# СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ




**Журнал основан в 1998 году**
**Выходит 4 раза в год**

**Том 25, № 1(89)**

**Январь – март, 2022 г.**




## СОДЕРЖАНИЕ




НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ. 2022. Т. 25, № 1. С. 39–53

УДК 51–72:517.9:538.91

# НЕИЗОТЕРМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ РАЗВИТИЯ КАНАЛА ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПРОБОЯ ТИПА ДИФФУЗНОЙ ГРАНИЦЫ

**© 2022 Е. В. Зипунова[a], А. А. Кулешов[b], Е. Б. Савенков[c]**

*Федеральный исследовательский центр*
*Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН,*
*Миусская площадь, 4, г. Москва 125047, Россия*

E-mails: [a]zipunova@keldysh.ru, [b]andrew_kuleshov@mail.ru, [c]savenkov@keldysh.ru

Поступила в редакцию 11.08.2021 г.; после доработки 01.10.2021 г.;
принята к публикации 21.10.2021 г.

Предложена градиентная (слабонелокальная) модель типа диффузной границы для описания динамики развития канала электрического пробоя в электрическом поле. В отличие от ранее опубликованного варианта модели она является неизотермической и включает в себя систему уравнений Максвелла в квази(электро)стационарном приближении, уравнение Аллена — Кана для описания эволюции параметра порядка и уравнение закона сохранения энергии. Вывод модели выполнен в рамках методов рациональной механики сплошной среды и основан на теории микросил и микронапряжений Гуртина и процедуре Колмана — Нолла. Построенная модель является термодинамически согласованной в смысле выполнения энтропийного неравенства. Приводится конечный вид уравнений модели.

**Ключевые слова:** модели типа диффузной границы, фазовое поле, параметр порядка, электрический пробой.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.103

## ВВЕДЕНИЕ

Электрический пробой твёрдых диэлектриков является комплексным процессом [1], анализ которого важен с точки зрения многочисленных приложений. С точки зрения математического моделирования значительную сложность построения эффективной математической модели и необходимых для её анализа вычислительных алгоритмов представляет то, что канал пробоя является эффективно одномерным объектом, эволюционирующим в трёхмерной области, занятой средой. Среди многообразия математических моделей, предложенных для описания динамики развития канала пробоя, особое место занимает предложенная в работе [2] модель типа диффузной границы.

В настоящее время модели типа диффузной границы составляют мощный и обоснованный класс подходов для решения прикладных задач гидродинамики [3, 4], теории трещин в деформируемой среде [5], солидификации и теории фазовых переходов [6–8], описания кристаллических структур [9, 10] и многих других.

Назначением моделей с диффузной границей, в широком смысле этого термина, является описание динамики каких-либо включений в однородной среде. В роли включений обычно выступают зоны однородности, соответствующие дисперсной фазе многофазной системы, в роли однородной среды — дисперсионная фаза. Распределение фаз в пространстве описывается так

Работа выполнена при финансовой поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики (Соглашение с Минобрнауки России № 075-15-2019-1623).

называемым фазовым полем или параметром порядка — определённой в пространстве гладкой функцией, значение которой практически постоянно в зонах однородности и быстро, но непрерывно, меняется в пределах разделяющего их слоя (диффузной границы) Например, в задачах гидродинамики диффузная граница отделяет две несмешивающиеся жидкости. Диффузная граница имеет конечную толщину, которая определяется параметрами модели. Соответственно, модель имеет внутренние механизмы, обеспечивающие заданную толщину диффузной границы в ходе эволюции системы.

С прикладной точки зрения модели типа диффузной границы позволяют описать однородным по пространству и термодинамически согласованным способом динамику многофазных систем самой различной природы с прямым разрешением динамик межфазных границ.

Предложенная в работе [2] модель построена как формальное, «механистическое» обобщение известных моделей типа диффузной границы для анализа распространения трещин в упругой среде [5]. Авторы работы не приводят термодинамически обоснованный вывод предложенной ими модели, а используют формальную аналогию между процессом распространения трещины и процессом распространения канала пробоя [11].

В рамках предложенной в [2] модели параметр порядка $\phi = \phi(\mathbf{x}, t)$ описывает эволюцию канала пробоя, который рассматривается как часть пространства, заполненного «повреждённой» средой. Другими словами, каналом пробоя считается множество точек среды, в которых $\phi = 0$. Неповреждённой среде соответствует $\phi = 1$. Процесс образования (роста) канала пробоя описывается как эволюция функции $\phi$ во времени. Повреждённое и неповреждённое состояния среды рассматриваются как две фазы, для перехода между которыми необходимо затратить определённую энергию, величина которой является параметром модели. Характерная древовидная форма канала пробоя обусловлена видом свободной энергии системы [11].

Описанная в работе [2] модель канала пробоя не является консервативной. Более того, температура среды и её внутренняя энергия не входят в число параметров состояния модели. Вместе с тем процесс развития канала пробоя существенно связан с преобразованием энергии электромагнитного поля в тепловую энергию вещества канала пробоя. Поэтому неконсервативность предложенной в [2] модели является её существенным недостатком и принципиально мешает её практическому применению.

Целью настоящей работы является термодинамически обоснованный вывод неизотермической модели диффузной границы для описания динамики развития канала электрического пробоя. Построенная модель устраняет основные качественные недостатки предложенной в [2] модели: она учитывает неизотермические эффекты, в частности нагрев среды за счёт джоулева тепла, и включает в себя уравнение закона сохранения энергии с учётом как тепловых эффектов, так и динамики фазового поля. Помимо этого, построенная модель является термодинамически корректной в смысле выполнения второго начала термодинамики в виде неравенства Клазиуса — Дюгема.

В большинстве случаев модели типа диффузной границы относятся к классу градиентных (или, что то же, слабонелокальных) моделей термодинамики. Это означает, что термодинамические потенциалы, описывающие состояние среды, зависят не только от значений термодинамических параметров состояния, но и от их градиентов. Для построения теорий такого типа могут быть использованы различные подходы. На взгляд авторов, наиболее обоснованным и универсальным из них является теория микросил и микронапряжений, разработанная в работах Гуртина и его последователей (см. [12–16]) и широко используемая при построении моделей диффузной границы в различных областях физики и механики.

Структура работы имеет следующий вид. В разд. 1 кратко описана использованная при построении модели система уравнений Максвелла в квази(электро)стационарном приближении и её следствия. В разд. 2 приводятся основные положения теории микросил и микронапряжений М. Гуртина, формулируется необходимые балансовые уравнения и диссипативное неравенство. В разд. 3 формулируется закон сохранения энергии и энтропийное неравенство, используемые в дальнейшем при применении процедуры Колмана — Нолла. Последняя рассмотрена в разд. 4. В результате её применения все определяющие соотношения могут быть сформулированы в терминах свободной энергии системы. Её конечный вид уточняется в разд. 5. В разд. 6 приводится формулировка построенной модели в замкнутом виде. В заключении формулируются основные результаты работы.

## 1. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Описанная в последующих разделах модель использует квази(электро)стационарное приближение для описания эволюции электромагнитного поля. В этом случае система уравнений Максвелла имеет вид [17, главы 4, 5; 18]:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\mathrm{E}}, \tag{1а}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{1б}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \tag{1в}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \tag{1г}$$

Здесь $\mathbf{H}$ — вектор напряжённости магнитного поля, $\mathbf{B}$ — вектор электромагнитной индукции, $\mathbf{E}$ — вектор напряжённости электрического поля, $\mathbf{D}$ — вектор электрической индукции, $\rho_{\mathrm{E}}$ — плотность зарядов, $\mathbf{j}$ — вектор плотности электрического тока.

Следствием системы уравнений (1) является закон сохранения заряда в форме

$$\frac{\partial \rho_E}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \tag{2}$$

Определяющие соотношения для векторов индукции электромагнитного поля и электрического тока в простейшем случае имеют вид: $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$, где $\varepsilon$ — диэлектрическая проницаемость среды, $\mu$ — магнитная проницаемость, $\sigma$ — электропроводность. В силу того, что рассмотренная модель далее будет включена, в нужном виде, в модель типа диффузной границы, будем считать, что в области определения системы уравнений (1) нет «чистых» проводников и диэлектриков. Другими словами, все параметры, которые описывают электрофизические свойства среды, ограничены положительным значением снизу и конечным значением сверху.

Система (1) допускает закон баланса энергии в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} e_{\mathrm{EM}} + \nabla \cdot \mathcal{F}_{\mathrm{EM}} = -Q_{\mathrm{J}}, \tag{3}$$

где $Q_{\mathrm{J}} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ — джоулево тепло, $e_{\mathrm{EM}} = \dfrac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$ — плотность энергии электромагнитного поля в рассматриваемом приближении, $\mathcal{F}_{\mathrm{EM}} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ — вектор плотности потока энергии электромагнитного поля (вектор Умова — Пойнтинга).

Уравнение (1) позволяет ввести потенциал $\Phi$ электрического поля так, что $\mathbf{E} = -\nabla \Phi$. В этом случае следствием (1) является следующая система уравнений относительно $\Phi$ и $\rho_{\mathrm{E}}$:

$$\nabla \cdot (\varepsilon \nabla \Phi) = \rho_{\mathrm{E}}, \quad \frac{\partial \rho_{\mathrm{E}}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j} = -\sigma \nabla \Phi.$$

## 2. ОСНОВНЫЕ ИДЕИ КОНЦЕПЦИИ МИКРОСИЛ И МИКРОНАПРЯЖЕНИЙ ГУРТИНА

В соответствии с идеями концепции микросил и микронапряжений (см. [12–16]), для изменения параметра порядка $\phi$ как кинематической переменной в среде должны действовать соответствующие системы микросил и микронапряжений. В простейшем случае, достаточном для целей настоящей работы, эта система сил включает в себя (векторное) поле внутренних микронапряжений $\boldsymbol{\xi}$; (скалярное) поле внутренних микросил $\pi$; (скалярное) поле внешних микросил $\gamma$. Для указанной системы микросил и микронапряжений постулируется выполнение следующих соотношений:

— уравнения баланса микросил и микронапряжений

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\xi} + \pi + \gamma = 0; \tag{4}$$

— выражения $W = \nabla\cdot(\dot{\phi}\boldsymbol{\xi}) + \gamma\dot{\phi}$ для работы микросил и микронапряжений, которая совершается над элементарным объёмом среды (здесь и далее $\dot{f} = \dfrac{df}{dt}$ — полная (субстанциональная, лагранжева) производная по времени). Отметим, что $W$ не включает в себя внутренние микросилы [14, 15];

— диссипативного неравенства, которое в том случае, когда в среде не происходят никакие процессы, кроме как связанные с наличием микросил и микронапряжений, имеет вид $\dot{\psi} \leqslant \nabla\cdot(\dot{\phi}\boldsymbol{\xi}) + \dot{\phi}\gamma$, где $\psi$ — свободная энергия системы. Для более сложных процессов, в частности рассматриваемых в настоящей работе, в правой части последнего неравенства должны присутствовать слагаемые, отвечающие за работу других сил, присутствующих в системе.

Приведённые выше уравнения определяют основные балансовые законы для микросил и микронапряжений, но не определяют вид зависимостей этих величин от термодинамических параметров состояния среды, в частности от параметра порядка $\phi$. Для построения этих зависимостей используется широко распространённая в рациональной термомеханике сплошной среды процедура Колмана — Нолла [19]. Она основана на том, что одновременно с основными уравнениями, описывающими эволюцию системы, постулируется: (а) вид энтропийного неравенства, выражающего второй закон термодинамики и (б) множество параметров состояния системы. Далее энтропийное неравенство рассматривается не как ограничение на термодинамический процесс, а как ограничение на определяющие соотношения модели.

## 3. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Перейдём к выводу уравнений модели. Предварительно сделаем ряд допущений. Будем считать, что среда неподвижна. В этом случае законы сохранения массы и импульса удовлетворяются тождественно и могут не рассматриваться.

Рассмотрим теперь закон сохранения энергии. В присутствии электромагнитного поля (сравнить с уравнением (3.5) в [12]) и с учётом выражений для работы микросил и микронапряжений (см. разд. 2) постулируем его в виде

$$\dot{e} = -\nabla\cdot\boldsymbol{q} - \nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}) + \nabla\cdot(\dot{\phi}\boldsymbol{\xi}) + \dot{\phi}\gamma + r, \tag{5}$$

где $\boldsymbol{q}$ — вектор плотности теплового потока (вид которого будет определён ниже); $r$ — мощность внешних источников энергии, остальные переменные уже были определены.

Для дальнейшего нам понадобится закон неубывания энтропии в виде энтропийного неравенства в форме Клазиуса — Дюгема, которое постулируется в виде

$$\dot{\eta} \geqslant -\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{q}}{\theta}\right) + \frac{r}{\theta}, \tag{6}$$

где $\theta$ — абсолютная (термодинамическая) температура, $\eta$ — энтропия.

Таким образом, полная система уравнений, описывающих модель, состоит из следующих групп уравнений:

(а) системы уравнений Максвелла (1) совместно с её следствиями: уравнениями (3) и (2);

(б) закона сохранения энергии (5);

(в) уравнения баланса микросил и микронапряжений (4);

(г) второго закона термодинамики в форме неравенства Клазиуса — Дюгема (6).

Первым шагом в выводе определяющих соотношений модели в рамках процедуры Колмана — Нолла является переход к диссипативному неравенству для свободной энергии Гельмгольца. Для этого нужно сначала определить её.

Будем считать, что внутренняя энергия $e$ системы определяется зависимостью

$$e = e(\chi_e) = e(\eta, \boldsymbol{D}, \phi, \nabla\phi), \quad \chi_e = \{\eta, \boldsymbol{D}, \phi, \nabla\phi\}. \tag{7}$$

Переход от внутренней энергии $e$ к свободной энергии $\psi$ осуществляется с помощью преобразования Лежандра по паре параметров $(\eta, \theta)$ [20]. В этом случае для $e$ в форме (7) имеем $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}(\theta, \boldsymbol{D}, \phi, \nabla\phi)$, $\tilde{\psi} = e - T\eta$. Однако для задач электродинамики более удобно определить свободную энергию Гельмгольца путём преобразования Лежандра по двум парам переменных $(\eta, \theta)$ и $(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{E})$. В этом случае для $e$ в форме (7) имеем $\psi = \psi(\theta, \boldsymbol{E}, \phi, \nabla\phi)$ и

$$\psi = e - \theta\eta - \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} \tag{8}$$

(см. [20, разд. 13.6]). Далее будем использовать последний способ.

## 4. ПРОЦЕДУРА КОЛМАНА — НОЛЛА

Перейдём непосредственно к выводу определяющих соотношений модели. Общая схема вывода повторяет работы [12, 13]. Сначала получим диссипативное неравенство для свободной энергии. Для этого подставим в (5) уравнение баланса микросил и микронапряжений (4) и получим

$$\dot{e} = -\nabla\cdot\boldsymbol{q} - \nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}) + \boldsymbol{\xi}\cdot\nabla\dot{\phi} - \pi\dot{\phi} + r. \tag{9}$$

Выразим внутреннюю энергию $e$ через свободную энергию $\psi$ в соответствии с (8) и подставим результат в (9). Складывая результат с энтропийным неравенством (6), умноженным на $-\theta$, с учётом (1) придём к неравенству

$$\dot{\psi} + \dot{\theta}\eta + \dot{\boldsymbol{E}}\cdot\boldsymbol{D} - \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j} - \boldsymbol{\xi}\cdot\nabla\dot{\phi} + \pi\dot{\phi} + \frac{\boldsymbol{q}}{\theta}\cdot\nabla\theta \leqslant 0. \tag{10}$$

Последнее неравенство выражает второй закон термодинамики в форме диссипативного неравенства для свободной энергии.

Теперь перейдём к реализации непосредственно процедуры Колмана — Нолла.

Пусть свободная энергия $\psi = \psi(\chi)$ зависит от множества параметров $\chi = \{\theta, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{E}, \phi, \boldsymbol{p}, h\}$, где $\boldsymbol{p} \equiv \nabla\phi$, $\boldsymbol{g} \equiv \nabla\theta$, $h \equiv \dot{\phi}$. Соответственно, зависимости микросил $\pi$, микронапряжений $\boldsymbol{\xi}$ и вектора электрической индукции зададим как $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\chi)$, $\pi = \pi(\chi)$, $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}(\chi)$, $\eta = \eta(\chi)$. Тогда из (10) следует

$$\begin{aligned}(\psi_\theta + \eta)\dot{\theta} + \psi_{\boldsymbol{g}}\cdot\dot{\boldsymbol{g}} + (\psi_{\boldsymbol{E}} + \boldsymbol{D})\cdot\dot{\boldsymbol{E}} + (\psi_\phi + \pi)\dot{\phi}&\\ + (\psi_{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{\xi})\cdot\nabla\dot{\phi} + \psi_h\ddot{\phi} + \frac{\boldsymbol{q}}{\theta}\cdot\nabla\theta - \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j} \leqslant 0.&\end{aligned} \tag{11}$$

Последнее неравенство должно выполняться для любых происходящих в системе процессов. В силу того, что $\dot{\boldsymbol{E}}$, $\nabla\dot{\phi}$ и $\ddot{\phi}$ входят в него линейно и существуют такие состояния системы, что $\nabla\dot{\phi} \neq 0$ и $\ddot{\phi} \neq 0$, из (11) следует

$$\psi_{\boldsymbol{g}} = 0, \quad \psi_h = 0, \quad \psi_\theta = -\eta, \quad \psi_{\boldsymbol{E}} = -\boldsymbol{D}, \quad \psi_{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{\xi} \tag{12}$$

и неравенство (11) сводится к неравенству

$$(\psi_\phi + \pi)\dot{\phi} + \frac{\boldsymbol{q}}{\theta} \cdot \nabla\theta - \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{j} \leqslant 0. \tag{13}$$

Положим

$$\begin{aligned} \pi(\chi) &= -\psi_\phi(\theta, \boldsymbol{E}, \phi, \nabla\phi) - \boldsymbol{k}_\pi(\chi) \cdot \nabla\theta - \beta_\pi(\chi)\dot{\phi} - \boldsymbol{\tau}_\pi(\chi) \cdot \boldsymbol{E}, \\ \boldsymbol{q}(\chi) &= -\boldsymbol{K}_q(\chi) \cdot \nabla\theta - \boldsymbol{\beta}_q(\chi)\dot{\phi} - \boldsymbol{T}_q(\chi) \cdot \boldsymbol{E}, \\ \boldsymbol{j}(\chi) &= \quad \boldsymbol{K}_j(\chi) \cdot \nabla\theta + \boldsymbol{\beta}_j(\chi)\dot{\phi} + \boldsymbol{T}_j(\chi) \cdot \boldsymbol{E}, \end{aligned} \tag{14}$$

где величины $\boldsymbol{K_q}$, $\boldsymbol{T_q}$, $\boldsymbol{K_j}$, $\boldsymbol{T_j}$ — заданные тензоры; $\boldsymbol{k_\pi}$, $\boldsymbol{\tau_\pi}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\beta_q}$, $\boldsymbol{\beta_j}$ — заданные векторные функции; $\beta_\pi$ — скалярная функция. С учётом (14) из (13) получим

$$\begin{aligned} &\beta_\pi\dot{\phi}^2 + \frac{1}{\theta}\nabla\theta \cdot \boldsymbol{K}_q(\chi) \cdot \nabla\theta + \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{T}_j(\chi) \cdot \boldsymbol{E} \\ &\qquad + \dot{\phi}\left[\boldsymbol{k}_\pi(\chi) + \frac{\boldsymbol{\beta}_q(\chi)}{\theta}\right] \cdot \nabla\theta + \dot{\phi}[\boldsymbol{\tau}_\pi(\chi) + \boldsymbol{\beta}_j(\chi)] \cdot \boldsymbol{E} + \nabla\theta \cdot \left[\frac{\boldsymbol{T}_q(\chi)}{\theta} + \boldsymbol{K}_j(\chi)\right] \cdot \boldsymbol{E} \geqslant 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Для выполнения этого неравенства достаточно положить $\beta_\pi \geqslant 0$, тензоры второго ранга $\boldsymbol{K_q}$ и $\boldsymbol{T_j}$ — симметричные и неотрицательно определённые (в данном случае — тензоры коэффициентов теплопроводности и электропроводности соответственно). Определение тензоров $\boldsymbol{T_q}$ и $\boldsymbol{K_j}$ и векторов $\boldsymbol{k_\pi}$, $\boldsymbol{\tau_\pi}$, $\boldsymbol{\beta_q}$, $\boldsymbol{\beta_j}$ должно гарантировать выполнение неравенства (15) для произвольных $\nabla\theta$ и $\boldsymbol{E}$.

Представим поле микросил $\pi$ в виде суммы двух слагаемых — «равновесного» и «неравновесного», $\pi = \pi_{\mathrm{eq}} + \pi_{\mathrm{non}}$. Здесь под термином «неравновесный» понимается величина, которая равна нулю при $\nabla\theta = 0$ и $\dot{\phi} = 0$. Тогда из (14) имеем

$$\pi_{\mathrm{eq}}(\theta, \boldsymbol{E}, \phi, \nabla\phi) = -\psi_\phi(\theta, \boldsymbol{E}, \phi, \nabla\phi), \quad \pi_{\mathrm{non}}(\chi) = -\boldsymbol{k}_\pi(\chi)\nabla\theta - \beta_\pi(\chi)\dot{\phi} - \boldsymbol{\tau}_\pi(\chi)\boldsymbol{E}.$$

Дифференцируя соотношение (8) по времени, с учётом (12) придём к равенству

$$\dot{e} = \dot{\eta}\theta + \dot{\boldsymbol{D}} \cdot \boldsymbol{E} - \pi_{\mathrm{eq}}(\theta, \boldsymbol{E}, \phi, \nabla\phi)\dot{\phi} + \boldsymbol{\xi} \cdot \dot{\boldsymbol{p}}.$$

Используя (9), перепишем последнее уравнение относительно энтропии:

$$\dot{\eta}\theta + \dot{\boldsymbol{D}} \cdot \boldsymbol{E} - \pi_{\mathrm{eq}}(\theta, \boldsymbol{E}, \phi, \nabla\phi)\dot{\phi} + \boldsymbol{\xi} \cdot \dot{\boldsymbol{p}} = -\nabla \cdot \boldsymbol{q} + \boldsymbol{E} \cdot (\boldsymbol{j} + \dot{\boldsymbol{D}}) + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla\dot{\phi} - \pi\dot{\phi} + r$$

или, после упрощения,

$$\theta\dot{\eta} = -\nabla \cdot \boldsymbol{q} + \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{j} - \pi_{\mathrm{non}}(\chi)\dot{\phi} + r. \tag{16}$$

Далее, с учётом (12) имеем

$$\dot{\eta} = -\dot{\psi}_\theta = -\psi_{\theta\theta}\dot{\theta} - \psi_{\theta\boldsymbol{E}}\dot{\boldsymbol{E}} - \psi_{\theta\phi}\dot{\phi} - \psi_{\theta\boldsymbol{p}}\dot{\boldsymbol{p}}. \tag{17}$$

Подставляя теперь (17) в (16), получим

$$c\dot{\theta} = -\nabla \cdot \boldsymbol{q} + \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{j} + \theta\psi_{\theta\boldsymbol{E}}\dot{\boldsymbol{E}} + \theta\psi_{\theta\boldsymbol{p}}\dot{\boldsymbol{p}} + (\theta\psi_{\theta\phi} - \pi_{\mathrm{non}}(\chi))\dot{\phi} + r.$$

Это уравнение является уравнением баланса внутренней энергии в форме уравнения теплопроводности. Входящая в него величина

$$c = -\psi_{\theta\theta}\theta \tag{18}$$

естественно отождествляется с теплоёмкостью.

Теперь получим уравнение для эволюции параметра порядка как следствие уравнения баланса микросил и микронапряжений (4). Для этого подставим (12) и (14) в (4) и после перегруппировки слагаемых получим

$$\beta_\pi(\chi)\dot{\phi} = \nabla \cdot \psi_{\boldsymbol{p}}(\theta, \boldsymbol{E}, \phi, \nabla\phi) - \boldsymbol{k}_\pi(\chi)\nabla\theta - \psi_\phi(\theta, \boldsymbol{E}, \phi, \nabla\phi) - \boldsymbol{\tau}_\pi(\chi)\boldsymbol{E} + \gamma.$$

В результате приходим к следующей системе уравнений относительно температуры $\theta$ и параметра порядка $\phi$:

$$\begin{aligned} c\dot{\theta} &= -\nabla \cdot \boldsymbol{q} + \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{j} + \theta\psi_{\theta\boldsymbol{E}}\dot{\boldsymbol{E}} + \theta\psi_{\theta\boldsymbol{p}}\dot{\boldsymbol{p}} + (\theta\psi_{\theta\phi} - \pi_{\text{non}}(\chi))\dot{\phi} + r, \\ \beta_\pi(\chi)\dot{\phi} &= \nabla \cdot \psi_{\boldsymbol{p}}(\theta, \boldsymbol{E}, \phi, \nabla\phi) - \boldsymbol{k}_\pi(\chi) \cdot \nabla\theta - \psi_\phi(\theta, \boldsymbol{E}, \phi, \nabla\phi) - \boldsymbol{\tau}_\pi(\chi)\boldsymbol{E} + \gamma. \end{aligned} \tag{19}$$

Первое уравнение этой системы выражает закон сохранения энергии в форме уравнения теплопроводности. Второе имеет вид уравнения типа Аллена — Кана и описывает эволюцию параметра порядка. Отметим, что система уравнений (19) зависит от напряжённости электрического поля $\boldsymbol{E}$ и должна быть дополнена системой уравнений Максвелла (1) в квази(электро)стационарном приближении.

Система уравнений (19) описывает эволюцию системы в случае произвольной зависимости свободной энергии $\psi$ от своих аргументов. Её уточнение связано с конкретизацией выражения для свободной энергии от своих аргументов.

Примем следующий вид зависимости свободной энергии от своих аргументов:

$$\psi(\theta, \boldsymbol{E}, \phi, \boldsymbol{p}) = \psi_0(\theta, \boldsymbol{E}, \phi) + \frac{1}{2}\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{\Lambda}(\theta, \boldsymbol{E}, \phi) \cdot \boldsymbol{p} + \frac{1}{2(k+1)}\lambda_k(\theta, \boldsymbol{E}, \phi)\left\|\boldsymbol{p}\right\|^{2(k+1)}, \tag{20}$$

где $\|\cdot\|$ — обычная евклидова норма в пространстве $\mathbb{R}^3$, $k = 1, 2, \ldots$ — натуральное, $\lambda_k > 0$ — коэффициент, не зависящий от $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{\Lambda}$ — симметричный положительно определённый тензор второго ранга, $\psi_0$ — зависимость, вид которой будет уточнён ниже. Первые два слагаемых в (20) соответствуют ранее предложенной в [2] модели. Последнее слагаемое необходимо для обеспечения математической корректности постановки задачи [11]. Отметим, что в соответствии с [11] более общий вид выражения (20) предполагает наличие в нем слагаемых вида $\psi_{q,2} \sim \Delta^q\phi$, где $q = 2s$, $s = 1, 2, \ldots$. Учёт слагаемого такого вида требует применения теории микросил и микронапряжений второго порядка [21, 22] и является предметом будущей работы.

Указанный вид свободной энергии позволяет конкретизировать соотношения (14):

$$\begin{aligned} \pi(\theta, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{E}, \phi, \boldsymbol{p}, h) &= -\psi_\phi(\theta, \boldsymbol{E}, \phi, \boldsymbol{p}) - \boldsymbol{k}_\pi(\theta, \phi)\boldsymbol{g} - \beta_\pi(\theta, \phi)h - \boldsymbol{\tau}_\pi(\theta, \phi)\boldsymbol{E}, \\ \boldsymbol{\xi}(\theta, \boldsymbol{E}, \phi, \boldsymbol{p}) &= \boldsymbol{\Lambda}(\theta, \boldsymbol{E}, \phi) \cdot \boldsymbol{p} + \lambda_k(\theta, \boldsymbol{E}, \phi)\boldsymbol{p}\|\boldsymbol{p}\|^{2k}, \\ \boldsymbol{q}(\theta, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{E}, \phi, h) &= -\boldsymbol{K}_q(\theta, \phi) \cdot \boldsymbol{g} - \boldsymbol{\beta}_q(\theta, \phi)h - \boldsymbol{T}_q(\theta, \phi) \cdot \boldsymbol{E}, \\ \boldsymbol{j}(\theta, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{E}, \phi, h) &= \boldsymbol{K}_j(\theta, \phi) \cdot \boldsymbol{g} + \boldsymbol{\beta}_j(\theta, \phi)h + \boldsymbol{T}_j(\theta, \phi) \cdot \boldsymbol{E}. \end{aligned} \tag{21}$$

Далее для простоты будем считать, что $\boldsymbol{\Lambda}_\phi(\theta, \boldsymbol{E}, \phi) = 0$, $\lambda_{k\phi}(\theta, \boldsymbol{E}, \phi) = 0$, т. е. коэффициенты $\boldsymbol{\Lambda}$ и $\lambda_k$ не зависят от $\phi$. Таким образом, $\psi_\phi(\theta, \boldsymbol{E}, \phi, \boldsymbol{p}) = \psi_{0\phi}(\theta, \boldsymbol{E}, \phi)$. В результате, с учётом (12), (14), (20) приходим к следующим соотношениям:

$$\psi(\theta, \boldsymbol{E}, \phi, \boldsymbol{p}) = \psi_0(\theta, \boldsymbol{E}, \phi) + \frac{1}{2}\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{\Lambda}(\theta, \boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{p} + \frac{1}{2(k+1)}\lambda_k(\theta, \boldsymbol{E})\|\boldsymbol{p}\|^{2(k+1)},$$

$$\eta(\theta, \boldsymbol{E}, \phi, \boldsymbol{p}) = -\psi_{0\theta}(\theta, \boldsymbol{E}, \phi) - \frac{1}{2}\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{\Lambda}_\theta(\theta, \boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{p} - \frac{1}{2(k+1)}\lambda_{k\theta}(\theta, \boldsymbol{E})\|\boldsymbol{p}\|^{2(k+1)},$$

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{D}(\theta,\boldsymbol{E},\phi,\boldsymbol{p}) = -\psi_{0\boldsymbol{E}}(\theta,\boldsymbol{E},\phi) - \frac{1}{2}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{E}}(\theta,\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{p} - \frac{1}{2(k+1)}\lambda_{k\boldsymbol{E}}(\theta,\boldsymbol{E})\|\boldsymbol{p}\|^{2(k+1)},\\
\boldsymbol{\xi}(\theta,\boldsymbol{E},\phi,\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{\Lambda}(\theta,\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{p} + \lambda_k(\theta,\boldsymbol{E},\phi)\boldsymbol{p}\|\boldsymbol{p}\}^{2k},\\
\pi(\theta,\boldsymbol{g},\boldsymbol{E},\phi,\boldsymbol{p},h) = -\psi_{0\phi}(\theta,\boldsymbol{E},\phi) - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\omega}_{\phi}(\theta,\boldsymbol{E},\phi) - \boldsymbol{k}_{\pi}(\theta,\phi)\cdot\boldsymbol{g} - \beta_{\pi}(\theta,\phi)h - \boldsymbol{\tau}_{\pi}(\theta,\phi)\cdot\boldsymbol{E},\\
\boldsymbol{q}(\theta,\boldsymbol{g},\boldsymbol{E},\phi,h) = -\boldsymbol{K}_q(\theta,\phi)\cdot\boldsymbol{g} - \boldsymbol{\beta}_q(\theta,\phi)h - \boldsymbol{T}_q(\theta,\phi)\cdot\boldsymbol{E},\\
\boldsymbol{j}(\theta,\boldsymbol{g},\boldsymbol{E},\phi,h) = \boldsymbol{K}_j(\theta,\phi)\cdot\boldsymbol{g} + \boldsymbol{\beta}_j(\theta,\phi)h + \boldsymbol{T}_j(\theta,\phi)\cdot\boldsymbol{E}.
\end{gathered}
\tag{22}
$$

Далее для простоты будем считать, что $\boldsymbol{D}$ — аффинная функция $\boldsymbol{E}$ при фиксированных $\theta$ и $\phi$, и положим $\boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{E}}(\theta,\boldsymbol{E}) = 0$, $\lambda_{k\boldsymbol{E}}(\theta,\boldsymbol{E}) = 0$. Отсюда следует, что $\boldsymbol{D}(\theta,\boldsymbol{E},\phi) = \varepsilon(\theta,\phi)\boldsymbol{E} + \boldsymbol{D}_0(\theta,\phi)$ и $\psi_{0\boldsymbol{E}}(\theta,\boldsymbol{E},\phi) = -\varepsilon(\theta,\phi)\boldsymbol{E} - \boldsymbol{D}_0(\theta,\phi)$. Как следствие,

$$
\psi_0(\theta,\boldsymbol{E},\phi) = -\frac{1}{2}\varepsilon(\theta,\phi)\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{D}_0(\theta,\phi)\cdot\boldsymbol{E} + \psi_{00}(\theta,\phi).
$$

Более того, будем считать, что внешние источники энергии и внешние микросилы отсутствуют, т. е. $r = \gamma = 0$, и пренебрежём «перекрёстными» эффектами, положив

$$
\boldsymbol{k}_{\pi} = \boldsymbol{\tau}_{\pi} = \boldsymbol{\beta}_q = \boldsymbol{\beta}_j = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{T}_q = \boldsymbol{K}_j = \boldsymbol{0}.
$$

В этом случае неравенство (15) примет вид

$$
\beta_{\pi}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{\theta}\nabla\theta\cdot\boldsymbol{K}_q(\chi)\cdot\nabla\theta + \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{T}_j(\chi)\cdot\boldsymbol{E} \geqslant 0.
$$

Оно всегда выполняется в силу сделанных выше допущений о неотрицательности $\beta_{\pi}$ и симметричности и неотрицательной определённости тензоров $\boldsymbol{K_q}$ и $\boldsymbol{T_j}$.

С учётом определяющих соотношений (22) система уравнений (19) примет вид

$$
\begin{aligned}
c\dot{\theta} &= -\nabla\cdot(-\boldsymbol{K}_q\cdot\nabla\theta) + \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{T}_j\cdot\boldsymbol{E} + \theta\psi_{\theta\boldsymbol{E}}\cdot\dot{\boldsymbol{E}} + \theta\psi_{\theta\boldsymbol{p}}\cdot\dot{\boldsymbol{p}} + \theta\psi_{\theta\phi}\dot{\phi} + \beta_{\pi}(\varsigma)\dot{\phi}^2,\\
\beta_{\pi}(\chi)\dot{\phi} &= \quad \nabla\cdot\psi_{\boldsymbol{p}}(\theta,\boldsymbol{E},\phi,\nabla\phi) - \psi_{\phi}(\theta,\boldsymbol{E},\phi,\nabla\phi).
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Если считать свойства среды изотропными, т. е. принять

$$
\boldsymbol{\Lambda} = \lambda\boldsymbol{I}, \quad \boldsymbol{K}_q = k(\theta,\phi)\boldsymbol{I}, \quad \boldsymbol{T}_j = \tau(\theta,\phi)\boldsymbol{I}
$$

и дополнительно положить

$$
\omega = 0, \quad \beta_{\pi} = \beta(\theta,\phi), \quad \boldsymbol{D}_0 = 0,
$$

то получим следующее выражение для свободной энергии:

$$
\psi(\theta,\boldsymbol{E},\phi,\boldsymbol{p}) = -\frac{1}{2}\varepsilon(\theta,\phi)\boldsymbol{E}^2 + \psi_{00}(\theta,\phi) + \frac{1}{2}\lambda\boldsymbol{p}^2 + \frac{1}{2(k+1)}\lambda_k\|\boldsymbol{p}\|^{2(k+1)}
$$

и, как следствие, определяющие соотношения

$$
\begin{gathered}
\eta(\theta,\boldsymbol{E},\phi) = \frac{1}{2}\varepsilon(\theta,\phi)_{\theta}\boldsymbol{E}^2 - \psi_{00\theta}(\theta,\phi),\\
\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{p}) = \lambda\boldsymbol{p} + \lambda_k\boldsymbol{p}\|\boldsymbol{p}\|^{2k}, \quad \pi(\theta,\boldsymbol{E},\phi,h) = \frac{1}{2}\varepsilon_{\phi}(\theta,\phi)\boldsymbol{E}^2 - \psi_{00\phi}(\theta,\phi) - \beta(\theta,\phi)h,\\
\boldsymbol{q}(\theta,\boldsymbol{g},\phi) = -k(\theta,\phi)\boldsymbol{g}, \quad \boldsymbol{j}(\theta,\boldsymbol{E},\phi) = \tau(\theta,\phi)\boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{D}(\theta,\boldsymbol{E},\phi) = \varepsilon(\theta,\phi)\boldsymbol{E}.
\end{gathered}
\tag{24}
$$

Система уравнений (23) в этом случае примет вид

$$c(\theta,\phi)\dot{\theta} = -\nabla\cdot(-k(\theta,\phi)\nabla\theta) + \tau(\theta,\phi)\boldsymbol{E}^2 - \theta\varepsilon_\theta(\theta,\phi)\boldsymbol{E}\cdot\dot{\boldsymbol{E}} \\ + \theta\dot{\phi}\left(\psi_{00\theta\phi}(\theta,\phi) - \frac{1}{2}\varepsilon_{\theta\phi}(\theta,\phi)\boldsymbol{E}^2\right) + \beta(\theta,\phi)\dot{\phi}^2, \quad (25а)$$

$$\beta(\theta,\phi)\dot{\phi} = \lambda\Delta\phi + \lambda_k\nabla\cdot(\|\nabla\phi\|^{2k}\nabla\phi) - \psi_{00\phi}(\theta,\phi) + \frac{1}{2}\varepsilon_\phi(\theta,\phi)\boldsymbol{E}^2. \quad (25б)$$

Дальнейшее уточнение модели и системы определяющих соотношений связано с конкретизацией выражений для зависимостей $\psi_{00} = \psi_{00}(\theta,\phi)$ — аддитивной части свободной энергии, не зависящей от напряжённости поля и градиента параметра порядка; $\tau = \tau(\theta,\phi)$ — коэффициента электропроводности; $\varepsilon = \varepsilon(\theta,\phi)$ — коэффициента диэлектрической проницаемости, $\kappa = \kappa(\theta,\phi)$ — коэффициента теплопроводности; «кинетического» коэффициента $\beta$ — подвижности, которая имеет смысл скорости процесса при приложенной единичной обобщённой термодинамической силе; формальных коэффициентов $\beta$, $\lambda$ и $\lambda_k$, которые определяют характер пространственного распределения параметра порядка в стационарном состоянии [11].

Рассмотрим эти вопросы последовательно.

## 5. ЗАМЫКАНИЕ УРАВНЕНИЙ МОДЕЛИ

Далее будем считать аналогично [2], что:

(а) неповреждённой среде соответствует значение параметра порядка $\phi = 1$, соответствующие значения величин будем обозначать индексом d (dielectric);

(б) полностью повреждённой среде в канале пробоя соответствует значение параметра порядка $\phi = 0$, соответствующие значения величин будем обозначать индексом br (breakdown).

Для случая модели пробоя зависимость свободной энергии от параметра порядка выберем в виде, аналогичном [2]:

$$\psi_{00}(\theta,\phi) = \psi_{\mathrm{mix}}(\theta,\phi) + \frac{\Gamma}{2}\frac{1-f(\phi)}{l^2}. \quad (26)$$

При $\phi = 1$ величина $\psi_{00}$ определяет зависимость свободной энергии неповреждённой среды от температуры $\theta$; при $\phi = 0$ она определяет аналогичную зависимость для полностью «повреждённой» среды, которую можно отождествить с плазмой канала пробоя.

Первое слагаемое в (26) отвечает за свободную энергию смеси «чистых» фаз. Второе слагаемое специфично для моделей диффузной границы трещин в упругой среде и модели электрического пробоя. Входящий в него параметр $\Gamma$ может быть связан с количеством энергии, необходимой для образования единицы длины канала пробоя [2, 11].

Функция $f = f(\phi)$ в (26) — это так называемая интерполирующая функция (или, в другой терминологии, функция деградации, см., например, [23]), которая интерполирует между значениями $\phi = 0$ и $\phi = 1$. В работе [2] она выбрана как $f(\phi) = 4\phi^3 - 3\phi^4$. Общие свойства, которым удовлетворяет функция деградации, могут быть определены, как в [23]:

(а) $f'(s) \geqslant 0$;

(б) $f(0) = 0$, $f(1) = 1$;

(в) $f'(0) = 0$;

(г) $f'(1) \geqslant 0$.

Свойство (а) гарантирует монотонную зависимость свойств среды от значений $\phi$ (см. ниже); (б) обеспечивает корректное задание свойств в предельных случаях $\phi = 0, 1$; (в) гарантирует положительность $\phi$ в ходе эволюции; (г) отвечает за «степень устойчивости» полностью неповреждённой среды к внешнему воздействию и, таким образом, за скорость образования канала пробоя. В совокупности свойства (а)–(г) гарантируют, что при корректном задании параметра порядка $\phi$ в начальный момент времени он остаётся на отрезке $[0, 1]$ в ходе дальнейшей эволюции состояния среды. Специальному обсуждению этого и смежных вопросов посвящена работа [23].

С учётом (26) результирующее выражение для свободной энергии имеет вид

$$\psi(\theta, \boldsymbol{E}, \phi, \boldsymbol{p}) = \psi_{\mathrm{mix}}(\theta, \phi) + \frac{\lambda}{2}\frac{1 - f(\phi)}{l^2} - \frac{1}{2}\varepsilon(\theta, \phi)\boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{2}\lambda\boldsymbol{p}^2 + \frac{1}{2(k+1)}\lambda_k\|\boldsymbol{p}\|^{2(k+1)}. \tag{27}$$

Из (27) могут быть получены все остальные определяющие соотношения (см. (22) и (24)).

Обратим внимание, что если: (а) в среде отсутствует электромагнитное поле и (б) среда является полностью неповреждённой ($\phi = 1$) или полностью повреждённой ($\phi = 0$), то единственным отличным от нуля слагаемым в (27), зависящим от оставшихся параметров состояния, является первое, т. е. $\psi(\theta, \boldsymbol{E}, \phi, \boldsymbol{p}) = \psi_{\mathrm{mix}}(\theta, \phi) + \mathrm{const}$. Это «классическая» часть свободной энергии, которая присутствует в среде. Она определяется традиционным уравнением состояния вещества. Способы её задания рассмотрены ниже.

Напомним, что в рамках моделей типа диффузной границы чёткая граница между фазами отсутствует: «чистые» фазы, соответствующие значениям параметра порядка $\phi \approx 0$ и $\phi \approx 1$ разделены диффузной границей, т. е. тонкой областью, в пределах которой свойства фаз меняются быстро, но непрерывно. Соответственно, в области диффузной границы должна быть задана и свободная энергия системы, которая здесь называется смесевой. Это может быть сделано различными способами.

Первый способ основан на том, что для «чистых» фаз известны значения термодинамических коэффициентов и параметров среды (например, теплоёмкости и так далее). В рамках формального подхода, используемого в настоящей работе, эти параметры определяются как те или иные производные свободной энергии. Выражение для свободной энергии может быть получено интегрированием соответствующих соотношений.

Поясним это на примере коэффициента теплоёмкости, который определятся в соответствии со сделанными допущениями, как в (18). Интегрирование выражения (18) дважды по температуре $\theta$ приводит к следующей зависимости:

$$\psi_{\mathrm{mix}}(\theta, \phi) = -c(\phi)\theta\ln\theta + \theta[c(\phi) + c_1(\phi)], \tag{28}$$

где $c_1(\phi)$ — заданная функция параметра порядка $\phi$. Это выражение при фиксированном значении $\phi$ с точностью до обозначений параметров совпадает с выражением для свободной энергии совершенного газа [24].

Далее, в соответствии с (12) энтропия системы для свободной энергии вида (28) (без учёта остальных параметров в (27)) имеет вид $\eta = c(\phi)\ln\theta - c_1(\phi)$. Положим формально $c_1(\phi) = c(\phi)\ln\theta_0 - \eta_0$, где $\theta_0 = \theta_0(\phi)$ и $\eta_0 = \eta_0(\phi)$ — параметры, интерпретируемые как «опорные» значения температуры и энтропии при фиксированном значении $\phi$. Тогда придём к равенству $\eta = c(\phi)\ln(\theta/\theta_0) + \eta_0$, где $\eta_0$ — значение энтропии при $\theta = \theta_0$. Соответственно, для свободной энергии имеем

$$\psi_{\mathrm{mix}}(\theta, \phi) = \theta\left[c(\phi) - \eta_0 - c(\phi)\ln\frac{\theta}{\theta_0}\right], \tag{29}$$

что повторяет выражение для свободной энергии совершенного газа (24).

В свою очередь, считая, что теплоёмкость неповреждённой среды равняется $c_{\mathrm{d}}$, повреждённой — $c_{\mathrm{br}}$, можно, определить теплоёмкость смеси как $c = c(\phi) = c_{\mathrm{d}}\tilde{f}(\phi) + c_{\mathrm{br}}(1 - \tilde{f}(\phi))$, где $\tilde{f}$ — подходящая функция, интерполирующая между 0 и 1.

Второй способ основан на допущении, что для «чистых» фаз (т. е. при $\phi = 0, 1$) выражение для свободной энергии известно и задано как $\psi_\alpha = \psi_\alpha(\theta)$, $\alpha = \mathrm{d}, \mathrm{br}$. В этом случае свободную энергию системы при $\phi \neq 0, 1$ определим как (см. [6])

$$\psi(\phi, \theta) = \psi_{\mathrm{d}}(\theta)\tilde{f}(\phi) + \psi_{\mathrm{br}}(\theta)(1 - \tilde{f}(\phi)).$$

Другими словами, «взвешиваются» не параметры модели, а непосредственно выражения для свободной энергии. Отметим, что в общем случае описанные способы не эквиваленты.

Как только выражение для свободной энергии определено, появляется возможность получить выражение для внутренней энергии, используя в (27) преобразование Лежандра по переменным $\theta$ и $\boldsymbol{E}$ и выражая все независимые переменные через $\chi_e = \{\eta, \boldsymbol{D}, \phi, \boldsymbol{p}\}$, $\boldsymbol{p} \equiv \nabla\phi$. В результате приходим к равенству

$$e = c(\phi)\theta + \frac{1}{2\varepsilon(\phi)}\boldsymbol{D}^2 + \frac{\lambda}{2}\frac{1-f(\phi)}{l^2} + \frac{1}{2}\lambda\boldsymbol{p}^2 + \frac{1}{2(k+1)}\lambda_k\|\boldsymbol{p}\|^{2(k+1)}.$$

Далее задача может рассматриваться с использованием уравнения закона сохранения энергии в консервативной форме (5) или (9) или в форме уравнения теплопроводности (25а).

Наконец, необходимо задать определяющие соотношения для диэлектрической проницаемости $\varepsilon = \varepsilon(\theta,\phi)$ и электропроводности $\tau = \tau(\theta,\phi)$. В простейшем случае это можно сделать аналогично заданию коэффициента теплоёмкости выше: будем считать, что $a = a(\theta,\phi)$, где $a = \varepsilon, \tau$ определены как

$$a = a(\theta,\phi) = a_{\mathrm{d}}(\theta)\tilde{f}(\phi) + a_{\mathrm{br}}(\theta)(1-\tilde{f}(\phi)),$$

где $\tilde{f}$ — подходящая интерполирующая функция (в частности, можно положить $\tilde{f} = f$, где $f$ — функция деградации в (26)). В простейшем случае можно принять $a_{\mathrm{d}}(\theta), a_{\mathrm{br}}(\theta) = \mathrm{const}$.

## 6. ПОЛНАЯ МОДЕЛЬ

В настоящем разделе приведена формулировка полной модели развития канала электрического пробоя в неизотермической постановке в замкнутом виде. Формулировка и вывод отдельных групп уравнений приведены в предыдущих разделах. Ниже используется наиболее простая формулировка определяющих соотношений, когда термодинамическое состояние фаз описывается уравнением состояния идеального совершенного газа и не учитывается зависимость от температуры электрофизических и ряда термодинамических свойств среды.

В соответствии с содержанием предыдущих разделов модель включает в себя следующие группы уравнений и определяющих соотношений:

— группу уравнений Максвелла в квази(электро)стационарном приближении

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho_{\mathrm{E}}, \quad \frac{\partial\rho_{\mathrm{E}}}{\partial t} + \nabla\cdot\boldsymbol{j} = 0; \quad \boldsymbol{D} = \varepsilon(\phi)\boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{j} = \tau(\phi)\boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{E} = -\nabla\Phi;$$

— уравнение типа Аллена — Кана, описывающее эволюцию параметра порядка $\phi$:

$$\beta\dot{\phi} = \lambda\Delta\phi + \lambda_k\nabla\cdot(\|\nabla\phi\|^{2k}\nabla\phi) - \psi_{00\phi}(\theta,\phi) + \frac{1}{2}\varepsilon_\phi(\phi)\boldsymbol{E}^2, \tag{30}$$

где $\beta = \mathrm{const}$ — коэффициент подвижности, $\lambda = \mathrm{const}$, $\lambda_k = \mathrm{const}$ — параметры;

— уравнение закона сохранения энергии в форме уравнения теплопроводности (25б):

$$c(\phi)\dot{\theta} = -\nabla\cdot(-k(\phi)\nabla\theta) + \tau(\phi)\boldsymbol{E}^2 + \theta\dot{\phi}\psi_{00\theta\phi}(\theta,\phi) + \beta\dot{\phi}^2, \tag{31}$$

где $c = c(\phi)$ — коэффициент теплоёмкости, $k = k(\phi)$ — коэффициент теплопроводности, $\beta = \mathrm{const}$ — коэффициент подвижности; в формулировке последнего уравнения явно учтено, что диэлектрическая проницаемость не зависит от температуры (см. (25а));

— выражения для свободной энергии, задаваемой соотношениями (27):

$$\psi(\theta,\boldsymbol{E},\phi,\boldsymbol{p}) = \psi_{00}(\theta,\phi) - \frac{1}{2}\varepsilon(\phi)\boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{2}\lambda\boldsymbol{p}^2 + \frac{1}{2(k+1)}\lambda_k\|\boldsymbol{p}\|^{2(k+1)},$$

$$\psi_{00}(\theta,\phi) = \psi_{\mathrm{mix}}(\theta,\phi) + \frac{\Gamma}{2}\frac{1-f(\phi)}{l^2}, \quad \psi_{\mathrm{mix}}(\theta,\phi) = -c(\phi)\theta\ln\theta + \theta[c(\phi) + c_1(\phi)],$$

где $c_1(\phi) = c(\phi)\ln\theta_0 - \eta_0$, $\theta_0, \eta_0 = \text{const}$ — опорные значения температуры и энтропии среды при фиксированном значении $\phi$;

— зависимости $a = a(\phi)$, где $a = \varepsilon, \tau, c$, которые определены как

$$a = a(\phi) = a_{\mathrm{d}}(\theta) f(\phi) + a_{\mathrm{br}}(\theta)(1 - f(\phi)),$$

где $f = f(\phi) = 4\phi^3 - 3\phi^4$ — функция деградации, $a_{\mathrm{d}}, a_{\mathrm{br}} = \text{const}$ — значения соответствующей величины для полностью повреждённой (br) и полностью неповреждённой (d) среды.

Представленные уравнения и определяющие соотношения представляют собой замкнутую систему уравнений относительно неизвестных полей $\Phi = \Phi(\boldsymbol{x}, t)$, $\phi = \phi(\boldsymbol{x}, t)$, $\theta = \theta(\boldsymbol{x}, t)$.

Сформулированные выше уравнения модели должны быть дополнены подходящими начальными и граничными условиями.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрен термодинамически обоснованный вывод математической модели типа диффузной границы для описания динамики развития канала электрического пробоя. Построенная модель обобщает результаты работы [2], включает в себя уравнение закона сохранения энергии и позволяет учитывать неизотермические процессы.

Вывод модели выполнен в рамках методов рациональной механики сплошной среды с применением процедуры Колмана — Нолла и теории микросил и микронапряжений Гуртина. Таким образом, построенная модель является термодинамически корректной в смысле выполнения закона сохранения энергии и выполнения второго закона термодинамики в форме неравенства Клазиуса — Дюгема.

Предложенная модель имеет вид связанной системы уравнений для системы уравнений Максвелла в квази(электро)стационарном приближении, уравнения типа Аллена — Кана для описания эволюции параметра порядка и уравнения, выражающего закон сохранения энергии. Дальнейшее направления развития настоящей работы может быть связано с обобщением построенной модели на случай деформируемой среды (что потребует учёта закона сохранения массы и импульса), а также разработкой вычислительных алгоритмов для анализа модели методами математического моделирования и вычислительного эксперимента.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Воробьёв Г.А., Похолков Ю.П., Королев Ю.Д., Меркулов В.И.* Физика диэлектриков (область сильных полей). Томск: Изд-во Томск. политех. ун-та, 2011.
2. *Pitike K.C., Hong W.* Phase-field model for dielectric breakdown in solids // J. Appl. Phys. 2014. V. 115, N 4. P. 044101-1 - 044101-9; https://doi.org/10.1063/1.4862929
3. *Anderson D., McFadden G., Wheeler A.* Diffuse-interface methods in fluid mechanics // Annual Rev. Fluid Mech., 1997. V. 30. P. 139–165; https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.30.1.139
4. *Kim J.* Phase-field models for multi-component fluid flows // Communications in computational physics. 2012. V. 12, N 3. P. 613–661; https://doi.org/10.4208/cicp.301110.040811a
5. *Ambati M., Gerasimov T., De Lorenzis L.* A review on phase-field models of brittle fracture and a new fast hybrid formulation // Comput. Mechanics. 2015. V. 55. P. 383–405; https://doi.org/10.1007/s00466-014-1109-y
6. *Boettinger W.J., Warren J.A., Beckermann C., Karma A.* Phase field simulation of solidification // Annual Rev. Mater. Res. 2002. V. 32. P. 163–194; https://doi.org/10.1146/annurev.matsci.32.101901.155803
7. *Cartalade A., Younsi A., Régnier R., Schuller S.* Simulations of phase-field models for crystal growth and phase separation // Procedia Materials Sci. 2014. V. 7. P. 72–78; https://doi.org/10.1016/j.mspro.2014.10.010

8. *Gomez H., Bures M., Moure A.* A review on computational modelling of phase-transition problems // Philos. Trans. A. Math. Phys. Eng. Sci. 2019. V. 377, N 2143. P. 20180203; https://doi.org/10.1098/rsta.2018.0203
9. *Emmerich H., Löwen H., Wittkowski R., Gruhn T., Tòth G.I., Tegze G., Gránásy L.* Phase-field-crystal models for condensed matter dynamics on atomic length and diffusive time scales: an overview // Adv. Physics. 2012. V. 61, N 6. P. 665–743; https://doi.org/10.1080/00018732.2012.737555
10. *Asadi E., Zaem M. A.* A review of quantitative phase-field crystal modeling of solid–liquid structures // J. Minerals, Metals & Materials Society. 2015. V. 67, N 1. P. 186–201; https://doi.org/10.1007/s11837-014-1232-4
11. *Зипунова Е.В., Савенков Е.Б.* О моделях диффузной границы для описания динамики объектов высшей коразмерности. 2020. (Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша № 122); https://doi.org/10.20948/prepr-2020-122
12. *Fried E., Gurtin M.E.* Continuum theory of thermally induced phase transitions based on an order parameter // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1993. V. 68, N 3–4. P. 326–343; https://doi.org/10.1016/0167-2789(93)90128-N
13. *Gurtin M.E.* Generalized Ginzburg-Landau And Cahn-Hilliard Equations Based On A Microforce Balance. U. S. Army Research Office, Research Report No. 94-NA-020, June 1994; https://doi.org/10.1016/0167-2789(95)00173-5
14. *Gurtin M.E., Polignone D., Vinals J.* Two-phase binary fluids and immiscible fluids described by an order parameter. Carnegie Mellon University, Report 95-NA-001, 1995.
15. *Gurtin M.E.* Generalized Ginzburg-Landau and Cahn-Hilliard equations based on a microforce balance // Phisica D: Nonlinear Phenomena. 1996. V. 92, N 3–4. P. 178–192; https://doi.org/10.1016/0167-2789(95)00173-5
16. *Gurtin M.E., Fried E., Anand L.* The mechanics and thermodynamics of continua. Cambridge Univ. Press, 2010.
17. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика: Учеб. пособие. Том 2: Теория поля. М.: Физматгиз, 1988.
18. *Larsson J.* Electromagnetics from a quasistatic perspective // Amer. J. Phys. 2007. V. 75, N 3. P. 230–239.
19. *Coleman B.D., Noll W.* The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity // Arch. Ration. Mech. Anal. 1963. V. 13, N 1. P. 167–178; https://doi.org/10.1007/BF01262690
20. *Rosensweig R.E.* Thermodynamics of electromagnetism // *Astarita G.* Thermodynamics. An Advanced Textbook for Chemical Engineers. Chap. 13. Boston: Springer-Verl., 1989; https://doi.org/10.1007/978-1-4899-0771-4_14
21. *Espath L.F.R., Sarmiento A.F., Dalcin L., Calo V.M.* On the thermodynamics of the Swift–Hohenberg theory // Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2017. V. 29. P. 1335–1345; https://doi.org/10.1007/s00161-017-0581-y
22. *Espath L., Calo V.M., Fried E.* Generalized Swift—Hohenberg and phase-field-crystal equations based on a second-gradient phase-field theory // Meccanica. 2020. V. 55. P. 1853–1868; https://doi.org/10.1007/s11012-020-01228-9
23. *Sargado J.M., Keilegavlen E., Berre I., Nordbotten J.M.* High-accuracy phase-field models for brittle fracture based on a new family of degradation functions // J. Mechanics and Physics of Solids. 2018. V. 111. P. 458–489; https://doi.org/10.1016/j.jmps.2017.10.015
24. *Helrich C.S.* Modern Thermodynamics with Statistical Mechanics. Berlin: Springer-Verl., 2009.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 51–72:517.9:538.91

# NONISOTHERMAL DIFFUSE INTERFACE MODEL FOR ELECTRICAL BREAKDOWN CHANNEL PROPAGATION



**E. V. Zipunova[1a], A. A. Kuleshov[1b], E. B. Savenkov[1c]**

[1] *Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS,*
*Miusskaya sq. 4, Moscow 125047, Russia*

E-mails: [a]zipunova@keldysh.ru, [b]andrew_kuleshov@mail.ru, [c]savenkov@keldysh.ru

Received 11.08.2021, revised 01.10.2021, accepted 21.10.2021

**Abstract.** The paper is devoted to the derivation of the gradient (weakly nonlocal) diffuse interface model, which describes an electrical breakdown channel propagation under the application of an electric field. In contrast to earlier presented models, the derived one is nonisothermal and consists of Maxwell's equations in quasi(electro)stationary approximation, Allen—Cahn type equation which governs phase field evolution, and energy balance equation. The derivation of the model is provided based on the rational thermomechanics framework using M. Gurtin microstress and microforce theory and Coleman-Noll procedure to derive constitutive relations of the model. The derived model is thermodynamically consistent and satisfies entropy inequality in the respective form. The closed-form formulation of the model and complete set of constitutive relations are presented.

**Keywords:** diffuse interface model, phase field, order parameter, electrical breakdown.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.103

## REFERENCES

1. Vorob'ev G.A., Pokholkov Yu.P., Korolev Yu.D., Merkulov V.I. Fizika dielektrikov (oblast' sil'nykh polei) [Physics of dielectrics (region of strong fields)]. Tomsk: Tomsk Polytechnic University Publ., 2011 (in Russian).
2. Pitike K.C., Hong W. Phase-field model for dielectric breakdown in solids. *J. Appl. Phys.*, 2014, Vol. 115, No. 4, pp. 044101-1–044101-9; https://doi.org/10.1063/1.4862929
3. Anderson D., McFadden G., Wheeler A. Diffuse-interface methods in fluid mechanics. *Annual Rev. Fluid Mech.*, 1997, Vol. 30, pp. 139–165; https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.30.1.139
4. Kim J. Phase-field models for multi-component fluid flows. *Communications in Computational Physics*, 2012, Vol. 12, No. 3, pp. 613–661; https://doi.org/10.4208/cicp.301110.040811a
5. Ambati M., Gerasimov T., De Lorenzis L. A review on phase-field models of brittle fracture and a new fast hybrid formulation // Comput. Mechanics. 2015. V. 55, pp. 383–405; https://doi.org/10.1007/s00466-014-1109-y
6. Boettinger W.J., Warren J.A., Beckermann C., Karma A. Phase field simulation of solidification. *Annual Rev. Mater. Res.*, 2002, Vol. 32, pp. 163–194; https://doi.org/10.1146/annurev.matsci.32.101901.155803
7. Cartalade A., Younsi A., Régnier R., Schuller S. Simulations of phase-field models for crystal growth and phase separation. *Procedia Materials Sci.*, 2014, Vol. 7, pp. 72–78; https://doi.org/10.1016/j.mspro.2014.10.010
8. Gomez H., Bures M., Moure A. A review on computational modelling of phase-transition problems. *Philos. Trans. A. Math. Phys. Eng. Sci.*, 2019, Vol. 377, No. 2143, pp. 20180203; https://doi.org/10.1098/rsta.2018.0203

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2022, Vol. 16, No. 1.

9. Emmerich H., Löwen H., Wittkowski R., Gruhn T., Tòth G.I., Tegze G., Gránásy L. Phase-field-crystal models for condensed matter dynamics on atomic length and diffusive time scales: an overview. *Adv. Physics*, 2012, Vol. 61, No. 6, pp. 665–743; https://doi.org/10.1080/00018732.2012.737555
10. Asadi E., Zaem M. A. A review of quantitative phase-field crystal modeling of solid–liquid structures. *J. Minerals, Metals & Materials Society*, 2015, Vol. 67, No. 1, pp. 186–201; https://doi.org/10.1007/s11837-014-1232-4
11. Zipunova E.V., Savenkov E.B. O modelyakh diffuznoi granitsy dlya opisaniya dinamiki ob'ektov vysshei korazmernosti [On the diffuse interface models for high codimension dispersed inclusions]. Moscow, 2020. (Preprint/ Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS; No. 122); https://doi.org/10.20948/prepr-2020-122
12. Fried E., Gurtin M.E. Continuum theory of thermally induced phase transitions based on an order parameter. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1993, Vol. 68, No. 3–4, pp. 326–343; https://doi.org/10.1016/0167-2789(93)90128-N
13. Gurtin M.E. Generalized Ginzburg—Landau and Cahn—Hilliard Equations Based on a Microforce Balance. U. S. Army Research Office, Research Report, No. 94-NA-020, June 1994; https://doi.org/10.1016/0167-2789(95)00173-5
14. Gurtin M.E., Polignone D., Vinals J. Two-Phase Binary Fluids and Immiscible Fluids Described by an Order Parameter. Carnegie Mellon University, Report 95-NA-001, 1995.
15. Gurtin M.E. Generalized Ginzburg—Landau and Cahn—Hilliard equations based on a microforce balance. *Phisica D: Nonlinear Phenomena*, 1996, Vol. 92, No. 3–4, pp. 178–192; https://doi.org/10.1016/0167-2789(95)00173-5
16. Gurtin M.E., Fried E., Anand L. The Mechanics and Thermodynamics of Continua. Cambridge Univ. Press, 2010.
17. Landau L.D., Lifshnts E.M. The Classical Theory of Fields. Vol. 2. (Course of Theoretical Physics Ser.). Butterworth; Heinemann, 1980.
18. Larsson J. Electromagnetics from a quasistatic perspective. *Amer. J. Phys.*, 2007, Vol. 75, No. 3, pp. 230–239.
19. Coleman B.D., Noll W. The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1963, Vol. 13, No. 1, pp. 167–178; https://doi.org/10.1007/BF01262690
20. Rosensweig R.E. Thermodynamics of electromagnetism. Astarita G. Thermodynamics. An Advanced Textbook for Chemical Engineers. Chap. 13. Boston: Springer-Verl., 1989; https://doi.org/10.1007/978-1-4899-0771-4_14
21. Espath L.F.R., Sarmiento A.F., Dalcin L., Calo V.M. On the thermodynamics of the Swift–Hohenberg theory. *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 2017, Vol. 29, pp. 1335–1345; https://doi.org/10.1007/s00161-017-0581-y
22. Espath L., Calo V.M., Fried E. Generalized Swift—Hohenberg and phase-field-crystal equations based on a second-gradient phase-field theory. *Meccanica*, 2020, Vol. 55, pp. 1853–1868; https://doi.org/10.1007/s11012-020-01228-9
23. Sargado J.M., Keilegavlen E., Berre I., Nordbotten J.M. High-accuracy phase-field models for brittle fracture based on a new family of degradation functions. *J. Mechanics and Physics of Solids*, 2018, Vol. 111, pp. 458–489; https://doi.org/10.1016/j.jmps.2017.10.015
24. Helrich C.S. Modern Thermodynamics with Statistical Mechanics. Berlin: Springer-Verl., 2009.