 2021 P. I. Plotnikov

Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, pr. Akad. Lavrentyeva 15, Novosibirsk 630090, Russia

E-mail: piplotnikov@mail.ru

Received 01.09.2021, revised 08.09.2021, accepted 21.10.2021

Abstract. The paper is devoted to the analysis of the mathematical model of the volumetric growth of incompressible neo-Hookean material. Models of this kind are used in order to describe the evolution of the human brain under the action of an external load. In the paper, we show that the space of deformation fields in the homeostatic state coincides with the Möbius group of conformal transforms in $\mathbb{R}^3$. We prove the well-posedness of the linear boundary value problem obtained by linearizing the governing equations on the homeostatic state. We study the behavior of solutions when the time variable tends to infinity. The main conclusion is that changes in the material, caused by a temporary increase in pressure (hydrocephalus) are irreversible.

Keywords: volumetric growth, neo-Hookean material, Stokes equations, Möbius group.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.407

REFERENCES

1. Ciarlet P. Mathematical Elasticity 1: Three-dimensional Elasticity. Basel: Elsevier Sci. Publ., 1988.
2. Cowin S.C. Tissue growth and remodeling. *Ann. Rev. Biomed. Eng.*, 2004, Vol. 6, pp. 77–107.
3. Rodriguez E., Hoger A., McCulloch A. Stress-dependent finite growth law in soft elastic tissue. *J. Biomech.*, 1994, Vol. 27, pp. 455–467.
4. Skalak R., Dasgupta G., Moss M., Otten E., Dullemeijer P., Vilmann H. Analytical description of growth. *J. Theor. Biol.*, 1982, Vol. 94, pp. 555–577.
5. Epstein M., Maugin G A. Thermomechanics of volumetric growth in uniform bodies. *Int. J. Plasticity*, 2000, Vol. 16, pp. 951-978.
6. Ciarletta P., Ambrosi D., Maugin G A. Mass transport in morphogenetic processes: a second gradient theory for volumetric growth and material remodeling. *J. Mech. Phys. Solids*, 2012, Vol. 60, pp. 432–450.
7. Reshetnyak Yu G. Stability Theorems in Geometry and Analysis. Dordrecht: Kluwer, 1994.
8. Al'fors L. Preobrazovaniya Mebiusa v mnogomernom prostranstve. M.: Mir, 1981.
9. Eizenkhart L. Rimanova geometriya. Moscow: Izd-vo Inostr. Lit., 1948.
10. Reshetnyak Yu G. Otsenki dlya nekotorykh differentsial'nykh operatorov s konechnomernym yadrom. *Sib. Math. Zhurn.*, 1970, Vol. 11, No. 2, pp. 414–428.
11. Plotnikov P.I. Obemnyi rost neszhimaemogo materiala neo-Guka. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2020, Vol. 17, pp. 1990–2027.

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2021, Vol. 15, No. 4.