СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор В. Л. Береснев
Зам. главного редактора А. Л. Карчевский
Отв. секретарь В. А. Дедок

Журнал основан в 1998 году
Выходит 4 раза в год

Том 25, № 1(89)

Январь – март, 2022 г.

ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ

Г. В. Алексеев
Б. Д. Аннин
В. С. Белоносов
В. Н. Белых
Ю. С. Волков
В. П. Ильин
С. И. Кабанихин
А. Н. Карапетянц
М. В. Клибанов
С. С. Кутателадзе
В. А. Левин
Н. И. Макаренко
С. Б. Медведев
Р. Г. Новиков
Д. Е. Пальчунов
П. И. Плотников
В. Г. Романов
Е. М. Рудой
В. М. Садовский
Д. И. Свириденко
А. С. Терсенов
В. С. Тимофеев
В. В. Шайдуров

СОДЕРЖАНИЕ

НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

УДК 517.9

МНОГОМЕРНОЕ УРАВНЕНИЕ ХОПФА И НЕКОТОРЫЕ ЕГО ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

© 2022
Ю. Е. Аниконов[1a], **М. В. Нещадим**[1,3b], **А. П. Чупахин**[2,3c]

[1]*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, просп. Акад. Коптюга, 4, г. Новосибирск 630090, Россия,*
[2]*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, просп. Акад. Лаврентьева, 15, Новосибирск 630090, Россия,*
[3]*Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 1, г. Новосибирск 630090, Россия*

E-mails: [a]anikon@math.nsc.ru, [b]neshch@math.nsc.ru, [c]chupakhin@hydro.nsc.ru

Поступила в редакцию 10.09.2021 г.; после доработки 14.09.2021 г.;
принята к публикации 13.01.2022 г.

Найдены некоторые точные решения многомерного уравнения Хопфа.

Ключевые слова: многомерное уравнение Хопфа, матричное уравнение Риккати.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.101

ВВЕДЕНИЕ

Одномерное уравнение Хопфа имеет вид

$$u_t + uu_x = 0, \tag{1}$$

где $u = u(t, x)$ — функция переменных $t, x \in \mathbb{R}$. Как хорошо известно [1], общее решение (1) даётся формулой

$$tu - x = \varphi(u), \tag{2}$$

где $\varphi(u)$ — произвольная функция аргумента u.

Естественное многомерное обобщение уравнения (1) имеет вид

$$u^k_t + \sum_{s=1}^{n} u^s u^k_{x^s} = 0, \quad k = 1, \dots, n, \tag{3}$$

где $(u^1, \dots, u^n)$ — функции переменных t, $x = (x^1, \dots, x^n)$. Если ввести дифференциальный оператор первого порядка

$$D = \partial_t + u^1\partial_{x^1} + \dots + u^n\partial_{x^n}, \tag{4}$$

то система уравнений (3) примет вид

$$D(\bar{u}) = 0. \tag{5}$$

Система (3), (5) представляет собой систему уравнений импульсов в механике континуума в простейшем случае среды без давления.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программ фундаментальных научных исследований ИМ СО РАН (проект FWNF-2022-0009) и ИГиЛ СО РАН (проект FWGG-2021- 009).

Пусть J — матрица Якоби системы функций $\bar{u} = (u^1, \dots, u^n)^T$:

$$J = \begin{pmatrix} u^1_{x^1} & u^1_{x^2} & \dots & u^1_{x^n} \\ u^2_{x^1} & u^2_{x^2} & \dots & u^2_{x^n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u^n_{x^1} & u^n_{x^2} & \dots & u^n_{x^n} \end{pmatrix}.$$

Дифференцируя уравнения (5) по переменным $\bar{x} = (x^1, \dots, x^n)$, в силу строения (4) оператора D получим матричное уравнение Риккати (МУР)

$$DJ + J^2 = 0. \tag{6}$$

Таким образом, из решений системы (3) можно получить решение матричного уравнения Риккати (6). Если система уравнений (3) неоднородная, а именно, в правой части стоит градиент некоторой функции $h(t, x)$, то в правой части (6) стоит соответственно матрица Гессе [2].

МУР находит широкое применение в вариационном исчислении, теории оптимального управления [3, 4]. В механике сплошной среды оно возникает в газовой динамике [5]. МУР используется при отыскании и анализе частных решений уравнений механики континуума [2, 6, 7]. В последнее время матричные дифференциальные уравнения возникают и используются и в более сложных моделях гидродинамики [8, 9]. Также МУР используются в численных методах. На их использовании базируется метод послойного пересчёта для решения систем дифференциальных уравнений второго порядка с кусочно-постоянными коэффициентами [10–12]. Наличие большого запаса точных решений, заданных явными формулами, позволяет строить модели, анализировать выводы численных и аналитических результатов исследуемых систем уравнений.

В работе [13] приводится полное интегрирование простейшего МУР (6) для произвольного линейного дифференциального оператора D и двумерных и трёхмерных матриц J. Решение строится в терминах жордановой формы (верхнетреугольной) Λ-матрицы J и матрицы подобия T, $J = T\Lambda T^{-1}$. В работе [14] проведено исследование матричного уравнения Риккати, основанное на анализе алгебраической структуры матриц, входящих в это уравнение. Основным инструментом является при этом исследование условий совместности, возникающей переопределённой системы [15–17]. В работе [14], в частности, приведено полное интегрирование МУР механики континуума для размерности 2.

В настоящей работе рассматривается задача построения явных точных решений системы уравнений (3), (5). Отсюда, как уже отмечалось, естественно получаются и точные решения матричного уравнения Риккати (6). В разд. 1 доказывается основная теорема. В разд. 2 строятся три класса точных решений — линейные и квадратичные. В разд. 3 построено матричное обобщённое уравнение Хопфа и его неявные решения. Отметим, что анализ решений многомерного уравнения Хопфа (3) на основе инвариантов соответствующей группы преобразований проводился в работах [2, 6].

Все рассматриваемые функции в работе предполагаются достаточно гладкими.

1. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Для системы уравнений (3), (5) имеет место формула, аналогичная (2). А именно, справедлива следующая

Теорема. *Пусть* $\varphi^k(y^1, \dots, y^n)$, $k = 1, \dots, n$, *— произвольные функции такие, что* $\det\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} - tE\right) \neq 0$, E *— единичная матица порядка* n. *Тогда функции* $u^k = u^k(t, x)$, $k = 1, \dots, n$, $x = (x^1, \dots, x^n)$, *— решение системы неявных уравнений*

$$tu^k - x^k = \varphi^k(u), \quad k = 1, \dots, n, \tag{7}$$

удовлетворяют системе (3).

Доказательство. Пусть $A = \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{y=u}$. Из системы (7) дифференцированием по переменным t, $x^1, \ldots, x^n$ получаем

$$u + t\frac{\partial u}{\partial t} = A\frac{\partial u}{\partial t}, \quad t\frac{\partial u}{\partial x^s} - e_s = A\frac{\partial u}{\partial x^s}, \quad s = 1, \ldots, n,$$

где $u = (u^1, \ldots, u^n)^T$, $e_s = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)^T$, $s = 1, \ldots, n$, — вектор-столбцы. Отсюда

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (A - tE)^{-1}u, \quad \frac{\partial u}{\partial x^s} = -(A - tE)^{-1}e_s, \quad s = 1, \ldots, n. \tag{8}$$

Система (3) может быть записана в матричном виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} u^s \frac{\partial u}{\partial x^s} = 0. \tag{9}$$

Подставляя (8) в (9), получаем

$$(A - tE)^{-1}(u - \sum_{s=1}^{n} u^s e_s) = 0$$

— тождественное равенство. Теорема доказана. □

Замечание 1. Решение $u = u(t, x)$ системы (7) дают общее решение системы (3), если отображение $\varphi(u)$ имеет обратное. А именно, при $t = 0$ система (7) принимает вид

$$-x = \varphi(u) \;\Leftrightarrow\; u = \varphi^{-1}(-x),$$

если отображение $y \mapsto \varphi(y)$ обратимо. Поставим задачу Коши для (3):

$$Du^k = 0, \quad k = 1, \ldots, n, \quad u|_{t=0} = f(x),$$

где $\det\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) \neq 0$ и D определён равенством (4). Тогда $f(x) = \varphi^{-1}(-x)$. Полагая $z = -x$, находим $\varphi^{-1}(z) = f(-z)$. Следовательно, если мы рассмотрим систему (7), где $\varphi^{-1}(z) = f(-z)$, то получим решение $u = u(t, x)$ такое, что $u|_{t=0} = f(x)$.

2. ПРИМЕРЫ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ

В этом разделе мы рассмотрим задачу построения решений системы (4) для конкретных функций $\varphi(y)$. Это соответственно приведёт к построению решений системы (3) и её дифференциального следствия матричного уравнения Риккати (6).

Пример 1. Пусть $n \geqslant 1$ и $tu - x = Au + b$, где $u = (u^1, \ldots, u^n)^T$, $x = (x^1, \ldots, x^n)^T$, A — $n \times n$ постоянная матрица, $b = (b^1, \ldots, b^n)^T \in \mathbb{R}^n$. Тогда $u = (tE - A)^{-1}(x + b)$ — решение системы (3).

Пример 2. Пусть $n \geqslant 2$ и

$$t\begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \varphi^1(u) \\ \vdots \\ \varphi^n(u) \end{pmatrix},$$

где

$$\varphi^k(u) = A_k(u^k)^2 + B_k u^k + C_k, \quad k = 1, \ldots n,$$

$A_k \neq 0$, B_k, C_k — произвольные функции от $u^1, \ldots, u^{k-1}$, $k = 2, \ldots n$ и $A_1 \neq 0$, B_1, $C_1 \in \mathbb{R}$. Имеем

$$u^k = \frac{1}{2A_k}(t - B_k \pm \sqrt{(t-B_k)^2 - 4A_k(C_k + x^k)}\,), \quad k = 1, \ldots n.$$

Это явные формулы для функций u^k, $k = 1, \ldots n$, так как u^1 — функция переменных t, x^1; u^2 — функция переменных t, x^1, u^1 и т. д.; u^n — функция переменных t, x^1, $u^1, \ldots, u^{n-1}$.

В частности, пусть $n = 2$ и

$$\begin{aligned} tu^1 - x^1 &= A_1(u^1)^2 + B_1u^1 + C_1, \\ tu^2 - x^2 &= A_2(u^2)^2 + B_2u^2 + C_2, \end{aligned}$$

где $A_1 \neq 0$, B_1, $C_1 \in \mathbb{R}$ и $A_2(u^1) \neq 0$, $B_2(u^1)$, $C_2(u^1))$ — произвольные функции от u^1. Тогда

$$\begin{aligned} u^1 &= \frac{1}{2A_1}(t - B_1 \pm \sqrt{(t-B_1)^2 - 4A_1(C_1 + x^1)}), \\ u^2 &= \frac{1}{2A_2}(t - B_2 \pm \sqrt{(t-B_2)^2 - 4A_1(C_2 + x^1)}). \end{aligned}$$

Пример 3. Пусть $n = 2$ и

$$\begin{aligned} tu^1 - x^1 &= u^1 + h(u^2), \\ tu^2 - x^2 &= A(u^2)^2 + Bu^2 + C, \end{aligned}$$

где $h(z)$ — произвольная функция, $A \neq 0$, $B, C \in \mathbb{R}$. Имеем

$$\begin{aligned} u^1 &= \frac{x^1}{t-1} + \frac{1}{t-1}h\left(\frac{1}{2A}(t - B \pm \sqrt{(t-A)^2 - 4B(C + x^2)})\right), \\ u^2 &= \frac{1}{2A}(t - B \pm \sqrt{(t-A)^2 - 4B(C + x^2)}). \end{aligned}$$

Пример 4. Пусть $n \geqslant 2$ и

$$t\begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^1(u) \\ \vdots \\ \varphi^n(u) \end{pmatrix},$$

где

$$\varphi^k(u) = \frac{A_k}{u^k} + B_ku^k + C_k, \quad k = 1, \ldots n,$$

$A_k \neq 0$, B_k, C_k — произвольные функции от $u^1, \ldots, u^{k-1}$, $k = 2, \ldots n$, и $A_1 \neq 0$, B_1, $C_1 \in \mathbb{R}$. Имеем

$$u^k = \frac{1}{2(t - B_k)}(x^k + C^k \pm \sqrt{(x^k + C^k)^2 + 4A_k(t - B_k)}), \quad k = 1, \ldots n.$$

Это явные формулы для функций u^k, $k = 1, \ldots n$, так как u^1 — функция переменных t, x^1; u^2 — функция переменных t, x^1, u^1 и т. д.; u^n — функция переменных t, x^1, $u^1, \ldots, u^{n-1}$.

Замечание 2. Комбинации «линейного» примера 1 и «квадратичных» примеров 2, 3, естественно, позволяют строить более сложные решения системы (7). Кроме того, если функции $\varphi(u)$ — аналитические функции переменных $\bar{u} = (u^1, \ldots, u^n)$, то естественно использовать для построения точных решений системы (7) аналитические формулы типа формулы Бюрмана — Лагранжа обращения рядов [18].

Также было бы интересно исследовать вопросы построения точных решений системы (7), где правая часть $\varphi(u)$ является алгебраической функцией, например, каждая компонента представляет собой квадратичную форму переменных $\bar{u} = (u^1, \ldots, u^n)$:

$$tu^i - x^i = \sum_{k,l=1}^{n} a^i_{kl} u^k u^l + \sum_{k=1}^{n} a^i_k u^k + a^i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где a^i_{kl}, a^i_{kl}, a^i_{kl} — некоторые постоянные. Следующие вычисления показывают, что для решения таких систем возможно применение алгебраической теории исключения [19].

Пусть $n = 2$ и, используя индивидуальные обозначения $x^1 = x$, $x^2 = y$, $u^1 = u$, $u^2 = v$, рассмотрим следующую систему:

$$\begin{aligned} tu - x &= au^2 + buv + cv^2 + du + eu + f, \\ tv - x &= Au^2 + Buv + Cv^2 + Du + Eu + F, \end{aligned}$$

где $a, \ldots, F$ — некоторые постоянные. Исключая переменную u, получаем уравнение

$$a \begin{vmatrix} a & bv + d - t & cv^2 + ev + f + x \\ Bv + D & Cv^2 + (E - t)v + F + y & 0 \\ A & Bv + D & Cv^2 + (E - t)v + F + y \end{vmatrix} + A \begin{vmatrix} bv + d - t & cv^2 + ev + f + x & 0 \\ a & bv + d - t & cv^2 + ev + f + x \\ A & Bv + D & Cv^2 + (E - t)v + F + y \end{vmatrix} = 0$$

четвёртой степени относительно v с коэффициентами, зависящими от переменных t, x, y. Отметим, что коэффициент при v^4 равен

$$(cA - Ca)^2 + (acB^2 + ACb^2) - (acBC + bcAB).$$

Решая его, находим v и далее из исходной системы при известной v находим u.

3. ОБОБЩЁННОЕ МНОГОМЕРНОЕ УРАВНЕНИЕ ХОПФА

Формулы разд. 1 естественным образом переносятся на более общие уравнения. А именно, имеет место

Утверждение. *Пусть* $\varphi(u) = (\varphi^1(u), \ldots, \varphi^n(u))^T$, $\psi(u) = (\psi^1(u), \ldots, \psi^n(u))^T$ *— некоторые вектор-функции переменных* $(u^1, \ldots, u^n)$, $f(x) = (f^1(x), \ldots, f^n(x))^T$ *— вектор-функция переменных* $x = (x^1, \ldots, x^n)$, *причём*

$$\det\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} - t\frac{\partial \psi}{\partial u}\right) \neq 0, \quad \det\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \neq 0.$$

Тогда неявное решение $u = u(t, x)$ *уравнения* $t\psi(u) + f(x) = \varphi(u)$ *удовлетворяет системе обобщённых уравнений Хопфа*:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{-1} \psi(u) = 0. \tag{10}$$

Доказательство. Дифференцированием по переменным t, x из соотношения

$$t\psi(u) + f(x) = \varphi(u)$$

находим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} - t\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^{-1}\psi(u), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} - t\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{-1}\psi(u) = 0.$$

Утверждение доказано. □

В частности, если $f(x) = x = (x^1, \dots, x^n)^T$, то неявное решение $u = u(t, x)$ уравнения $t\psi(u) - x = \varphi(u)$ удовлетворяет системе уравнений $\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x}\psi(u) = 0$.

Замечание 3. Используя алгебраическую технику исключения переменных [19] (в частности, комбинацией примеров 2, 3), можно построить явные формулы для обобщённого многомерного уравнения Хопфа (10).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Многомерное уравнение Хопфа (3) можно рассматривать как частный случай системы гидродинамического типа от n пространственных переменных [20]:

$$u^i_t + \sum_{j=1}^{n} a^j(u,t)u^i_{x^j} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \tag{11}$$

Известно [20], что оператор локальных симметрий системы (11) имеет вид

$$X = \alpha(u,t)L + \sum_{j=1}^{n} \beta_j(u)\partial_{x^j},$$

где $\alpha(u,t)$, $\beta_j(u)$, $j = 1, \dots, n$, — произвольные функции своих переменных и оператор L имеет вид $L = \partial_t + \sum\limits_{j=1}^{n} a^j(u,t)\partial_{x^j}$. Применительно к системе (3) получаем $L = D$, и оператор локальных симметрий имеет вид

$$X = \alpha(u,t)\partial_t + \sum_{j=1}^{n}(\alpha(u,t)u^j + \beta_j(u))\partial_{x^j},$$

где $\alpha(u,t)$, $\beta_j(u)$, $j = 1, \dots, n$, — произвольные функции своих переменных. Используя групповые преобразования [1, 21], можно расширить классы точных решений, приведённых в данной работе. Например, если взять $X = \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j(u)\partial_{x^j}$, где $\beta_j(u)$, $j = 1, \dots, n$, — произвольные функции переменных u, то соответствующее групповое преобразование имеет вид

$$(t, x, u) \mapsto (t, x + \beta(u)\varepsilon, u),$$

где ε — групповой параметр. Следовательно, если $u = U(x,t)$ — решение (3), то неявное решение системы $u = U(x + \beta(u)\varepsilon, t)$ также является решением системы (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. *Чупахин А.П.* Барохронные движения газа: общие свойства и подмодели типов (1,2) и (1,1). Новосибирск, 1998. (Препринт / Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН; № 4-98).
3. *Зеликин М.И.* Однородные пространства и уравнение Риккати в вариационном исчислении. М.: Факториал, 1998.
4. *Черноусько Ф.А., Колмановский В.Б.* Оптимальное управление при случайных возмущениях. М.: Наука, 1978.
5. *Овсянников Л.В.* Лекции по основам газовой динамики. М.; Ижевск: изд. Ин-та компьютерных исследований, 2003.
6. *Чупахин А.П.* Небарохронные подмодели типов (1,2) и (1,1) уравнений газовой динамики. Новосибирск, 1999. (Препринт / Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН; № 1-99).
7. *Черевко А.А., Чупахин А.П.* Стационарный вихрь Овсянникова. Новосибирск, 2005. (Препринт / Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН; № 1-2005).
8. *Miller E.* A regularity criterion for the Navier-Stokes equation involving only the middle eigenvalue of the strain tensor // Arch. Rational Mech. Anal. 2020. V. 235. P. 99–139.
9. *Anco S.C., Webb G.M.* Hierarchies of new invariants and conserved integrals in inviscid fluid flow // Phys. Fluids. 2020. V. 32. P. 086104; https://doi.org/10.1063/5.0011649
10. *Карчевский А.Л.* Прямая динамическая задача сейсмики для горизонтально-слоистых сред // Сиб. электрон. мат. изв. 2005. Т. 2. С. 23–61.
11. *Карчевский А.Л.* Аналитическое решение уравнений Максвелла в частотной области для горизонтально-слоистых анизотропных сред // Геология и геофизика, 2007. Т. 48, № 8. С. 889–898.
12. *Карчевский А.Л.* Аналитическое решение дифференциального уравнения поперечных колебаний кусочно-однородной балки в частотной области для краевых условий любого вида // Сиб. журн. индустр. математики. 2020. Т. 23, № 4. С. 46–68.
13. *Нещадим М.В., Чупахин А.П.* Об интегрировании одного матричного уравнения Риккати // Сиб. журн. индустр. математики. 2020. Т. 23, № 4. С. 101–113.
14. *Нещадим М.В., Чупахин А.П.* Метод коммутаторов для интегрированияо матричного уравнения Риккати // Сиб. журн. индустр. математики. 2021. Т. 24, № 1. С. 78–88.
15. *Поммаре Ж.* Системы уравнений с частными производными и псевдогруппы Ли. М.: Мир, 1983.
16. *Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н.* Метод дифференциальных связей и его приложение в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1984.
17. *Фиников С.П.* Метод внешних форм Картана. М.: Гостехиздат, 1948.
18. *Евграфов М.А.* Аналитические функции. СПб.: Изд-во Лань, 2008.
19. *Lang S.* Algebra. Springer, 2002. (Graduate Texts in Mathematics).
20. *Grundland A.M.* Invariant solutions of hydrodynamic-type equations // J. Phys. Math. Gen. 2000. V. 33. P. 8193–8215.
21. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 517.9

MULTIDIMENSIONAL HOPF EQUATION AND SOME EXACT SOLUTIONS

© 2022 **Yu. E. Anikonov**[1a], **M. V. Neshchadim**[1,3b], **A. P. Chupakhin**[2,3c]

[1] *Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,*
pr. Acad. Koptyuga 4, Novosibirsk 630090, Russia,
[2] *Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS,*
pr. Akad. Lavrentyeva 15, Novosibirsk 630090, Russia,
[3] *Novosibirsk State University, ul. Pirogova 1, Novosibirsk 630090, Russia*

E-mails: [a]anikon@math.nsc.ru, [b]neshch@math.nsc.ru, [c]chupakhin@hydro.nsc.ru

Received 10.09.2021, revised 14.09.2021, accepted 13.01.2022

Abstract. Some exact solutions of the multidimensional Hopf equation are found.

Keywords: multidimensional Hopf equation, matrix Riccati equation.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.101

REFERENCES

1. Ovsyannikov L.V. Group Analysis of Differential Equations, N. Y.: Acad. Press, 1982.
2. Chupakhin A.P. Barokhronnye dvizheniya gaza: obshchie svoistva i podmodeli tipov $(1,2)$ i $(1,1)$ [Barochronous gas motions: general properties and submodels of types $(1,2)$ and $(1,1)$]. Novosibirsk, 1998. (Preprint/ Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SO RAN; No. 4-98).
3. Zelikin M.I. Odnorodnye prostranstva i uravnenie Rikkati v variatsionnom ischislenii [Homogeneous spaces and the Riccati equation in the calculus of variations]. Moscow: Faktorial, 1998 (in Russian).
4. Chernous'ko F.A., Kolmanovskii V.B. Optimal'noe upravlenie pri sluchainykh vozmushcheniyakh [Optimal control under random perturbations]. Moscow: Nauka, 1978 (in Russian).
5. Ovsyannikov L.V. Lektsii po osnovam gazovoi dinamiki [Lectures on the Fundamentals of Gas Dynamics]. Moscow; Izhevsk: Institute of Computer Science, 2003 (in Russian).
6. Chupakhin A.P. Nebarokhronnye podmodeli tipov $(1,2)$ i $(1,1)$ uravnenii gazovoi dinamiki [Nonbarochronous Submodels of Types $(1,2)$ and $(1,1)$ of the Gas Dynamics Equations]. Novosibirsk, 1999. (Preprint/ Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SO RAN; No. 1-99).
7. Cherevko A.A., Chupakhin A.P. Statsionarnyi vikhr' Ovsyannikova [The Stationary Ovsyannikov Vortex]. Novosibirsk, 2005. (Preprint/ Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SO RAN; No. 1-2005).
8. Miller E. A regularity criterion for the Navier—Stokes equation involving only the middle eigenvalue of the strain tensor. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 2020, Vol. 235, pp. 99–139.
9. Anco S.C., Webb G.M. Hierarchies of new invariants and conserved integrals in inviscid fluid flow. *Phys. Fluids*, 2020, Vol. 32, Art. No. 086104; https://doi.org/10.1063/5.0011649
10. Karchevsky A.L. The direct dynamical problem of seismics for horizontally stratified media. *Siberian Electronic Math. Reports*, 2005, Vol. 2, pp. 23–61.
11. Karchevsky A.L. A frequency-domain analytical solution of Maxwell's equations for layered anisotropic media. *Russian Geology and Geophysics*, 2007, Vol. 48, No. 8, pp. 689–695.

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2022, Vol. 16, No. 1.

12. Karchevsky A.L Analytical solutions of the differential equation of transverse vibrations of a piecewise homogeneous beam in the frequency domain for the boundary conditions of various types, 2020, *J. Appl. Indust. Math.*, 2020, Vol. 14, No. 4, pp. 648–665.

13. Neshchadim M.V., Chupakhin A.P. On integration of a matrix Riccati equation, 2020, *J. Appl. Indust. Math.*, 2020, Vol. 14, No. 4, pp. 732–742.

14. Neshchadim M.V., Chupakhin A.P. Method of commutators for integration of a matrix Riccati equation, 2021, *J. Appl. Indust. Math.*, Vol. 15, No. 1, pp. 78–86.

15. Pommaret J. Systems of Partial Differential Equations and Lie Pseudogroups. London: Mid-Country Press, 1978.

16. Sidorov A.F., Shapeev V.P., Yanenko N.N. Metod differentsial'nykh svyazei i ego prilozhenie v gazovoi dinamike [Method of differential constraints and applications in gas dynamics]. Novosibirsk: Nauka, 1984 (in Russian).

17. Finikov S.P. Metod vneshnikh form Kartana [Cartan's Method of Exterior Forms]. Moscow: Gostekhizdat, 1948 (in Russian).

18. Evgrafov M.A. Analiticheskie funktsii [Analitical functions]. St. Petersburg: Lan, 2008 (in Russian).

19. Lang S. Algebra. Springer, 2002. (Graduate Texts in Mathematics,).

20. Grundland A.M. Invariant solutions of hydrodynamic-type equations. *J. Phys. Math. Gen.*, 2000, Vol. 33, pp. 8193–8215.

21. Olver P.J. Applications of Lie Groups to Differential Equations. N. Y.: Springer, 1986.