СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ. 2021. Т. 24, № 4. С. 139–147

УДК 514.75:517.9:517.2

# ОБОБЩЁННЫЙ МЕТОД $(G'/G)$-РАСШИРЕНИЯ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА — ДЕ ФРИЗА

**© 2021 Г. У. Уразбоев[a], И. И. Балтаева[b], И. Д. Рахимов[c]**

[1] *Ургенчский государственный университет,*
*ул. Х. Алимджана, 14, Ургенч 220100, Узбекистан*

E-mails: [a]gayrat71@mail.ru, [b]iroda-b@mail.ru, [c]ilxom.raximov.87@gmail.com

Поступила в редакцию 06.06.2021 г.; после доработки 12.06.2021 г.;
принята к публикации 21.10.2021 г.

Статья посвящена поиску решений нагруженного уравнения Кортевега — де Фриза. Показано, что поиск решений с помощью метода $(G'/G)$-расширения является одним из наиболее эффективных методов поиска решений интегрируемых нелинейных эволюционных уравнений в силу удобства использования известных программных пакетов по сравнению с другими известными методами такими, как метод Хироты, преобразования Дарбу, метод обратной задачи рассеяния и др.

**Ключевые слова:** нагруженное уравнения Кортевега — де Фриза, нелинейные эволюционные уравнения, метод расширения, прямые методы, бегущая волна.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.410

## ВВЕДЕНИЕ

Теория нелинейных волновых процессов находит своё применение в моделях артериальной механики, в которых артерия рассматривается как тонкостенная предварительно напряжённая упругая трубка с переменным радиусом (стенозом), а кровь как идеальная жидкость [1, 2]. Эти модели сводятся к возмущённому уравнению Кортевега — де Фриза

$$u_t + \mu_1 u u_x + \mu_2 u_{xxx} - h(t) u_x = 0,$$

где $\mu_1$, $\mu_2$ — константы, зависящие от свойств материала трубки, $t$ — отмасштабированная координата вдоль оси сосуда после статической деформации, который характеризует стеноз на поверхности артериальной стенки, а $x$ — переменная, зависящая от времени и координаты вдоль оси сосуда. Здесь $h(t)$ — форма стеноза, $u(x,t)$ характеризует усреднённую осевую скорость жидкости. В данной работе мы рассматриваем случай, когда форма стеноза пропорциональна $u(0,t)$, а именно, рассматривается нагруженное уравнение Кортевега — де Фриза

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} - \gamma(t) u(0,t) u_x = 0, \quad t \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $\gamma(t)$ – произвольная заданная непрерывная функция.

Нагруженными дифференциальными уравнениями в литературе принято называть уравнения, содержащие в коэффициентах или в правой части какие-либо функционалы от решения, в частности значения решения или его производных [3–7]. Наиболее общее определение нагруженного уравнения впервые дано в монографии [4], где даются понятия и подробная классификация различных нагруженных уравнений и их многочисленные приложения к задачам биологии.

Существует различное методы для решения нелинейных уравнений в частных производных таких, как прямой метод Хироты [8], метод обратной задачи рассеяния [9, 10], метод преобразования Дарбу [11–13] и т. д. В работах [14–22] показано, что метод $(G'/G)$-расширения также эффективен при решении нелинейных эволюционных уравнений. В данной работе мы покажем применимость метода $(G'/G)$-расширения для решения нагруженного уравнения Кортевега — де Фриза.

## 1. АЛГОРИТМ МЕТОДА $(G'/G)$-РАСШИРЕНИЯ

Рассмотрим нелинейное уравнение в частных производных в следующем виде:

$$F(u(0,t), u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xx}, u_{xt}, \dots) = 0, \tag{2}$$

где $u = u(x,t)$ — неизвестная функция, $F$ — нелинейная функция от $u(x,t)$ и её различных частных производных. Приведём алгоритм метода $(G'/G)$-расширения [23].

Шаг 1. Мы используем подстановку типа бегущей волны в следующем виде:

$$u(x,t) = u(\xi), \quad \xi = kx + \Omega(t), \tag{3}$$

где $k$ — параметр и $\Omega(t)$ — непрерывная функция, зависящая от $t$. Представления решения в виде (3) позволяет привести уравнение (2) к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$P(u(0,t), u, u', u'', u''', \dots) = 0, \tag{4}$$

где штрих обозначает производную по переменной $\xi$.

Шаг 2. Предположим, что решение уравнения (4) можно представить в виде многочлена от $(G'/G)$:

$$u(\xi) = \sum_{j=0}^{m} a_j \left(\frac{G'}{G}\right)^j, \tag{5}$$

где штрих обозначает производную по переменной $\xi$; $a_j$, $j = 0, 1, 2, \dots, m$, — константы, которые будут определены ниже, $m$ — положительное целое число, определяемое из баланса производных высшего порядке, а функция $G = G(\xi)$ удовлетворяет следующему линейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$G'' + \lambda G' + \mu G = 0, \tag{6}$$

где $\lambda$, $\mu$ — произвольные постоянные, а производная берётся по переменной $\xi$.

Шаг 3. Подставляя разложение (5) в уравнение (4), используя линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка (6) и собирая члены одного и того же порядка при $(G'/G)$, левую часть уравнения (4) преобразуем в другой многочлен от $(G'/G)$. Приравнивая каждый коэффициент этого многочлена к нулю, получаем систему уравнений для определения $k$, $\Omega(t)$, $\lambda$, $\mu$, $a_j$, $j = 1, 2, \dots, m$.

Шаг 4. Подставляя найденные значения $k$, $\Omega(t)$, $\lambda$, $\mu$, $a_j$, $j = 1, 2, \dots, m$, в (5) и используя (6), получим точные решения уравнения (2).

## 2. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА — ДЕ ФРИЗА

Найдём точные решения нагруженного уравнения Кортевега — де Фриза с помощью метода $(G'/G)$-расширения. Для этого мы выполним описанные выше шаги алгоритма для уравнения (1). Используя преобразование типа бегущей волны

$$u(x,t) = u(\xi), \quad \xi = kx + \Omega(t), \tag{7}$$

для уравнения (1) получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\Omega_t'(t)u' - 6kuu' + k^3u''' - k\gamma(t)u(0,t)u' = 0 \tag{8}$$

для $u = u(\xi)$.

Разделение переменных $\xi$ и $t$ в уравнении (8) приводит к уравнениям

$$\Omega_t'(t) - k\gamma(t)u(0,t) = C_1, \quad 6kuu' - k^3u''' = C_1u', \quad C_1 = \mathrm{const}\,.$$

Второе из этих уравнений сводится к уравнению

$$k^3u'^2 = 2ku^3 - C_1u^2 + C_2u + C_3, \quad C_2, C_3 = \mathrm{const},$$

решение которого выражается через эллиптические функции. Для того чтобы выписать явные точные решения (8), мы будем использовать метод $(G'/G)$-расширения. Для этого перепишем уравнение (8) в интегрированном виде:

$$C + \Omega_t'(t)u - 3ku^2 + k^3u'' - k\gamma(t)u(0,t)u = 0, \tag{9}$$

где $C$ — константа, которую определим ниже. Будем искать решение уравнения (9) в виде выражения

$$u(\xi) = \sum_{j=0}^{m} a_j \left(\frac{G'}{G}\right)^j, \tag{10}$$

где $G = G(\xi)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка (6). Используя (10) и (6), для $u^2$ и $u''$ имеем

$$u^2(\xi) = a_m^2 \left(\frac{G'}{G}\right)^{2m} + \ldots\,; \tag{11}$$

$$u''(\xi) = m(m+1)a_m \left(\frac{G'}{G}\right)^{m+2} + \ldots\,. \tag{12}$$

Рассматривая однородный баланс между $u''$ и $u^2$ в уравнении (9), на основании (11) и (12) находим, что $m = 2$. Таким образом, форма многочлена для $u$ имеет вид

$$u(\xi) = a_2 \left(\frac{G'}{G}\right)^2 + a_1 \left(\frac{G'}{G}\right) + a_0. \tag{13}$$

Следовательно,

$$u^2(\xi) = a_2^2 \left(\frac{G'}{G}\right)^4 + 2a_1a_2 \left(\frac{G'}{G}\right)^3 + \left(a_1^2 + 2a_0a_2\right) \left(\frac{G'}{G}\right)^2 + 2a_0a_1 \left(\frac{G'}{G}\right) + a_0^2. \tag{14}$$

Откуда с учётом (13) и (6) получим

$$\begin{aligned} u''(\xi) = 6a_2 \left(\frac{G'}{G}\right)^4 + (2a_1 + 10a_2\lambda) \left(\frac{G'}{G}\right)^3 + (8a_2\mu + 3a_1\lambda + 4a_2\lambda^2) \left(\frac{G'}{G}\right)^2 \\ + (6a_2\lambda\mu + 2a_1\mu + a_1\lambda^2) \left(\frac{G'}{G}\right) + (2a_2\mu^2 + a_1\lambda\mu). \end{aligned} \tag{15}$$

Подставляя (13)–(15) в (9) и группируя коэффициенты с одинаковыми степенями $(G'/G)$, левую часть уравнения (9) преобразуем в другой многочлен по степеням $(G'/G)$, т. е.

$$\begin{aligned}\big(-3ka_2^2+6k^3a_2\big)\left(\frac{G'}{G}\right)^4+\big(-6ka_1a_2+2a_1k^3+10a_2\lambda k^3\big)\left(\frac{G'}{G}\right)^3\\ +\big(\Omega_t'(t)a_2-3ka_1^2-6ka_0a_2+8a_2\mu k^3+3a_1\lambda k^3+4a_2\lambda^2k^3-k\gamma(t)u(0,t)a_2\big)\left(\frac{G'}{G}\right)^2\\ +\big(\Omega_t'(t)a_1-6ka_0a_1+6a_2\lambda\mu k^3+2a_1\mu k^3+a_1\lambda^2k^3-k\gamma(t)u(0,t)a_1\big)\left(\frac{G'}{G}\right)\\ +\big(C+\Omega_t'(t)a_0-3a_0k^2+2a_2\mu^2k^3+a_1\lambda\mu k^3-k\gamma(t)u(0,t)a_0\big)=0.\end{aligned}\tag{16}$$

Приравнивая в (16) коэффициенты при $\left(\dfrac{G'}{G}\right)^k$, $k=0,1,2,3,4$, к нулю, получаем набор уравнений для $a_0$, $a_1$, $a_2$, $\Omega(t)$ и $C$:

$$\begin{gathered}-3ka_2^2+6k^3a_2=0,\\ -6ka_1a_2+2a_1k^3+10a_2\lambda k^3=0,\\ \Omega_t'(t)a_2-3ka_1^2-6ka_0a_2+8a_2\mu k^3+3a_1\lambda k^3+4a_2\lambda^2k^3-k\gamma(t)u(0,t)a_2=0,\\ \Omega_t'(t)a_1-6ka_0a_1+6a_2\lambda\mu k^3+2a_1\mu k^3+a_1\lambda^2k^3-k\gamma(t)u(0,t)a_1=0,\\ C+\Omega_t'(t)a_0-3a_0k^2+2a_2\mu^2k^3+a_1\lambda\mu k^3-k\gamma(t)u(0,t)a_0=0.\end{gathered}$$

Решая систему этих уравнений, получим

$$\begin{gathered}a_0=2\mu k^2,\quad a_1=2k^2\lambda,\quad a_2=2k^2,\quad C=0,\\ \Omega(t)=-k^3(\lambda^2-4\mu)t+k\int\limits_0^t\gamma(\tau)u(0,\tau)\,d\tau+\Omega^0,\end{gathered}\tag{17}$$

где $\lambda$, $\mu$, $k$ и $\Omega^0$ — произвольные константы. Следовательно, с учётом (17) выражение (13) можно переписать в виде

$$u(\xi)=2k^2\left(\frac{G'}{G}\right)^2+2k^2\lambda\left(\frac{G'}{G}\right)+2k^2\mu,\tag{18}$$

где $\xi=kx-k^3(\lambda^2-4\mu)t+k\int\limits_0^t\gamma(\tau)u(0,\tau)\,d\tau+\Omega^0$.

Функция (18) является решением уравнения (9) при условии, что константа интегрирования $C$ в уравнении (9) принимается такой же, как и в (17). Подставляя решения уравнения (6) в (18), мы получим три вида решений типа бегущей волны нагруженного уравнения Кортевега — де Фриза (1) следующим образом.

При $(\lambda^2-4\mu)>0$, используя решение обыкновенного дифференциального уравнения (6), находим представления для решения нагруженного уравнения Кортевега — де Фриза (1) через гиперболические функции:

$$u(\xi)=\frac{k^2(\lambda^2-4\mu)}{2}\left(\frac{c_1\operatorname{sh}\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi+c_2\operatorname{ch}\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi}{c_1\operatorname{ch}\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi+c_2\operatorname{sh}\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi}\right)^2-\frac{\lambda^2k^2}{2}+2k^2\mu,\tag{19}$$

где $\xi = kx - k^3(\lambda^2 - 4\mu)t + k\int\limits_0^t \gamma(\tau)u(0,\tau)\,d\tau + \Omega^0$; $c_1$, $c_2$ и $\Omega^0$ — произвольные постоянные. Очевидно, что функция $u(0,t)$ может быть легко найдена из равенства (19). Пусть $\gamma(t)$ имеет вид $\gamma(t) = -\left(\dfrac{4t}{k^3(\lambda^2-4\mu)} + 2\right)\operatorname{ch}^2\dfrac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}t^2$ , тогда при $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $\Omega^0 = 0$ решение (19) имеет следующий вид:

$$u(x,t) = -\frac{\lambda^2-4\mu}{2}k^2\frac{1}{\operatorname{ch}^2\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}(kx+t^2)}. \tag{20}$$

На рис. 1 изображена функция (20), которая является точным решением следующего нагруженного уравнения Кортевега — де Фриза:

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} + \left(\frac{4t}{k^3(\lambda^2-4\mu)} + 2\right)\operatorname{ch}^2\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}t^2u(0,t)u_x = 0.$$

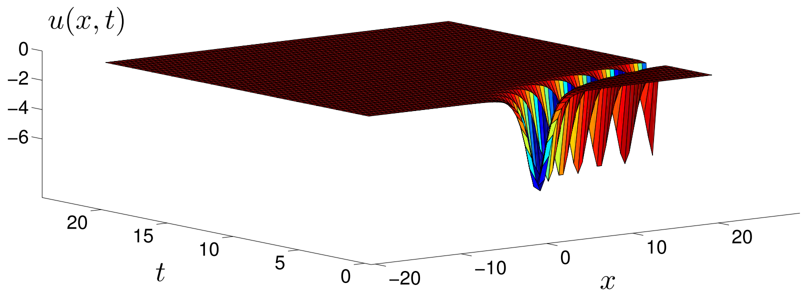


*Рис. 1.* Решение нагруженного уравнения Кортевега — де Фриза (20) при $\lambda = 3$, $\mu = -1$, $k = -1$, $\gamma(t) = (4t/13 - 2)\operatorname{ch}^2\dfrac{\sqrt{13}}{2}t^2$

При $(\lambda^2 - 4\mu) < 0$ получаем решение нагруженного уравнения Кортевега — де Фриза (1) через тригонометрические функции:

$$u(\xi) = \frac{k^2(4\mu-\lambda^2)}{2}\left(\frac{-c_1\sin\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\xi + c_2\cos\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\xi}{c_1\cos\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\xi - c_2\sin\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\xi}\right)^2 - \frac{\lambda^2k^2}{2} + 2k^2\mu. \tag{21}$$

Здесь $\xi = kx - k^3(\lambda^2 - 4\mu)t + k\int\limits_0^t \gamma(\tau)u(0,\tau)\,d\tau + \Omega^0$; $c_1$, $c_2$, и $\Omega^0$ — произвольные постоянные. Как и предыдущем случае, $u(0,t)$ находим из равенства (21). Пусть $\gamma(t)$ имеет вид $\gamma(t) = \left(\dfrac{4t}{k^3(4\mu-\lambda^2)} - 2\right)\cos^2\dfrac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}t^2$, тогда из (21) при $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $\Omega^0 = 0$ получаем

$$u(x,t) = \frac{4\mu-\lambda^2}{2}k^2\frac{1}{\cos^2\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}(kx+t^2)}. \tag{22}$$

На рис. 2 изображена функция (22), которая является точным решением следующего нагруженного уравнения Кортевега — де Фриза:

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} - \left(\frac{4t}{k^3(4\mu-\lambda^2)} - 2\right)\cos^2\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}t^2u(0,t)u_x = 0.$$

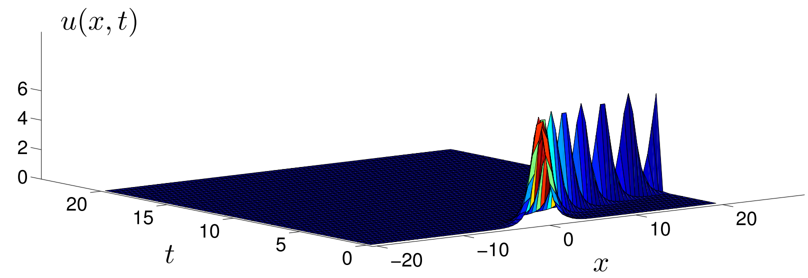


*Рис. 2.* Решение нагруженного уравнения Кортевега — де Фриза (22) при $\lambda = 1$, $\mu = 2$, $k = -1$, $\gamma(t) = -(4t/7 + 2)\cos^2\dfrac{\sqrt{7}}{2}t^2$

При $(\lambda^2 - 4\mu) = 0$ решение нагруженного уравнения Кортевега — де Фриза (1) имеет вид

$$u(x,t) = \frac{2k^2c_2^2}{(c_1 + \xi c_2)^2}, \tag{23}$$

где $\xi = kx + k\int\limits_0^t \gamma(\tau)u(0,\tau)d\tau + \Omega^0$; $c_1$, $c_2$ и $\Omega^0$ — произвольные постоянные. Функцию $u(0,t)$ определяем из равенства (23). Пусть $\gamma(t)$ имеет вид $\gamma(t) = t^5/k^3$ . В этом случае при $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $\Omega^0 = 0$ получаем

$$u(x,t) = \frac{2k^2}{(kx + t^2)^2}. \tag{24}$$

На рис. 3 изображена функция (24), которая является точным решением нагруженного уравнения Кортевега — де Фриза: $u_t - 6uu_x + u_{xxx} - \dfrac{t^5}{k^3}u(0,t)u_x = 0$.

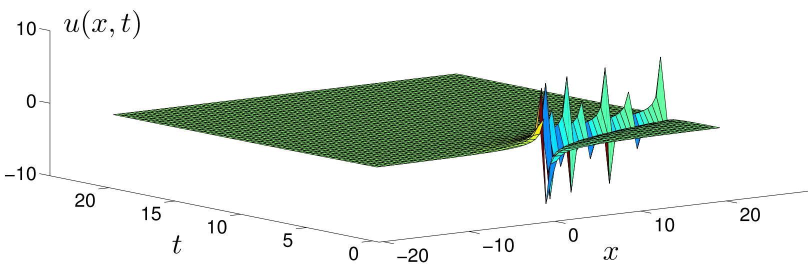


*Рис. 3.* Решение нагруженного уравнения Кортевега — де Фриза (24) при $\lambda = 2$, $\mu = 1$, $k = -1$, $\gamma(t) = t^5/k^3$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты проведённого исследования показывают, что метод $(G'/G)$-расширения является эффективным при получении точных решений нагруженного уравнения Кортевега — де Фриза. Параметры $c_1$, $c_2$, $\lambda$, $\mu$, $k$ и произвольная функция $\gamma(t)$ в решениях (19), (21), (23) предоставляют достаточную свободу для построения решений.

Данный метод нетрудно реализовать с помощью известных программных пакетов, что позволяет решать сложные нелинейные эволюционные уравнения математической физики.

Выражаем огромную благодарность рецензенту за весьма конструктивные замечания и предложения.

ЛИТЕРАТУРА


1. *Kudryashov N. A., Chernyavskii I. L.* Nonlinear waves in fluid flow through a viscoelastic tube // Fluid Dynamics. 2006. V. 41, N 1. P. 49–62.
2. *Demiray H.* Variable coefficient modified KdV equation in fluid-filled elastic tubes with stenosis: Solitary waves // Chaos Soliton Fract. 2009. V. 42, N 1. P. 358–364.
3. *Kadomtsev B. B., Karpman V. I.* Nonlinear waves // Sov. Phys. Usp. 1971. V. 14. P. 40–60.
4. *Nakhushev A. M.* On nonlocal problems with shift and their connection with loaded equations // Differents. Uravn. 1985. V. 21, N 1. P. 92–101.
5. *Cannon J. R., Yin H. M.* On a class of nonlinear nonclassical parabolic problems // J. Different. Equat. 1989. V. 79. P. 266–288.
6. *Chadam J. M., Peirce A., Yin H. M.* The blowup property of solutions to some diffusion equations with localized nonlinear reactions // J. Math. Analys. Appl. 1992. V. 169, N 2. P. 313–328.
7. *Baltaeva U., Torres P. J.* Analog of the Gellerstedt problem for a loaded equation of the third order // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2011. V. 42. P. 3865–3876.
8. *Hirota R.* Exact solution of the Korteweg — de Vries equation for multiple collisions of solitons // Phys. Rev. Lett. 1971. V. 27. P. 1192–1194.
9. *Urazboev G. U., Baltayeva I. I.* On integration of the general loaded Korteweg — de Vries equation with a self-consistent source // Instruments and Systems: Monitoring, Control, and Diagnostics. 2019. V. 10. P. 7–9.
10. *Khasanov A. B., Urazboev G. U.* On the sine-Gordon equation with a self-consistent source // Mat. Trudy. 2008. V. 11, N 1. P. 153–166.
11. *Rogers C., Shadwick W. F.* Backlund Transformations. N. Y.: Acad. Press, 1982.
12. *Wadati M., Shanuki H., Konno K.* Relationships among inverse method, Backlund transformation and an infinite number of conservative laws // Prog. Theor. Phys. 1975. V. 53. P. 419–436.
13. *Matveev V. A., Salle M. A.* Darboux Transformation and Solitons. Berlin: Springer-Verl., 1991.
14. *Li Z.-L.* Constructing of new exact solutions to the GKdV-mKdV equation with any-order nonlinear terms by $(G'/G)$-expansion method // Appl. Math. Comput. 2010. V. 217. P. 1398–1403.
15. *Zayed E. M. E.* The $(G'/G)$-expansion method and its applications to some nonlinear evolution equations in the mathematical physics // J. Appl. Math. Comput. 2009. V. 30, N 1. P. 89–103.
16. *Zayed E. M.* The $(G'/G)$-expansion method combined with the Riccati equation for finding exact solutions of nonlinear PDEs // J. Appl. Math. Inform. 2011. V. 29. P. 351–367.
17. *Zayed E. M., Alurrfi KA.* Extended generalized $(G'/G)$-expansion method for solving the nonlinear quantum Zakharov — Kuznetsov equation // Ricerche Mat. 2016. V. 65. P. 235–254.
18. *Shang N., Zheng B.* Exact solutions for three fractional partial differential equations by the $(G'/G)$-expansion method // Int. J. Appl. Math. 2013. V. 43. P. 3.
19. *Bekir A., Guner O.* Exact solutions of nonlinear fractional differential equations by $(G'/G)$-expansion method // Chin. Phys. B. 2013. V. 22. N 11. P. 110202.
20. *Bekir A.* Application of the $(G'/G)$-expansion method for nonlinear evolution equations // Phys. Lett. A. 2008. V. 372. P. 3400–3406.
21. *Zhang S., Tong J. L., Wang W.* A generalized $(G'/G)$-expansion method for the mKdV equation with variable coefficients // Phys. Lett. A. 2008. V. 372. P. 2254–2257.
22. *Zayed E. M. E., Gepreel K. A.* The (G'/G) expansion method for finding traveling wave solutions of nonlinear partial differential equations in mathematical physics // J. Math. Phys. 2009. V. 50, N 1. P. 12.
23. *Wang M, Li X, Zhang J.* The (G'/G)-expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics// Phys. Lett. A. 2008. V. 372. P. 417–423.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 514.75:517.9:517.2

# A GENERALIZED $(G'/G)$-EXPANSION METHOD FOR THE LOADED KORTEWEG—DE VRIES EQUATION

**© 2021 G. U. Urazboev[a], I. I. Baltayeva[b], I. D. Rakhimov[c]**

[1] *Urgench State University, ul. H. Alimdjana 14, Urgench 220100, Uzbekistan*

E-mails: [a]gayrat71@mail.ru, [b]iroda-b@mail.ru, [c]ilxom.raximov.87@gmail.com

Received 06.06.2021, revised 12.06.2021, accepted 21.10.2021

**Abstract.** The article is devoted to find the solutions of the loaded Korteweg—de Vries equation. It is shown that to find the solutions using the $(G'/G)$-expansion method is one of the most effective methods for finding solutions to integrable nonlinear evolution equations due to the convenience of using known software packages in comparison with other known methods such as the method Hirota, Darboux transforms, the inverse scattering method, etc.

**Keywords:** loaded Korteweg—de Vries equations, nonlinear evolution equations, expansion method, direct methods, traveling wave.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.410

## REFERENCES

1. Kudryashov N.A., Chernyavskii I.L. Nonlinear waves in fluid flow through a viscoelastic tube. *Fluid Dynamics*, 2006, Vol. 41, No. 1, pp. 49–62.
2. Demiray H. Variable coefficient modified KdV equation in fluid-filled elastic tubes with stenosis: Solitary waves. *Chaos Soliton Fract.*, 2009, Vol. 42, No. 1, pp. 358–364.
3. Kadomtsev B.B., Karpman V.I. Nonlinear waves. *Sov. Phys. Usp.*, 1971, Vol. 14, pp. 40–60.
4. Nakhushev A.M. On nonlocal problems with shift and their connection with loaded equations. *Diff. Uravn.*, 1985, Vol. 21, No. 1, pp. 92–101.
5. Cannon J.R., Yin N.M. On a class of nonlinear nonclassical parabolic problems. *J. Diff. Equ.*, 1989. V. 79. P. 266–288.
6. Chadam J.M., Peirce A., Yin H.M. The blowup property of solutions to some diffusion equations with localized nonlinear reactions. *J. Math. Analys. Appl.*, 1992, Vol. 169, No. 2, pp. 313–328.
7. Baltaeva U., Torres PJ. Analog of the Gellerstedt problem for a loaded equation of the third order. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2011, Vol. 42, pp. 3865–3876.
8. Hirota R. Exact solution of the Korteweg—de Vries equation for multiple collisions of solitons. *Phys. Rev. Lett.*, 1971, Vol. 27, pp. 1192–1194.
9. Urazboev G.U., Baltayeva I.I. On integration of the general loaded Korteweg—de Vries equation with a self-consistent source. *Instruments and Systems: Monitoring, Control, and Diagnostics*, 2019, Vol. 10, pp. 7–9.
10. Khasanov A.B., Urazboev G.U. On the sine-Gordon equation with a self-consistent source. *Math. Trudy*, 2008, Vol. 11, No. 1, pp. 153–166.
11. Rogers C., Shadwick W.F. Backlund Transformations. N. Y.: Acad. Press, 1982.
12. Wadati M., Shanuki H., Konno K. Relationships among inverse method, Backlund transformation and an infinite number of conservative laws. *Prog. Theor. Phys.*, 1975, Vol. 53, pp. 419–436.

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2021, Vol. 15, No. 4.

13. Matveev V.A., Salle M.A. Darboux Transformation and Solitons. Berlin: Springer-Verl., 1991.

14. Li Z.-L. Constructing of new exact solutions to the GKdV-mKdV equation with any-order nonlinear terms by $(G'/G)$-expansion method. *Appl. Math. Comput.*, 2010, Vol. 217, pp. 1398–1403.

15. Zayed E.M.E. The $(G'/G)$-expansion method and its applications to some nonlinear evolution equations in the mathematical physics. *J. Appl. Math. Comput.*, 2009, Vol. 30, No. 1, pp. 89–103.

16. Zayed E.M. The $(G'/G)$-expansion method combined with the Riccati equation for finding exact solutions of nonlinear PDEs. *J. Appl. Math. Inform.*, 2011, Vol. 29, pp. 351–367.

17. Zayed E. M., Alurrfi K.A. Extended generalized $(G'/G)$-expansion method for solving the nonlinear quantum Zakharov—Kuznetsov equation. *Ricerche Mat.*, 2016, Vol. 65, pp. 235–254.

18. Shang N., Zheng B. Exact solutions for three fractional partial differential equations by the $(G'/G)$-expansion method *Int. J. Appl. Math.*, 2013, Vol. 43, pp. 3.

19. Bekir A., Guner O. Exact solutions of nonlinear fractional differential equations by $(G'/G)$-expansion method. *Chin. Phys. B*, 2013, Vol. 22, No. 11, pp. 110202.

20. Bekir A. Application of the $(G'/G)$-expansion method for nonlinear evolution equations. *Phys. Lett. A*, 2008, Vol. 372, pp. 3400–3406.

21. Zhang S., Tong J. L., Wang W. A generalized $(G'/G)$-expansion method for the mKdV equation with variable coefficients. *Phys. Lett. A*, 2008, Vol. 372, pp. 2254–2257.

22. Zayed E.M.E., Gepreel K.A. The $(G'/G)$-expansion method for finding traveling wave solutions of nonlinear partial differential equations in mathematical physics. *J. Math. Phys.*, 2009, Vol. 50, No. 1, p. 12.

23. Wang M, Li X, Zhang J. The $(G'/G)$-expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics. *Phys. Lett. A*, 2008, Vol. 372, pp. 417–423.