УДК 338.4.01

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ ВОСПРОИЗВОДСТВА ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКИХ МНОГОФАКТОРНЫХ БАЛАНСОВ ПРОИЗВОДСТВА И ПОТРЕБЛЕНИЯ

© 2021 Н. И. Сидняев[a], К. Р. Кесоян[b]

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, ул. 2-я Бауманская, 5, г. Москва 105005, Россия

E-mails: [a]sidnyaev@bmstu.ru, [b]karen.kesoyan.bmstu@yandex.ru

Поступила в редакцию 11.02.2021 г.; после доработки 20.04.2021 г.;
принята к публикации 21.10.2021 г.

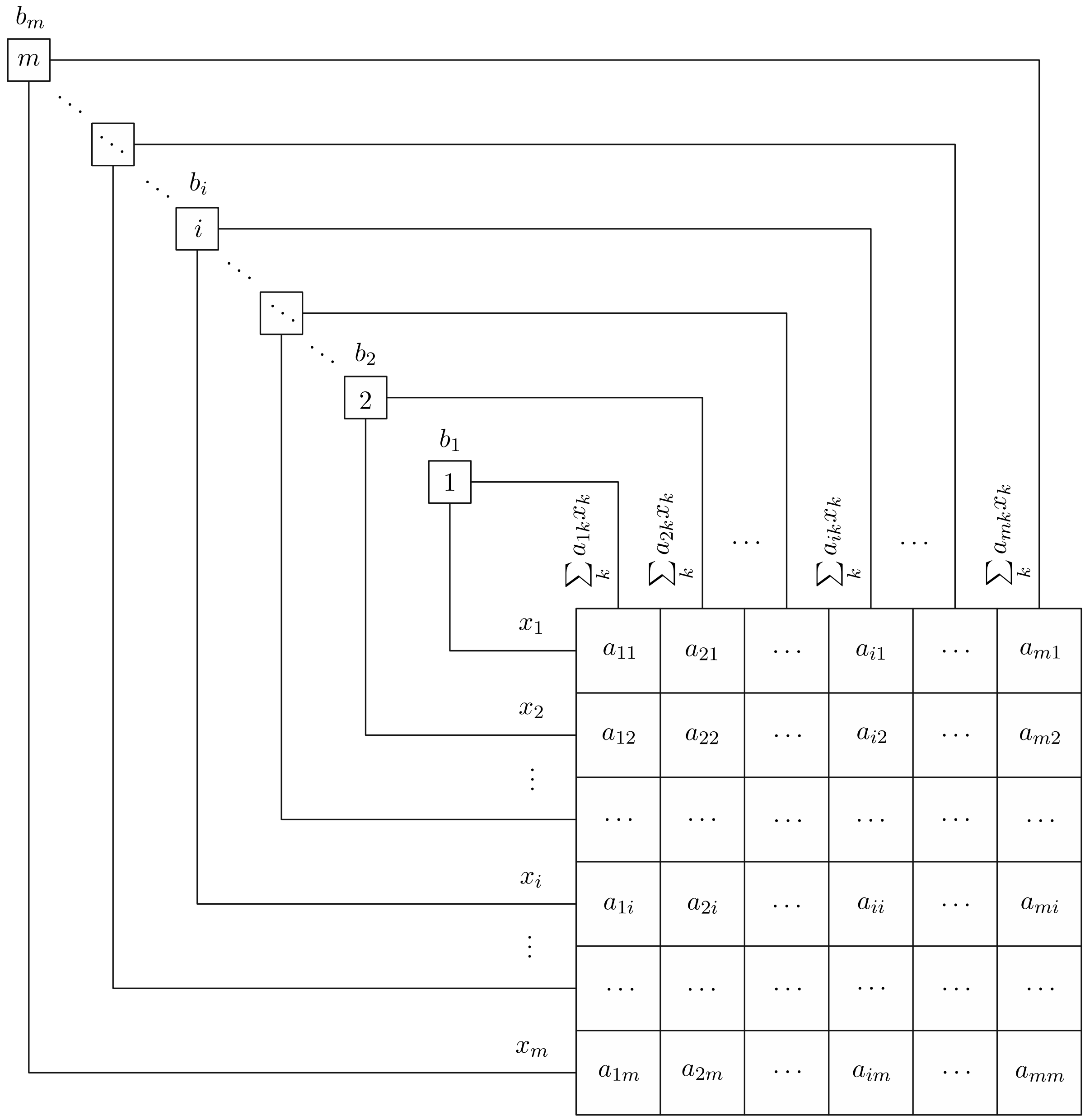
Развиваются теоретические знания о количественных взаимосвязях и закономерностях экономического развития, механизмах управления народным хозяйством. Излагается методология и методика построения, анализа и применения математической модели воспроизводства для динамических многофакторных балансов производства и потребления. Показано, что математическая модель существенно расширяет возможности экономического анализа, повышает качество принимаемых экономических решений. Межотраслевой баланс представлен как экономико-математическая модель процесса воспроизводства, которая в развёрнутом виде отражает взаимосвязи по производству, распределению, потреблению и накоплению общественного продукта в разрезе отраслей народного хозяйства и в единстве материально-вещественного и стоимостного аспектов воспроизводства. Межотраслевые балансы в натуральном выражении охватывают только важнейшие виды продукции. При построении межотраслевого баланса используется понятие «чистой» отрасли, т. е. условной отрасли, объединяющей все производство данного продукта независимо от ведомственной подчинённости и форм собственности предприятий и фирм. Переход от хозяйственных отраслей к чистым требует специального преобразования реальных данных хозяйственных объектов, например агрегирования (объединения) отраслей, исключения внутриотраслевого оборота.

Ключевые слова: математическая модель, экономика, воспроизводство, баланс, потребление, динамика, фактор, производство, отрасль.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.408

ВВЕДЕНИЕ

Моделирование экономических процессов в последнее время является наиболее быстро развивающимся направлением экономической науки и её важнейших приложений. При разработке перспективных межотраслевых балансов производства и потребления одновременно рассчитываются коэффициенты прямых и полных затрат, при этом выполняется большой объём работ по сбору и обработке информации, необходимой для составления математической модели системы воспроизводства для динамических многофакторных балансов. Во всех регионах РФ, в которых периодически составляются отчётные межотраслевые балансы производства и потребления, сформировались научные подразделения, которые на основе разработанных методик составления межотраслевых балансов могут осуществить корректировку коэффициентов прямых затрат на перспективу. Используя откорректированные коэффициенты прямых затрат и одну из модификаций межотраслевой модели, можно с помощью современных вычислительных средств получить региональные перспективные межотраслевые балансы и все элементы межрегиональной сбалансированности (см. схему).



Структурная схема расширенного воспроизводства и потребления

Необходимо отметить, что почти все оптимизационные расчёты, выполняемые в настоящее время с помощью математических методов, используют отчётные нормативные или отчётные коэффициенты прямых затрат региональных межотраслевых балансов в качестве информации для соответствующих систем уравнений, что снижает эффективность экономико-математического моделирования [1, 2]. Это подчёркивает значимость работы по корректировке коэффициентов прямых затрат региональных межотраслевых балансов.

Ниже предлагается математическая модель и алгоритмы разработки для реализации на ЭВМ перспективных межрегионально взаимоувязанных межотраслевых балансов по всем регионам России. Эта работа вполне выполнима, если будут подготовлены перспективные матрицы коэффициентов прямых затрат и вектор конечного продукта для всей страны на перспективу или хотя бы будет подготовлена структура этого вектора на перспективу по стране в целом.

Перспективные региональные динамические межотраслевые балансы будут обладать минимальной материалоёмкостью при потреблении, так как они разработаны на основе оптимального решения, полученного с помощью рассматриваемой ниже модели и оптимизации по выбранному критерию. Если на конец планового периода по стране в целом будет задан вектор конечного продукта, то будет обеспечена возможность применения критерия минимизации совокупного валового продукта страны. Если на конец планового периода будет известна только структура прогнозного вектора конечного продукта, то будет обеспечена возможность применения критерия максимизации непроизводственного потребления по стране в целом как функции производства и производственного потребления. Межотраслевой баланс представляет собой экономико-математическую модель, образуемую перекрёстным наложением строк и колонок таблицы, то есть балансов распределения продукции и затрат на её производство и потребление, увязанных по итогам. Главные показатели здесь — коэффициенты полных и прямых затрат. В прогнозных расчетах валового регионального продукта, как правило, используют системный подход, который заключается в предварительной разработке классификации видов экономической деятельности в соответствии с методикой определения значимых видов экономической деятельности, а затем в прогнозных расчетах валового регионального продукта на основе модели межотраслевого баланса с применением данной классификации [3–5]. Как правило, в вычислительной экономико-математической модели межотраслевого баланса функция предложения рассчитывается непосредственно в ходе ее решения на основе данных о непараметрических границах производственных возможностей поставщиков. В отличие от обычных моделей баланса модель такого типа не сталкивается с трудностями определения параметров функций предложения, повышает объективность и достоверность результатов моделирования. Такие модели позволяет исследовать влияние на рынки изменений в объемах ресурсов, технологиях производства, климатических условиях, причем не требуется вводить предположения о влиянии указанных изменений на функцию предложения, проверка которых трудна и не всегда возможна. Удовлетворительные вычислительные свойства модели достигаются при помощи представления непараметрической границы производственных возможностей в форме системы неравенств, построенной в соответствии с теорией двойственности, в отличие от традиционной формы в виде задачи линейного программирования [6].

Динамическая модель межотраслевого баланса характеризует производственные связи экономического развития на ряд лет, отражает процесс воспроизводства и потребления в динамике (см. схему).

По модели межотраслевого баланса выполняются два типа расчётов: первый тип, когда по заданному уровню конечного потребления рассчитывается сбалансированный объём производства и распределения продукции; второй тип, включающий смешанные расчёты, когда по заданным объёмам производства по одним отраслям (продуктам) и заданному конечному потреблению в других отраслях рассчитывается баланс производства и распределения продукции в полном объёме. Наибольшее распространение получила матричная экономико-математическая модель межотраслевого баланса [7]. Она представляет собой прямоугольную таблицу (матрицу), элементы которой отражают связи экономических объектов. Количественные значения этих объектов вычисляются по установленным в теории матриц правилам. В матричной модели отражается структура затрат на производство и распределение продукции и вновь созданной стоимости.

Уравнения динамической модели расширенного воспроизводства и потребления достаточно сложны, их решение требует большого числа вычислительных операций, и даже в том случае, если исходная информация о структурных матрицах a_{ij}, b_{ij} и матрице временных запаздываний будет собрана, решение этих уравнений вряд ли может быть найдено или окажется слишком грубым приближением к действительности из-за неизбежной при большем числе операций потери точности округлений и ошибок алгоритмов вычисления. Схема расширенного воспроизводства представлена на схеме. На основе представленной модели можно провести необходимые статистические исследования для отраслей промышленности и будет построен динамический многофакторный баланс производства и потребления.

1. УРАВНЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Определим, кроме матрицы коэффициентов a_{ij}, матрицу τ_{ij} временных запаздываний и запишем систему уравнений рассматриваемой модели:

$$x_j(t) = \sum_i x_i(t - \tau_{ij})a_{ij} + b_j(t), \tag{1}$$

где $i, j = 1, 2, \ldots, m$.

В случае, если экономическая система замкнута и внешние связи отсутствуют, величины внешнего спроса $b_j(t) = 0$ при $j = 1, 2, \ldots, m$. Здесь неизвестными являются величины $x_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Практически является достаточным решение уравнений (1) для случая, когда все τ_{ij} соизмеримы и являются целыми кратными величины τ, которая является элементарным временем запаздывания и определяется равенством $\tau_{ij} = n_{ij}\tau$, $i, j = 1, 2, \ldots, m$, где все n_{ij} — целые положительные числа.

Более общий случай использования произвольных τ_{ij} рассматривается для соизмеримых τ_{ij}, где соответствующие результаты сформулированы в виде теорем для квазипериодических функций [8, 9]. Ищем частные решения однородной системы:

$$x_j(t) = \sum_i x_i(t - n_{ij}\tau)a_{ij}, \tag{2}$$

полученной из (1) при $b_j = 0$, в следующем виде:

$$x_i(t) = X_i \exp(\lambda t), \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{3}$$

В результате подстановки (3) в (2) и сокращения общих множителей получаем систему уравнений для величин X_i и λ:

$$X_j = \sum_i X_i \exp(-\lambda\tau n_{ij})a_{ij}.$$

Обозначив

$$Z = \exp(-\lambda\tau), \tag{4}$$

перепишем эту систему в виде

$$X_j = \sum_i X_i Z^{n_{ij}} a_{ij}$$

или

$$\sum_i (a_{ij}Z^{n_{ij}} - \delta_{ij})X_i = 0, \tag{5}$$

где символ Кронекера $\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j. \end{cases}$ Число Z должно быть подобрано так, чтобы определитель системы (5) был равен нулю:

$$\det(a_{ij}Z^{n_{ij}} - \delta_{ij}) = 0. \tag{6}$$

Это уравнение, определяющее в практических исследованиях Z, является алгебраическим уравнением высокой степени относительно Z. Пусть это алгебраическое уравнение разрешено и его корни известны: $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$, где N — порядок уравнения (6). Из уравнения (4), связывающего Z и λ, получается набор значений

$$\lambda_{pk} = -\frac{1}{\tau}\ln Z_p + \frac{2\pi}{\tau}ki, \tag{7}$$

где $p = 1, 2, \ldots, N$; $k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$, $i = \sqrt{-1}$.

Значения λ_{pk} комплексные, и это не должно смущать, так как не все величины, появляющиеся в теории, имеют прозрачный экономический смысл [10–12]. Пусть решения уравнений (5), соответствующие найденным Z_p, будут соответственно $\{X_{1i}\}, \{X_{2i}\}, \ldots, \{X_{pi}\}, \ldots, \{X_{ni}\}$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Частные решения, найденные таким образом, имеют следующий вид:

$$x_{pki} = X_{pi}\exp(\lambda_{pk}t) = X_{pi}Z_p^{-t/\tau}\exp\left(\frac{2\pi k}{\tau}it\right), \tag{8}$$

где $i = 1, 2, \ldots, m$ — индекс соответствующей отрасли; $p = 1, 2, \ldots, N$ — индекс, нумерующий решения, соответствующие разным значениям чисел Z_p; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ — индекс, нумерующий отдельные решения, соответствующие одному и тому же Z_p, но разным значением λ_{pk}.

Так как исходная система уравнений (2) — линейная, решением будет также любая линейная комбинация частных решений (8). Взяв произвольные числа C_{pk}, где индексы p и k пробегают те же значения, что и в формуле (8), образуем общее решение системы уравнений (2), записывая его в виде

$$x_i(t) = \sum_{p,k} C_{pk}x_{pki}(t) = \sum_{p,k} C_{p,k}X_{pi}Z_p^{-t/\tau}\exp\left(\frac{2\pi k}{\tau}it\right) = \sum_{p} X_{pi}Z_p^{-t/\tau}\psi(t), \tag{9}$$

где ψ_p — периодические функции с периодом τ, заданные рядами Фурье, получающиеся при суммировании по индексу k: $\psi_p(t) = \sum\limits_k C_{pk}\exp\left(\dfrac{2\pi k}{\tau}it\right)$, где $p = 1, 2, \ldots, N$.

В дальнейшем будет использована следующая система фундаментальных решений системы однородных уравнений:

$$x_{pi}(t) = X_{pi}Z_p^{-t/\tau}\psi_p(t). \tag{10}$$

Здесь i — индекс отрасли, $i = 1, 2, \ldots, m$, p — индекс, нумерующий решения, $p = 1, 2, \ldots, N$. Максимальное значение индекса p, т. е. N, превышает число отраслей m, $N \geqslant m$.

2. УРАВНЕНИЕ СИСТЕМЫ ВОСПРОИЗВОДСТВА В ФОРМЕ КОШИ С ЗАДАННЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Определим оператор $\widehat{T}$ равенством $\widehat{T}f(t) = f(t+\tau)$ для всех функций рассматриваемого класса. Для этого определим m^2 чисел $\nu_{i\,j}$, где $j = 1, 2, \ldots, m$, равенством $\nu_{i\,j} = n_{i\,j} - 1$ и кроме того образуем величины $\nu_j = \max \nu_{i\,j}$, разыскивая максимум при постоянном j, равном любому из значений $1, 2, \ldots, m$, и переменном $i = 1, 2, \ldots, m$. Величина $(\nu_j + 1)$ равна тому количеству интервалов длительности τ, на которое максимально запаздывает момент потребления продукта j по сравнению с моментом выпуска этого продукта. Приведём уравнение теории незамкнутой динамической системы, которая изучается в этом разделе:

$$x_j(t+1) = \sum_i x_i(t - \nu_{ij}\tau) + b_j(t),$$

где $j = 1, 2, \ldots, m$. Эта система получается из системы (2) заменой t на $t+1$ и добавлением правых частей $b_j(t)$.

В образовании правых частей уравнений системы участвуют величины $x_j(t - \nu_j\tau)$; $x_j(t - (\nu_j - 1)\tau); \ldots; x_j(t-\tau); x_j(t)$. Введём в рассмотрение эти величины производства продукции j в предшествующие периоды времени в качестве самостоятельных величин, обозначая их соответственно $x_j(t - \nu_j\tau); x_{jv_j}(t); x_{j(v_j-1)}(t); \ldots; x_{j1}(t); x_j(t)$ (см. [12, 13]).

В новых обозначениях система уравнений может быть записана в форме Коши:

$$
\begin{gathered}
\widehat{T}\,x_j(t) = \sum_i x_i v_{ij}(t) a_{ij} + b_j(t),\\
\widehat{T}\,x_{j1}(t) = x_j(t),\\
\widehat{T}\,x_{j2}(t) = x_{j1}(t),\\
\vdots\\
\widehat{T}\,x_{jv_j}(t) = x_{jv_j-1}(t),
\end{gathered}
\tag{11}
$$

где $j = 1, 2, \ldots, m$.

Введём относящуюся к одному моменту времени t совокупность величин $x_{iv}(t)$ и образуем столбец этих переменных:

$$
x(t) = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t)\\ \tilde{x}_2(t)\\ \vdots\\ \tilde{x}_j(t)\\ \vdots\\ \tilde{x}_m(t) \end{pmatrix}, \quad \tilde{x}_j(t) = \begin{pmatrix} x_j(t)\\ x_{j1}(t)\\ \vdots\\ x_{jv_j}(t) \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, m},
$$

кроме того образуем столбец правых частей:

$$
B(t) = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1(t)\\ \tilde{b}_2(t)\\ \vdots\\ \tilde{b}_j(t)\\ \ldots\\ \tilde{b}_m(t) \end{pmatrix}, \quad \tilde{b}_j(t) = \begin{pmatrix} b_j(t)\\ 0\\ \vdots\\ 0 \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, m}.
$$

Построим матрицу $A(t)$ системы (11):

$$
A(t) = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & 0 & \ldots & \tilde{a}_{1m}\\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & 0 & \ldots & \tilde{a}_{2m}\\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill}\\ \tilde{a}_{m1} & \tilde{a}_{m2} & 0 & \ldots & \tilde{a}_{mm} \end{pmatrix},
$$

элементами которой являются блоки размерности $m \times m$:

$$
\tilde{a}_{i_k j_l} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{k\nu_{kl}} & 0\\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill}\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k, l = \overline{1, m}.
$$

Вообще говоря, коэффициенты матрицы $\tilde{a}_{ij}$ являются функциями времени t, и поэтому необходимо считать, что $A = A(t)$. Однако для небольших промежутков времени принято считать A постоянным. Ниже будет изложен метод нахождения решений для случая переменных $A(t)$.

Для случая постоянных A возможно дальнейшее упрощение [13–15].

С учётом введённых обозначений систему (12) запишем в матричном виде:

$$\widehat{T}\,x(t) = A(t)x(t) + B(t). \tag{12}$$

Будем искать решение этой системы подстановкой $x(t) = U(t)V(t)$, где $U(t)$ — искомая матрица, $V(t)$ — искомый столбец. Постановка в (12) даёт соотношение

$$U(t+\tau)V(t+\tau) - U(t+\tau)V(t) + U(t+\tau)V(t) = A(t)U(t)V(t) + B(t).$$

Потребуем, чтобы матрица $U(t)$ и вектор $V(t)$ порознь удовлетворяли уравнениям

$$\begin{gathered} U(t+\tau) = A(t)U(t), \\ V(t+\tau) - V(t) = U^{-1}(t)B(t). \end{gathered} \tag{13}$$

В этом случае уравнение будет удовлетворено, и, следовательно, можно порознь искать U и V, а затем построить $x = UV$.

Для отыскания матрицы U выпишем следующую последовательность уравнений:

$$\begin{gathered} U(t+\tau) = A(t)U(t), \\ U(t+2\tau) = A(t+\tau)U(t+\tau), \\ U(t+3\tau) = A(t+2\tau)U(t+2\tau), \\ \vdots \\ U(t+\mu\tau) = A(t+(\mu-1)\tau)U(t+(\mu-1)\tau), \quad m \in \mathbb{N}, \end{gathered}$$

и подставим значение U из предшествующих уравнений в следующие. После очевидных преобразований получаем

$$U(t+\mu\tau) = A(t+(\mu-1)\tau)\ldots A(t+2\tau)A(t+\tau)A(t)U(t) = \prod_{\mu>\varphi\geqslant 0} A(t+\varphi\tau)U(t). \tag{14}$$

Отсюда вытекает

$$U^{-1}(t+\mu\tau) = U^{-1}(t)\prod_{0\leqslant\varphi<\mu} A^{-1}(t+\varphi\tau). \tag{15}$$

Матрицы $A(t)$ и $A(t')$, относящиеся к разным моментам времени, не коммутируют, и порядок расположения членов произведений существен

$$U^{-1}(t+\mu\tau) = U^{-1}(t)A^{-1}(t)A^{-1}(t+\tau)A^{-1}(t+2\tau)\ldots A^{-1}(t+(\mu-1)\tau).$$

Для отыскания вектора $V(t)$ выпишем из (13) последовательность уравнений

$$\begin{gathered} V(t+\tau) - V(t) = U^{-1}(t)B(t), \\ V(t+2\tau) - V(t+\tau) = U^{-1}(t+\tau)B(t+\tau), \\ V(t+3\tau) - V(t+2\tau) = U^{-1}(t+2\tau)B(t+2\tau), \\ \vdots \\ V(t+\mu\tau) - V(t+(\mu-1)\tau) = U^{-1}(t+(\mu-1)\tau)B(t+(\mu-1)\tau) \end{gathered}$$

и сложим их почленно. После очевидных сокращений найдём

$$V(t+\mu\tau) = V(t) + U^{-1}(t)B(t) + U^{-1}(t+\tau)B(t+\tau) + \cdots + U^{-2}(t+(\mu-1)\tau)B(t+(\mu-1)\tau)$$

или

$$V(t+\mu\tau) = V(t) + \sum_{(0\leqslant\lambda<\mu)} U^{-1}(t+\lambda\tau)B(t+\lambda\tau). \tag{16}$$

Определив U и V, далее строим решение вида

$$x(t+\mu\tau) = U(t+\mu\tau)V(t+\mu\tau) = \prod_{\mu>\varphi\geqslant 0} A(t+\varphi\tau)U(t)V(t)$$
$$+ \prod_{\mu>\varphi\geqslant 0} A(t+\varphi\tau)U(t) \sum_{0\leqslant\lambda<\mu} \left[U^{-1}(t) \prod_{0\leqslant\xi<\lambda} A^{-1}(t+\xi\tau)\right] B(t+\lambda\tau).$$

Упростим это уравнение, для этого в первом члене заменим произведение $U(t)V(t)$ на $\mathbf{x}(t)$. Во втором члене выполним перемножение $U(t)$ и $U^{-1}(t)$, приводящее к единичной матрице. Заметим, наконец, что при $\mu > \lambda$ имеет место равенство

$$\prod_{\mu>\varphi\geqslant 0} A(t+\mu\tau) \prod_{0\leqslant\xi<\lambda} A^{-1}(t+\xi\tau) = \prod_{\mu>\varphi\geqslant\lambda} A(t+\varphi\tau).$$

Далее находим окончательное решение

$$x(t+\mu\tau) = \prod_{\mu>\varphi\geqslant 0} A(t+\varphi\tau)x(t) + \sum_{0\leqslant\lambda<\mu} \left[\prod_{\mu>\varphi\geqslant\lambda} A(t+\varphi\tau)\right] B(t+\lambda\tau). \tag{17}$$

При условии, что A не зависит от времени, эта запись упрощается:

$$x(t+\mu\tau) = A^{\mu}x(t) + \sum_{0\leqslant\lambda<\mu} A^{\mu-\lambda-1}B(t+\lambda\tau). \tag{18}$$

Уравнения (17) и (18) дают решение задачи Коши, состоящей в отыскании состояния динамической системы, по известному начальному состоянию. При планировании решают задачи Коши, когда находят планы будущих лет по известным показателям экономической деятельности в прошлом [15, 16].

Подчеркнём, что использование формул (17) и (18) не требует операций обращения матриц A и отыскания их собственных значений и собственных столбцов, а предполагает только умножение матриц. Это существенно упрощает вычислительную работу, но имеет и свои отрицательные качества.

Дело в том, что если матрицы A имеют большое число элементов, то при операциях умножения этих матриц выполняется столь большое число умножений и сложений, что точность вычислений будет заметно ухудшаться от шага к шагу. Борьба с этими трудностями в случае матрицы A, не зависящей от времени, идёт по пути использования общих решений задачи. Однако этот путь приводит к трудностям при обращении матриц с большим числом элементов.

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ И НАХОЖДЕНИЕ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ

Уравнение (13) для матрицы может быть решено в конечном виде при условии постоянства матриц A, удовлетворяющих определённым начальным условиям, с использованием системы фундаментальных решений, вытекающей из (10).

Действительно, согласно (10) и (11) можно построить систему частных решений уравнения $Tx(t) = Ax(t)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} x_{pi}(t) &= X_{pi} Z_p^{-t/\tau} \psi_p(t), \\ x_{pi1}(t) &= Z_p^{-1} X_{pi} Z_p^{-t/\tau} \psi_p(t), \\ x_{pi2}(t) &= Z_p^{-2} X_{pi} Z_p^{-t/\tau} \psi_p(t), \\ &\vdots \\ x_{pi\nu_i}(t) &= \ Z_p^{-\nu_i} X_{pi} Z_p^{-t/\tau} \psi_p(t), \end{aligned} \tag{19}$$

где $p = 1, 2, \ldots, N$ — индекс, нумерующий различные собственные значения матрицы A; $i = 1, 2, \cdots$ — индекс, нумерующий отрасли; $\nu = 1, 2, \ldots, \nu_i$ — индекс, нумерующий компоненты решения при фиксированном i.

Система решений (19) содержит N решений, каждое из которых приводит к следующему собственному столбцу:

$$x_p(t) = Y_p Z_p{}^{-t/\tau} \psi_p(t), \tag{20}$$

где Y_p — следующий постоянный столбец:

$$Y_p = \begin{pmatrix} \widetilde{X}_{p1} \\ \vdots \\ \widetilde{X}_{pi} \\ \vdots \\ \widetilde{X}_{pm} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{X}_{pi} = \begin{pmatrix} X_{pi} \\ Z_p^{-1} X_{pi} \\ Z_p^{-2} X_{pi} \\ \vdots \\ Z_p^{-v_i} X_{pi} \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, m}. \tag{21}$$

Матрица $V(t)$, являющаяся решением уравнения $TV(t) = AV(t)$, может быть записана в следующем виде:

$$\begin{aligned} V(t) = \big(x_1(t) \quad x_2(t) \quad \ldots \quad x_p(t) \quad \ldots \quad x_n(t)\big) \\ = \Big(Y_1 Z_1^{-t/\tau} \psi_1(t) \quad Y_2 Z_2^{-t/\tau} \psi_2 \quad \ldots \quad Y Z_p^{-t/\tau} \psi_p \quad \ldots \quad Y Z_n^{-t/\tau} \psi_n\Big). \end{aligned}$$

В последующем потребуется также обратная матрица $V^{-1}(t)$. Для отыскания обратной матрицы необходимо найти определить матрицы $V(t)$:

$$\begin{aligned} \det V(t) = \det \Big(Y_1 Z_1^{-t/\tau} \quad \ldots \quad Y_p Z_p^{-t/\tau} \psi_p \quad \ldots \quad Y_n Z_n^{-t/\tau} \psi_n\Big) \\ = Z_1^{-t/\tau} \psi_1 \ldots Z_p^{-t/\tau} \psi_p \ldots Z_n^{-t/\tau} \psi_n \det \big(Y_1 \quad \ldots \quad Y_n\big) = Z_1^{-t/\tau} Z_2^{-t/\tau} \ldots Z_n^{-t/\tau} \psi_1 \psi_2 \ldots \psi_n \det Y, \end{aligned} \tag{22}$$

где обозначение Y введено для матрицы

$$Y = \big(Y_1 \quad Y_2 \quad Y \quad Y\big). \tag{23}$$

Введём обозначения $Y_{p,iv}$ для матрицы, которая получается из матрицы Y вычёркиванием столбца p и строки с номерами i и v. В таком случае алгебраическое дополнение $D_{p,iv}(t)$ элемента $V_{p,iv}$, расположенного в матрице V на пересечение столбца p и строки с номерами i и v, имеет вид

$$D_{pjiv}(t) = Z_1^{-t/\tau} Z_2^{-t/\tau} \ldots Z_n^{-t/\tau} \psi_1 \ldots \psi_n \det Y_{p,iv}. \tag{24}$$

Здесь отсутствует $Z_p^{-t/\tau}\psi_p$. Наконец, по правилам обращения матриц получаем следующее правило для образования элементов матрицы $U^{-1}(t)$.

Матричный элемент $U^{-1}_{iv,p}$, расположенный в матрице $U^{-1}(t)$ на пересечении столбца с номерами i и v и строки p, равен

$$U^{-1}_{iv,p}(t) = (-1)^{i+v+p}\frac{D_{p,iv}(t)}{\det U(t)}.$$

Подставляя в это выражение значение $D(t)$ и $\det U$ из (24) и (26) и производя все указанные действия, находим

$$U^{-1}_{iv,p}(t) = (-1)^{i+v+p} Z_p^{t/\tau}\psi_p(t)\left(\frac{D_{p,iv}(t)}{\det Y}\right). \tag{25}$$

Это выражение определяет элементы матрицы $U^{-1}(t)$. Сама матрица $U^{-1}(t)$ может быть выписана в виде столбца, каждый элемент которого представляет собой столбец

$$U^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \left[U^{-1}_{iv,p=1}(t)\right] \\ \left[U^{-1}_{iv,p=2}(t)\right] \\ \vdots \\ \left[U^{-1}_{iv,p}(t)\right] \\ \vdots \\ \left[U^{-1}_{iv,p=N}(t)\right] \end{pmatrix}.$$

Для строк, из которых состоит матрица $U^{-1}(t)$, разумно ввести особые обозначения:

$$Y_p(t) = \widetilde{Y}_p Z_p^{t/\tau}\psi_p^{-1}(t), \tag{26}$$

где строки $\widetilde{Y}_p$ определяются равенствами

$$\widetilde{Y}_p = (-1)^{i+v+p}\frac{\det Y_{p,iv}}{\det Y}. \tag{27}$$

Матрица $U^{-1}(t)$ приобретает вид

$$U^{-1}(t) = \begin{pmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \\ \vdots \\ Y_p(t) \\ \vdots \\ Y_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{Y}_1 Z_1^{t/\tau}\psi_1^{-1}(t) \\ \widetilde{Y}_2 Z_2^{t/\tau}\psi_2^{-1}(t) \\ \vdots \\ \widetilde{Y}_p Z_p^{t/\tau}\psi_p^{-1}(t) \\ \vdots \\ \widetilde{Y}_n Z_n^{t/\tau}\psi_n^{-1}(t) \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Матрицы (23) и (28) по построению взаимно обратны. Следовательно, $UU^{-1} = E$:

$$U(t)U^{-1}(t) = \begin{pmatrix} Y_1 Z_1^{-t/\tau}\psi_1 & \ldots & Y_n Z^{-t/\tau}\psi_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{Y}_1 Z_1^{t/\tau}{\psi_1}^{-1} \\ \vdots \\ \widetilde{Y}_n Z_n^{t/\tau}{\psi_n}^{-1} \end{pmatrix} = Y_1\widetilde{Y}_1 + \cdots + Y_n\widetilde{Y}_n = E.$$

Итак, доказано, что

$$Y_1\widetilde{Y}_1 + \cdots + Y_n\widetilde{Y}_n = E. \tag{29}$$

Это означает, что матрицы

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 & \dots & Y_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \widetilde{Y} = \begin{pmatrix} \widetilde{Y}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{Y}_n \end{pmatrix} \tag{30}$$

ортогональны.

Сформулируем алгоритм отыскания матриц $U(t)$ и $U^{-1}(t)$.

1. Построены две матрицы Y и $\widetilde{Y}$, взаимно ортогональные друг другу, причём Y образуется по формуле (30) из столбцов Y_p, описанных в (21), а $\widetilde{Y}$ получается обращением Y и затем разлагается на строки $\widetilde{Y}_p$ также по формуле (30).

2. Формула (23) определяет матрицу $\mathbf{U}(t)$, формула (28) — матрицу $U^{-1}(t)$. Воспользуемся формулами (16), (23) и (28) для построения решения $x(t)$ задачи Коши. Имеем

$$\begin{aligned} x(t+\mu\tau) = V(t+\mu\tau)U(t+\mu\tau) = V(t+\mu\tau)\left[V(t) + \sum_{0\leqslant\lambda<\mu} U^{-1}(t+\lambda\tau)B(t+\lambda\tau)\right] \\ = U(t+\mu\tau)\left[U^{-1}(t)x(t) + \sum_{0\leqslant\lambda<\mu} U^{-1}(t+\lambda\tau)B(t+\lambda\tau)\right] = \\ = U(t+\mu\tau)U^{-1}(t)x(t) + \sum_{0\leqslant\lambda<\mu} \{U(t+\mu\tau)U^{-1}(t+\lambda\tau)\}B(t+\lambda\tau). \end{aligned} \tag{31}$$

Задача сводится к вычислению парных произведений матриц U и U^{-1}, относящихся к различным значениям времени.

Вычислим произведение

$$\begin{aligned} U(t+\mu\tau)U^{-1}(t+\lambda\tau) = \Big(Y_1 Z_1{}^{-t/\tau-\mu}\psi_1(t) \quad \dots \quad Y_n Z_n^{-t/\tau-\mu}\psi_n(t)\Big) \begin{pmatrix} \widetilde{Y}_1 Z_1^{t/\tau+\lambda}\psi_1^{-1}(t) \\ \vdots \\ \widetilde{Y}_n Z_n^{t/\tau+\lambda}\psi_n^{-1}(t) \end{pmatrix} \\ = \widetilde{Y}_1\widetilde{Y}_1 Z_1^{(\lambda-\mu)} + \dots + \widetilde{Y}_n\widetilde{Y}_n Z_n^{(\lambda-\mu)}. \end{aligned} \tag{32}$$

Найденное произведение матриц U и U^{-1}, относящихся к различным моментам времени, как и следовало ожидать, не зависит от произвольных периодических функций $\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)$.

Из уравнений (31) и (32) вытекает формула задачи Коши

$$\begin{aligned} x(t+\mu\tau) = \big[Y_1\widetilde{Y}_1 Z_1{}^{-\mu} + \dots + Y_n\widetilde{Y}_n Z_n{}^{-\mu}\big]x(t) \\ + \sum_{0\leqslant\lambda<\mu} \big\{Y_1\widetilde{Y}_1 Z_1^{(\lambda-\mu)} + \dots + Y_n\widetilde{Y}_n Z_n^{(\lambda-\mu)}\big\}B(t+\lambda\tau). \end{aligned} \tag{33}$$

Если ввести ритмичные недельные планы ($\tau = 7$ дней) в практику работы отрасли и организовать планирование, при котором план производства на каждый следующий промежуток времени τ получается из цифр плана только предшествующего промежутка времени τ, то в такой ситуации формируется непрерывное планирование.

Непрерывное планирование требует исключительной точности расчётов необходимых запасов производства и весьма точно сбалансированной системы потребления. В рассматриваемой экономической модели это имеет место при таком подходе, где в совокупность величин x, объявленного вектором состояния динамической модели, включены не только величины $x_j(t)$

производимых и потребляемых продуктов, но также и величины заделов производства и запасов этих продуктов, произведённых за один интервал времени τ назад $x_{j1}(t)$, два интервала τ назад $x_{j2}(t)$ и так далее. В этой схеме сдвиги во времени точно равны одному элементарному интервалу τ, что соответствует требованию непрерывности планирования, представляя его как систему предельных планов.

С целью максимального выигрыша времени следует стремиться к наименьшей системе запасов, ограничиваясь только самыми необходимыми заделами и запасами. В рассматриваемой экономической модели необходимые заделы незавершённой продукции и запасы готовой продукции, предназначенные для обеспечения нужд расширенного производства, сводятся к наименьшим необходимым расчётным количествам. Величины v_j измеряют при этом длительности интервалов времени, в течение которых расходуются эти заделы и запасы и в течение которых прошлый уровень производства продукции j влияет на план текущего производства каждого из изделий.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С помощью предлагаемой модели можно получить оптимальное распределение капиталовложений по отраслям и регионам, оптимальные пропорции занятости в промышленности по регионам страны на конец планового периода. Для этого в качестве исходной информации необходимо иметь, кроме откорректированных матриц и коэффициентов прямых затрат, следующее:

1) объём основных фондов по отраслям и подотраслям на начало планового периода;

2) среднегодовые коэффициенты выбытия основных фондов в рассматриваемый период времени;

3) коэффициенты трудоёмкости валовой продукции по номенклатуре;

4) объём капиталовложений и трудовых ресурсов на конец планового периода в целом по стране.

С помощью предложенной модели можно выполнить оптимизацию межрегионального распределения импорта-экспорта страны, производимых и потребляемых продуктов, величины заделов производства и запасов этих продуктов, произведённых за один интервал времени, если продукты аналогичны принятым в отчётных региональных межотраслевых балансах.

Межрегионально взаимоувязанные перспективные балансы, обладающие свойством минимальной материалоёмкости, могут разрабатываться без снижения уровня достоверности, который будет обеспечен точностью исходной информации для модели.

В настоящее время в нашей стране региональные стоимостные межотраслевые балансы разрабатываются по всем федеральным округам и крупным экономическим регионам, поэтому территория страны нами моделируется 82 точками. Свёртывание транспортной сети всей страны к 82 транспортным узлам привело бы к такой погрешности, что целесообразней моделировать ввоз-вывоз без указания, куда отправлен (вывезен) агрегированный продукт, и не моделировать условие, откуда произведён ввоз в рассматриваемый регион. Это допущение оправдывается ещё тем, что перевозки грузов, входящие в агрегат, иногда имеют диаметрально противоположное направление.

Модель определяет межрегиональный ввоз-вывоз изделий производства и обеспечивает сбалансированность его в целом по стране. Для разработки взаимоувязанных перспективных региональных балансов с помощью ЭВМ необходимо будет решать задачи линейного программирования размерности порядка несколько десятков тысяч переменных и нескольких тысяч уравнений. Поэтому необходимо создать систему программ, автоматизирующую проведение вариантного счёта и быстрого пересчёта всех региональных перспективных отраслевых балансов при изменении некоторых величин или проверке устойчивости региональных отраслевых балансов от какого-либо коэффициента, определённого и заданного в качестве информации с большой неопределённостью.

Отчётные региональные межотраслевые балансы составляются несколько лет, а при выполнении расчёта с помощью ЭВМ перспективные региональные балансы могут быть получены за несколько дней для всех регионов сразу. Поэтому корректировку коэффициентов прямых затрат балансов на перспективу по всем федеральным округам необходимо рассматривать как экономическую проблему.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лукин Е. В.* О роли межотраслевого баланса в государственном регулировании экономики // Экономические и социальные перемены: факты, тенденции, прогноз. 2017. Т. 10, № 3. С. 41–58.
2. *Леонтьев В. В.* Межотраслевая экономика. М.: Экономика, 1997.
3. *Охлопков Г. Н.* Системный подход при прогнозировании валового регионального продукта с использованием модели межотраслевого баланса // Региональная экономика: теория и практика. 2020. Т. 18, № 8. С. 1602–1614.
4. *Беленький В. З., Арушанян И. И., Трофимова Н. А., Френкин Б. Р* Полипродуктовая динамическая межотраслевая модель народного хозяйства с оптимизируемым блоком внешней торговли // Экономика и мат. методы. 2001. Т. 37, № 2. С. 107–115.
5. *Ашманов С. А.* Математические модели и методы в экономике. М.: Изд-во МГУ, 1980.
6. *Светлов Н. М.* Непараметрическая граница производственных возможностей в вычислимой модели частичного равновесия // Экономика и мат. методы. 2019. Т. 55, № 4. С. 104–116.
7. *Охлопков Г. Н.* Разработка методики определения значимых видов экономической деятельности региона для прогнозирования валового регионального продукта на основе модели межотраслевого баланса // Финансовая экономика. 2018. № 5. С. 478–480.
8. *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Прогресс. 1975.
9. *Колемаев В. А.* Математическая экономика. М.: изд. ЮНИТИ, 2002.
10. *Малахов Д. И., Пильник Н. П., Радионов С. А.* Корректировка системы балансов в качестве основы моделей общего экономического равновесия // Экономика и мат. методы. 2018. Т. 54, № 1. С. 92–109.
11. *Кундышева Е. С.* Математическое моделирование в экономике. М.: Дашков и К°, 2004.
12. *Сраффа П.* Производство товаров посредством товаров. Прелюдия к критике экономической теории. М.: изд. ЮНИТИ, 1999.
13. *Echaust K., Malgorzata J.* Implied correlation index: an application to economic sectors of commodity futures and stock markets // Engrg. Economics. 2020. V. 31, N 1. P. 4–17.
14. *Шикин Е. В., Чхартишвили А. Г.* Математические методы и модели в управлении. М.: Дело, 2004.
15. *Коваленко А. Г.* Математическая модель межотраслевого баланса в условиях рассредоточенного рынка // Экономика и мат. методы. 2001. Т. 37, № 2. С. 92–107.
16. *Ulrich M., Walther S.* Option-implied information: What's the vol surface got to do with it? //Review of Derivatives Research. 2020. V. 23, N 3. P. 323–355.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 338.4.01

MATHEMATICAL MODEL OF REPRODUCTION SYSTEM FOR DYNAMIC MULTIFACTOR PRODUCTION-CONSUMPTION BALANCES

N. I. Sidnyaev[a], **K. R. Kesoyan**[b]

Bauman Moscow State Technical University,
ul. 2-ya Baumanskaya, Moscow 105005, Russia

E-mails: [a]sidnyaev@bmstu.ru, [b]karen.kesoyan.bmstu@yandex.ru

Received 11.02.2021, revised 20.04.2021, accepted 21.10.2021

Abstract. The article develops theoretical knowledge of quantitative interrelations and patterns of economic development, as well as of mechanisms of economic management. Methodology and methods are proposed for creating, analysing, and applying the mathematical model of reproduction system for dynamic multifactor production-consumption balance. It is demonstrated that the mathematical model substantially broadens economic analysis opportunities and improves the quality of the economic decisions made. Intersectoral balance is presented as an economic-mathematical model which reflects, in an expanded form, the interrelations of production, distribution, consumption, and accumulation of social product, with a breakdown into economic sectors and as an integral whole of the material and cost aspects of reproduction. Intersectoral balances in kind comprise solely the most important products. In compiling an intersectoral balance, 'net' sector notion is used, one of a provisional sector combining the whole production of a given product, dependless of companies' departmental affiliation and forms of ownership. The transition from real economic sectors to 'net' sectors requires a special transformation of real economic data, such as aggregation of sectors and exclusion of intrasectoral turnover.

Keywords: mathematical model, economy, reproduction, balance, consumption, dynamics, factor, production, sector.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.408

REFERENCES

1. Lukin E.V. On the role of the intersectoral balance in state economic regulation. *Economic and social changes: facts, tendencies, forecast*, 2017, Vol. 10, No. 3, pp. 41–58.
2. Leont'ev V.V. Mezhotraslevaya ekonomika [Intersectoral economics]. Moscow: Economics, 1997 (in Russian).
3. Okhlopkov G.N. Sistemnyi podkhod pri prognozirovanii valovogo regional'nogo produkta s ispol'zovaniem modeli mezhotraslevogo balansa [Systemic approach to forecasting gross regional product using the intersectoral balance model]. *Regional economics: theory and practice*, 2020, Vol. 18, No. 8, pp. 1602–1614 (in Russian).
4. Belen'kii V.Z., Arushanyan I.I., Trofimova N.A., Frenkin B.R Poliproduktovaya dinamicheskaya mezhotraslevaya model' narodnogo khozyaistva s optimiziruemym blokom vneshnei torgovli [Multiproduct dynamic intersectoral model of economy with optimisable foreign trade block]. *Economics and mathematical methods*, 2001, Vol. 37, No. 2, pp. 107–115 (in Russian).
5. Ashmanov S.A. Matematicheskie modeli i metody v ekonomike [Mathematical models and methods in economics]. Moscow: MSU Press, 1980 (in Russian).

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2021, Vol. 15, No. 4.

6. Svetlov N.M. Neparametricheskaya granitsa proizvodstvennykh vozmozhnostei v vychislimoi modeli chastichnogo ravnovesiya [Non-parametric boundary of production capabilities in computable model of partial equilibrium]. *Economics and mathematical methods*, 2019, Vol. 55, No. 4, pp. 104-116 (in Russian).
7. Okhlopkov G.N. Razrabotka metodiki opredeleniya znachimykh vidov ekonomicheskoi deyatel'nosti regiona dlya prognozirovaniya valovogo regional'nogo produkta na osnove modeli mezhotraslevogo balansa [Drafting the methods of determining significant economic activities for forecasting gross regional product using intersectoral balance model]. *Finansovaya ekonomika*, 2018, No 5, pp. 478–480 (in Russian).
8. Intriligator M. Matematicheskie metody optimizatsii i ekonomicheskaya teoriya [Mathematical methods of optimisation and economic theory]. Moscow: Progress, 1975 (in Russian).
9. Kolemaev V.A. Matematicheskaya ekonomika [Mathematical economics]. Moscow: Unity Press, 2002 (in Russian).
10. Malakhov D.I., Pil'nik N.P., Radionov S.A. Korrektirovka sistemy balansov v kachestve osnovy modelei obshchego ekonomicheskogo ravnovesiya [Adjustment of the system of balances as a basis for general economic equilibrium models]. *Economics and mathematical methods*, 2018, Vol. 54, No. 1, pp. 92-109 (in Russian).
11. Kundysheva E.S. Matematicheskoe modelirovanie v ekonomike [Mathematical modelling in economics]. Moscow: Dashkov and Co., 2004 (in Russian).
12. Sraffa P. Proizvodstvo tovarov posredstvom tovarov. Prelude to economic theory critic [Manufacturing products by means of products. Prelude to economic theory critic]. Moscow: Unity Press, 1999 (in Russian).
13. Echaust K., Malgorzata J. Implied correlation index: an application to economic sectors of commodity futures and stock markets. *Engineering Economics*, 2020, Vol. 31, No. 1, pp. 4–17.
14. Shikin E.V., Chkhartishvili A.G. Matematicheskie metody i modeli v upravlenii [Mathematical Methods and Models in Management]. Moscow: Delo, 2004 (in Russian).
15. Kovalenko A.G. Matematicheskaya model' mezhotraslevogo balansa v usloviyakh rassredotochennogo rynka [Mathematical model of intersectoral balance on a distributed market]. *Economics and Mathematical Methods*, 2001, Vol. 37, No. 2, pp. 92-107 (in Russian).
16. Ulrich M., Walther S. Option-implied information: What's the vol surface got to do with it? *Review of Derivatives Research*, 2020, Vol. 23, No. 3, pp. 323–355.