СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

Журнал основан в 1998 году
Выходит 4 раза в год

Том 25, № 1(89)

Январь – март, 2022 г.

СОДЕРЖАНИЕ

НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

УДК 531.36

О КАЧЕСТВЕННОМ АНАЛИЗЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

© 2022 В. Д. Иртегов[a], Т. Н. Титоренко[b]

[1]*Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, ул. Лермонтова, 134, г. Иркутск 664033, Россия*

E-mails: [a]irteg@icc.ru, [b]titor@icc.ru

Поступила в редакцию 30.07.2021 г.; после доработки 29.09.2021 г.;
принята к публикации 21.10.2021 г.

В задаче о движении твёрдого тела с неподвижной точкой под действием магнитного поля, порождённого эффектом Барнетта — Лондона, и потенциальных сил указаны частные случаи существования дополнительных квадратичных интегралов и проведён качественный анализ уравнений движения тела в одном из этих случаев.

Ключевые слова: твёрдое тело, качественный анализ, компьютерная алгебра.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.104

ВВЕДЕНИЕ

Задача о вращении твёрдого тела вокруг неподвижной точки под действием сил различной природы (также при отсутствии сил) имеет давнюю историю, но интерес к ней по-прежнему сохраняется. Абсолютно твёрдое тело используется как модель при описании движения многих сложных технических устройств: космических аппаратов, промышленных роботов, ракет и др. В настоящей работе рассматривается задача о вращении твёрдого тела с неподвижной точкой в однородном магнитном поле с учётом эффекта Барнетта — Лондона и момента потенциальных сил. Известно, что «нейтральный» ферромагнетик при вращении становится намагниченным вдоль оси вращения (эффект Барнетта [1]). Аналогичное явление имеет место и при вращении сверхпроводящего твёрдого тела (эффект Лондона [2]). Магнитный момент $\mathbf{B}$ связан с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ соотношением $\mathbf{B} = B\boldsymbol{\omega}$, B — симметричный линейный оператор.

Движение тела описывается уравнениями Эйлера — Пуассона вида

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = A\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + B\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma} \times (C\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{s}), \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — угловая скорость тела; $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ — единичный вектор, характеризующий направление силы тяжести; $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ — вектор центра масс тела; A, B, C — симметричные матрицы третьего порядка: A — тензор инерции тела, построенный в неподвижной точке, B — матрица, характеризующая магнитный момент тела, C — матрица, характеризующая влияние потенциальных сил на тело.

При $C_i = \nu A_i$, $i = 1, 2, 3$, где ν – гравитационная постоянная, дифференциальные уравнения (1) описывают движение тела под действием магнитного и центрального ньютоновского полей.

Уравнения (1) допускают два общих первых интеграла

$$V_1 = A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\gamma} = \varkappa, \quad V_2 = \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma} = 1 \tag{2}$$

и в общем случае являются неинтегрируемыми.

Изучению влияния эффекта Барнетта — Лондона на движение тела в различных аспектах посвящено немало работ. Подобные задачи возникают во многих приложениях, например в космодинамике [3], при проектировании приборов, использующих неконтактный подвес [4]. Анализ уравнений (1) с точки зрения их интегрируемости, отыскания частных решений проводится, например, в [5–8]. В [5] для уравнений (1) найдено линейное инвариантное соотношение типа Гесса [9]. В [6, 7] указаны случаи их интегрируемости, когда матрицы A, B — диагональные и потенциальные силы отсутствуют. Показано [7], при $B = \lambda E$ ($\lambda = \mathrm{const}$) уравнения (1) сводятся к уравнениям Кирхгофа, описывающим движение твёрдого тела в идеальной жидкости.

В настоящей работе предполагается, что в уравнениях (1)

$$A = \mathrm{diag}(A_1, A_2, A_3), \quad C = \mathrm{diag}(C_1, C_2, C_3).$$

Проводится качественный анализ этих уравнений в частных случаях существования дополнительных первых интегралов. В [10] методом неопределённых коэффициентов в сочетании с методом базисов Грёбнера [11] получены линейные инвариантные соотношения уравнений (1). Этим же способом при некоторых ограничениях на параметры задачи найдены следующие квадратичные интегралы рассматриваемых уравнений:

1) при $A_1 = A_2$, $B_{13} = B_{23} = 0$, $B_{33} = B_{11} + B_{22}$, $C_1 = C_3 = C_2$, $s_1 = s_2 = s_3 = 0$ интеграл

$$\begin{aligned} K_1 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \frac{A_3}{A_2^2}(2A_2 - A_3)\omega_3^2 - \frac{1}{A_2^2}\big(2A_2(B_{11} - B_{22})\omega_1\gamma_1 + 2A_2B_{12}(\omega_1\gamma_2 + \omega_2\gamma_1) \\ + 2A_3B_{11}\omega_3\gamma_3 - \big(B_{22}^2 - B_{11}^2\big)\gamma_1^2 + 2B_{12}(B_{11} + B_{22})\gamma_1\gamma_2 + \big(B_{11}^2 + B_{12}^2\big)\gamma_3^2\big); \end{aligned} \tag{3}$$

2) при $A_1 = A_3$, $B_{12} = B_{23} = 0$, $B_{22} = B_{11} + B_{33}$, $C_1 = C_2 = C_3$, $s_1 = s_2 = s_3 = 0$ интеграл

$$\begin{aligned} K_2 = \omega_1^2 - \frac{A_2}{A_3^2}(A_2 - 2A_3)\omega_2^2 + \omega_3^2 + \frac{1}{A_3^2}\big(2A_3(B_{33}\omega_1\gamma_1 + B_{11}\omega_3\gamma_3 - B_{13}(\omega_1\gamma_3 + \omega_3\gamma_1)) \\ + \big(B_{33}^2 - B_{11}^2\big)\gamma_1^2 - \big(B_{11}^2 + B_{13}^2\big)\gamma_2^2 - 2B_{13}(B_{11} + B_{33})\gamma_1\gamma_3\big); \end{aligned}$$

3) при $A_2 = A_3$, $B_{12} = B_{13} = 0$, $B_{33} = B_{11} - B_{22}$, $C_1 = C_2 = C_3$, $s_1 = s_2 = s_3 = 0$ интеграл

$$\begin{aligned} K_3 = \omega_1^2 - \frac{A_3^2\big(\omega_2^2 + \omega_3^2\big)}{A_1(A_1 - 2A_3)} + \frac{1}{A_1(A_1 - 2A_3)}\big(2A_1B_{22}\omega_1\gamma_1 - 2A_3(B_{11} - 2B_{22})\omega_2\gamma_2 \\ + 2A_3B_{23}(\omega_2\gamma_3 + \omega_3\gamma_2) + \big(B_{22}^2 + B_{23}^2\big)\gamma_1^2 - B_{11}(B_{11} - 2B_{22})\gamma_2^2 + 2B_{11}B_{23}\gamma_2\gamma_3\big). \end{aligned}$$

Как можно видеть, интегралы существуют при условии динамической симметрии тела, координаты центра масс тела совпадают с координатами неподвижной точки.

Далее, используя обобщения метода Рауса — Ляпунова [12], проводится качественный анализ уравнений (1) в случае, когда эти уравнения допускают один из приведённых выше квадратичных интегралов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим дифференциальные уравнения (1) в случае, когда они допускают интеграл K_1 из (3). Уравнения записываются следующим образом:

$$\begin{gathered} A_2\dot\omega_1 = (B_{12}\omega_1 + B_{22}\omega_2)\gamma_3 - ((B_{11} + B_{22})\gamma_2 + (A_3 - A_2)\omega_2)\omega_3, \\ A_2\dot\omega_2 = ((B_{11} + B_{22})\gamma_1 + (A_3 - A_2)\omega_1)\omega_3 - (B_{11}\omega_1 + B_{12}\omega_2)\gamma_3, \\ A_3\dot\omega_3 = (B_{11}\omega_1 + B_{12}\omega_2)\,\gamma_2 - (B_{12}\omega_1 + B_{22}\omega_2)\gamma_1, \\ \dot\gamma_1 = \omega_3\gamma_2 - \omega_2\gamma_3, \quad \dot\gamma_2 = \omega_1\gamma_3 - \omega_3\gamma_1, \quad \dot\gamma_3 = \omega_2\gamma_1 - \omega_1\gamma_2. \end{gathered} \tag{4}$$

Интегралы (2) принимают вид

$$\widetilde{V}_1 = A_2(\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2) + A_3\omega_3\gamma_3 = \varkappa, \quad V_2 = \sum_{i=1}^{2} \gamma_i^2 = 1. \tag{5}$$

Поставим задачу качественного анализа данной системы. Из необходимых условий экстремума первых интегралов задачи (или их некоторой комбинации) будут найдены особые множества дифференциальных уравнений и исследована их устойчивость по Ляпунову. При выбранном методе анализа в качестве особых рассматриваются стационарные множества [12], т. е. множества любой конечной размерности, на которых удовлетворяются необходимые условия экстремума элементов алгебры первых интегралов задачи. Стационарные множества нулевой размерности традиционно называют стационарными решениями, а множества ненулевой размерности — стационарными инвариантными многообразиями (ИМ).

2. ВЫДЕЛЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ И ИНВАРИАНТНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

В соответствии с указанным методом возьмём линейную комбинацию первых интегралов

$$2\Omega = \lambda_0 K_1 - 2\lambda_1 \widetilde{V}_1 - \lambda_2 V_2 \tag{6}$$

и запишем необходимые условия экстремума Ω по переменным ω_i, γ_i:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\Omega}{\partial\omega_1} = \lambda_0\big(\omega_1 - A_2^{-1}((B_{11}-B_{22})\gamma_1 + B_{12}\gamma_2\big) - \lambda_1 A_2\gamma_1 = 0,\\
\frac{\partial\Omega}{\partial\omega_2} = \lambda_0\big(\omega_2 - A_2^{-1}B_{12}\gamma_1\big) - \lambda_1 A_2\gamma_2 = 0,\\
\frac{\partial\Omega}{\partial\omega_3} = \lambda_0 A_2^{-2}A_3((2A_2 - A_3)\omega_3 - B_{11}\gamma_3) - \lambda_1 A_3\gamma_3 = 0,\\
\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma_1} = -\lambda_0 A_2^{-2}(A_2(B_{11}-B_{22})\omega_1 + A_2B_{12}\omega_2 + \big(B_{11}^2 - B_{22}^2\big)\gamma_1\\
+B_{12}(B_{11}+B_{22})\gamma_2) - \lambda_1 A_2\omega_1 - \lambda_2\gamma_1 = 0,\\
\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma_2} = -\lambda_0 A_2^{-2}B_{12}(A_2\omega_1 + (B_{11}+B_{22})\gamma_1) - \lambda_1 A_2\omega_2 - \lambda_2\gamma_2 = 0,\\
\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma_3} = -\lambda_0 A_2^{-2}\big(A_3B_{11}\omega_3 + \big(B_{11}^2 + B_{12}^2\big)\gamma_3\big) - \lambda_1 A_3\omega_3 - \lambda_2\gamma_3 = 0.
\end{gathered} \tag{7}$$

Здесь λ_i — параметры семейства интегралов Ω.

Решения системы (7) в случае, когда уравнения зависимы, позволяют определить ИМ дифференциальных уравнений (4), соответствующие семейству первых интегралов Ω. Для нахождения решений будем использовать систему компьютерной алгебры Mathematica.

Как можно видеть, уравнения (7) разделяются по переменным. Построим для левых частей уравнений, зависящих от ω_1, ω_2, γ_1, γ_2, лексикографический базис Грёбнера относительно $\lambda_1 > \lambda_2 > \gamma_1 > \omega_1$. В результате получим систему уравнений, которая разделяется на две подсистемы. Ниже приведены лексикографические базисы этих подсистем:

$$\begin{gathered}
\big(B_{12}^2 - B_{11}B_{22}\big)\gamma_2 - A_2(B_{12}\omega_1 + B_{22}\omega_2) = 0,\\
-B_{12}\gamma_1 + B_{11}\gamma_2 + A_2\omega_2 = 0,\\
\lambda_0\big(B_{11}^2 + B_{12}^2\big) + \lambda_2 A_2^2 = 0, \quad -\lambda_0 B_{11} - \lambda_1 A_2^2 = 0;
\end{gathered} \tag{8}$$

$$
\begin{gathered}
-B_{12}\omega_1^2 + ((B_{11} - B_{22})\omega_1 + B_{12}\omega_2)\omega_2 = 0,\\
-\omega_1\gamma_2 + \omega_2\gamma_1 = 0,\\
-\big(A_2^2\omega_2^2 + B_{12}(B_{11} + B_{22})\omega_1\gamma_2^2\big)\lambda_0 - A_2^2\omega_2\gamma_2^2\lambda_2 = 0,\\
\big(B_{12}\omega_1\gamma_2 - A_2\omega_2^2\big)\lambda_0 + A_2^2\omega_2\gamma_2\lambda_1 = 0.
\end{gathered}
\tag{9}
$$

Из последних двух уравнений (8) найдём

$$
\lambda_1 = -\frac{B_{11}}{A_2^2}\lambda_0, \quad \lambda_2 = -\frac{B_{11}^2 + B_{12}^2}{A_2^2}\lambda_0 \tag{10}
$$

и подставим в оставшиеся уравнения (7) (зависящие от ω_3, γ_3). Эти уравнения сведутся к одному $\omega_3 = 0$. Непосредственно вычислением по определению ИМ проверяется, что уравнения

$$
\begin{gathered}
\left(B_{12}^2 - B_{11}B_{22}\right)\gamma_2 - A_2(B_{12}\omega_1 + B_{22}\omega_2) = 0,\\
A_2\omega_2 - B_{12}\gamma_1 + B_{11}\gamma_2 = 0, \quad \omega_3 = 0
\end{gathered}
\tag{11}
$$

определяют ИМ коразмерности 3 уравнений движения (4).

Дифференциальные уравнения на этом ИМ записываются в виде

$$
\begin{gathered}
\dot\omega_1 = \frac{B_{12}^2 - B_{11}B_{22}}{A_2^2}\gamma_2\gamma_3, \quad \dot\gamma_2 = \omega_1\gamma_3,\\
\dot\gamma_3 = -\omega_1\gamma_2 + (A_2\omega_1 - B_{12}\gamma_2)\left(\frac{B_{12}}{B_{22}^2}\omega_1 + \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{A_2B_{22}^2}\gamma_2\right)
\end{gathered}
\tag{12}
$$

и описывают маятникоподобные колебания тела.

Подставим значения λ_1, λ_2 (10) в (6). Также непосредственно вычислением можно проверить, что интеграл

$$
2\Omega_1 = K_1 + \frac{2B_{11}}{A_2^2}\widetilde{V}_1 + \frac{B_{11}^2 + B_{12}^2}{A_2^2}\,V_2 \tag{13}
$$

принимает стационарное значение на ИМ (11).

Аналогично, исходя из уравнений (9), получим уравнения

$$
\begin{gathered}
-B_{12}\omega_1^2 + ((B_{11} - B_{22})\omega_1 + B_{12}\omega_2)\omega_2 = 0,\\
-\omega_1\gamma_2 + \omega_2\gamma_1 = 0, \quad \omega_3 = 0, \quad \gamma_3 = 0,
\end{gathered}
\tag{14}
$$

определяющие ИМ коразмерности 4.

Дифференциальные уравнения $\dot\omega_2 = 0, \quad \dot\gamma_2 = 0$ на этом ИМ имеют следующее семейство решений:

$$
\omega_2 = \omega_2^0 = \mathrm{const}, \quad \gamma_2 = \gamma_2^0 = \mathrm{const}\,.
$$

Таким образом, с геометрической точки зрения ИМ (14) в пространстве $\mathbb{R}^6$ соответствует поверхность, каждая точка которой является неподвижной точкой в фазовом пространстве.

Используя карты некоторого атласа на ИМ (14), нетрудно показать, что интеграл

$$
\Omega_2 = -\frac{1}{4A_2^2V_2}\big(2\widetilde{V}_1^2 - 2z_1\widetilde{V}_1V_2 - V_2\big((B_{11} + B_{22})z_1V_2 + 2A_2^2K_1\big)\big), \tag{15}
$$

где $z_1 = B_{11} - B_{22} - D$, $D = \sqrt{(B_{11} - B_{22})^2 + 4B_{12}^2}$, принимает стационарное значение на ИМ (14) в карте

$$
\omega_1 = \frac{z_1\omega_2}{2B_{12}}, \quad \omega_3 = 0, \quad \gamma_1 = \frac{z_1\gamma_2}{2B_{12}}, \quad \gamma_3 = 0, \tag{16}
$$

а интеграл

$$\Omega_3 = -\frac{1}{4A_2^2V_2}\big(2\widetilde{V}_1^2 - 2z_2\widetilde{V}_1V_2 - V_2\big((B_{11}+B_{22})z_2V_2 + 2A_2^2K_1\big)\big) \tag{17}$$

в карте

$$\omega_1 = \frac{z_2\omega_2}{2B_{12}}, \quad \omega_3 = 0, \quad \gamma_1 = \frac{z_2\gamma_2}{2B_{12}}, \quad \gamma_3 = 0. \tag{18}$$

Здесь $z_2 = B_{11} - B_{22} + D$.

Ещё два ИМ, отличные от приведённых выше, и условия на параметры λ_1, λ_2, при которых интеграл Ω (6) принимает стационарное значение на этих ИМ, можно получить, построив лексикографический базис для полиномов всей системы (7) относительно $\omega_3 > \omega_1 > \omega_2 > \gamma_1 > \lambda_2 > \lambda_1$. Уравнения ИМ записываются в виде

$$\begin{gathered} 2B_{12}\gamma_1 - (B_{11} - B_{22} \pm D)\gamma_2 = 0, \\ 2(A_2 - A_3)\omega_2 - (B_{11} + B_{22} \mp D)\gamma_2 = 0, \\ 2(A_2 - A_3)B_{12}\omega_1 + \big(2B_{12}^2 - B_{22}(B_{11} - B_{22} \pm D)\big)\gamma_2 = 0, \\ 2(A_2 - A_3)\omega_3 - (B_{11} + B_{22} \mp D)\gamma_3 = 0. \end{gathered} \tag{19}$$

Дифференциальные уравнения на этих ИМ подобны уравнениям на ИМ (14):

$$\dot{\gamma}_2 = 0, \quad \dot{\gamma}_3 = 0.$$

Интеграл Ω в (6) принимает стационарное значение на ИМ (19) при соответствующих значениях

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_0}{2A_2^2(A_2 - A_3)}(A_3(B_{11} - B_{22}) + 2A_2B_{22} \mp (2A_2 - A_3)D),$$
$$\lambda_2 = -\frac{\lambda_0}{2A_2^2(A_2 - A_3)^2}\big(2A_2^2\big(B_{11}^2 + B_{12}^2\big) - (2A_2 - A_3)A_3(B_{11} + B_{22})(B_{11} - B_{22} \pm D)\big).$$

Исследуем связь между многообразиями. Найдём пересечение ИМ (11) и ИМ (14). Для этой цели построим для полиномов системы, полученной объединением уравнений (11), (14), лексикографический базис Грёбнера относительно $\gamma_1 > \gamma_3 > \omega_1 > \omega_2 > \omega_3$:

$$\begin{gathered} \omega_3 = 0, \quad \big(B_{12}^2 - B_{11}B_{22}\big)\gamma_2^2 - A_2(B_{11} + B_{22})\omega_2\gamma_2 - A_2^2\omega_2^2 = 0, \\ \big(B_{11}B_{22} - B_{12}^2\big)\gamma_2 + A_2B_{12}\omega_1 + A_2B_{22}\omega_2 = 0, \quad \gamma_3 = 0, \\ B_{12}\gamma_1 - B_{11}\gamma_2 - A_2\omega_2 = 0. \end{gathered} \tag{20}$$

Уравнения (20) совместно с интегралом $V_2 = 1$ определяют следующие решения дифференциальных уравнений (4):

$$\begin{gathered} \gamma_1 = \mp\frac{\sqrt{2}B_{12}}{\sqrt{DD_1}}, \quad \gamma_2 = \pm\frac{D_1}{\sqrt{2D}}, \quad \gamma_3 = 0, \quad \omega_1 = \pm\frac{D_1\big(2B_{12}^2 - B_{22}(B_{11} - B_{22} - D)\big)}{2\sqrt{2D}A_2B_{12}}, \\ \omega_2 = \mp\frac{D_1(B_{11} + B_{22} + D)}{2\sqrt{2D}A_2}, \quad \omega_3 = 0; \end{gathered} \tag{21}$$

$$\begin{gathered} \gamma_1 = \pm\frac{\sqrt{2}B_{12}}{\sqrt{DD_2}}, \quad \gamma_2 = \pm\frac{D_2}{\sqrt{2D}}, \quad \gamma_3 = 0, \quad \omega_1 = \pm\frac{D_2(2B_{12}^2 - B_{22}(B_{11} - B_{22} + D))}{2\sqrt{2D}A_2B_{12}}, \\ \omega_2 = \mp\frac{(B_{11} + B_{22} - D)D_2}{2\sqrt{2D}A_2}, \quad \omega_3 = 0. \end{gathered} \tag{22}$$

Здесь и далее $D_1 = \sqrt{B_{11} - B_{22} + D}$, $D_2 = \sqrt{B_{22} - B_{11} + D}$.

С механической точки зрения решения (21), (22) соответствуют перманентным вращениям тела вокруг оси, расположенной в плоскости Oxy (в системе осей, связанной с телом), с угловой скоростью $\omega^2 = \big(B_{11}^2 + 2B_{12}^2 \pm B_{11}D + B_{22}(B_{22} \pm D)\big)/(2A_2^2)$.

Как можно проверить прямым вычислением, интеграл

$$2\Omega_4 = K_1 + \frac{1}{A_2^2}\big(2B_{11}\widetilde{V}_1 + \big(B_{11}^2 + B_{12}^2\big)V_2\big)$$

принимает стационарное значение на решениях (21), (22).

Аналогично можно показать, что пересечение ИМ (14) с каждым из двух ИМ (19) не пусто. Они имеют общие точки, также соответствующие перманентным вращениям тела.

3. ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ И ИНВАРИАНТНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Исследуем устойчивость ИМ (11), используя интеграл Ω_1 (13) для получения достаточных условий.

Введём отклонения

$$y_1 = \omega_1 + \frac{1}{A_2B_{12}}\big(A_2B_{22}\omega_2 + \big(B_{11}B_{22} - B_{12}^2\big)\gamma_2\big),$$
$$y_2 = \gamma_1 - \frac{1}{B_{12}}(A_2\omega_2 + B_{11}\gamma_2), \quad y_3 = \omega_3$$

и запишем вариацию интеграла Ω_1 в окрестности исследуемого решения

$$2\Delta\Omega_1 = \frac{1}{A_2^2}\big(B_{12}^2y_2^2 + (A_2y_1 + B_{22}y_2)^2 + (2A_2 - A_3)A_3y_3^2\big).$$

Рассмотрим сужение $\Delta\Omega_1$ на множество, определяемое первой вариацией интеграла $\widetilde{V}_1$:

$$\delta\widetilde{V}_1 = \frac{2}{B_{12}}(A_2\omega_2 + B_{11}\gamma_2)y_2 = 0.$$

На этом множестве $\Delta\Omega_1$ принимает вид

$$2\Delta\widetilde{\Omega}_1 = y_1^2 + \frac{(2A_2 - A_3)A_3}{A_2^2}y_3^2.$$

Условие положительной определённости

$$2A_2 > A_3 \tag{23}$$

квадратичной формы $\Delta\widetilde{\Omega}_1$ является достаточным для устойчивости исследуемого ИМ.

Исследуем теперь устойчивость ИМ (14), используя интеграл Ω_2 из (15) для получения достаточных условий. Исследование проводится в карте (16) на этом ИМ.

Введём отклонения

$$y_1 = \gamma_1 - \frac{z_1\gamma_2}{2B_{12}}, \quad y_2 = \omega_1 - \frac{z_1\omega_2}{2B_{12}}, \quad y_3 = \gamma_3, \quad y_4 = \omega_3.$$

Вторая вариация Ω_2 на множестве, определяемом первыми вариациями условных интегралов

$$\delta\widetilde{V}_1 = \frac{A_2z_1}{2B_{12}}(\omega_2y_1 + \gamma_2y_2) = 0, \quad \delta V_2 = \frac{\gamma_2z_1}{B_{12}}y_1 = 0,$$

записывается в виде

$$2\delta^2\Omega_2 = \frac{1}{4A_2^2}\Bigg[2(2A_2 - A_3)A_3y_4^2 - 2A_3\bigg((B_{11} + B_{22} + D) + 2A_2\frac{\omega_2}{\gamma_2}\bigg)y_3y_4 + \bigg(2A_2^2\frac{\omega_2^2}{\gamma_2^2} - \big(B_{11}(B_{11} + D) + B_{22}(B_{22} + D) + 2B_{12}^2\big)\bigg)y_3^2\Bigg].$$

Условия знакоопределенности

$$(A_2 - A_3)\frac{\omega_2^2}{\gamma_2^2} - A_3(B_{11} + B_{22} + D)\frac{\omega_2}{\gamma_2} - B_{11}(B_{11} + D) - B_{22}(B_{22} + D) - 2B_{12}^2 > 0,$$
$$2A_2 - A_3 > 0$$

квадратичной формы $\delta^2\Omega_2$ будут достаточными для устойчивости исследуемого ИМ.

Так как отношение интегралов $\Phi = \widetilde{V}_1/V_2$ на ИМ (14) принимает вид $\Phi|_0 = A_2\omega_2/\gamma_2 = c = \mathrm{const}$, то последние неравенства выполняются, в частности, при

$$(B_{11} > 0, B_{12} > 0, B_{22} > 0) \wedge \Bigg\{\Bigg[\bigg(\frac{A_3}{2} < A_2 < A_3\bigg) \wedge \bigg(\frac{A_2\bar{z}_1}{A_2 - A_3} < 2c < -\bar{z}_2\bigg)\Bigg] \vee ((A_2 = A_3) \wedge (2c < -\bar{z}_2)) \vee \Bigg[(A_2 > A_3) \wedge \bigg((2c < -\bar{z}_2) \vee \bigg(2c > \frac{A_2\bar{z}_2}{A_2 - A_3}\bigg)\bigg)\Bigg]\Bigg\}, \quad (24)$$

где $\bar{z}_1 = B_{11} + B_{22} - D$, $\bar{z}_2 = B_{11} + B_{22} + D$.

В карте (18) достаточные условия устойчивости ИМ (14) получаются более «жёсткими». При условии положительности $B_{11},\ B_{12},\ B_{22}$ они содержат дополнительные ограничения на B_{11}, например, $0 < B_{11} < B_{12}^2/B_{22}$ или $B_{11} > B_{12}^2/B_{22}$.

Исследуем устойчивость решений (21). Введём отклонения от невозмущённого решения:

$$y_1 = \gamma_1 \pm \frac{\sqrt{2}B_{12}}{\sqrt{D(B_{11} - B_{22} + D)}}, \quad y_2 = \gamma_2 \mp \frac{\sqrt{B_{11} - B_{22} + D}}{\sqrt{2D}},$$
$$y_3 = \gamma_3, \quad y_4 = \omega_1 \mp \frac{\sqrt{B_{11} - B_{22} + D}(2B_{12}^2 + B_{22}(B_{22} - B_{11} + D))}{2\sqrt{2}A_2B_{12}\sqrt{D}},$$
$$y_5 = \omega_2 \pm \frac{\sqrt{B_{11} - B_{22} + D}(B_{11} + B_{22} + D)}{2\sqrt{2}A_2\sqrt{D}}, \quad y_6 = \omega_3.$$

Вариация интеграла Ω_4 в отклонениях на множестве

$$\delta V_2 = \mp\frac{\sqrt{2}(2B_{12}y_1 - (B_{11} - B_{22} + D)y_2)}{\sqrt{D(B_{11} - B_{22} + D)}} = 0$$

записывается следующим образом:

$$2\Delta\Omega_4 = \bigg(\frac{B_{11} + B_{22} - D}{2A_2}y_1 + y_4\bigg)^2 + \bigg(\frac{B_{12}}{A_2}\bigg(\frac{2B_{11}}{B_{11} - B_{22} + D} - 1\bigg)y_1 + y_5\bigg)^2 + \frac{(2A_2 - A_3)A_3}{A_2^2}y_6^2.$$

Введём переменные

$$\zeta_1 = \frac{B_{11} + B_{22} - D}{2A_2}y_1 + y_4, \quad \zeta_2 = \frac{B_{12}}{A_2}\bigg(\frac{2B_{11}}{B_{11} - B_{22} + D} - 1\bigg)y_1 + y_5.$$

В новых переменных $\Delta\Omega_4$ принимает вид

$$2\Delta\widetilde{\Omega}_4 = \zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \frac{(2A_2 - A_3)A_3}{A_2^2} y_6^2.$$

Поскольку квадратичная форма $\Delta\widetilde{\Omega}_4$ знакоопределена по входящим в неё переменным при $A_2 > A_3/2$, то исследуемые решения устойчивы по переменным:

$$\begin{gathered}\frac{1}{2A_2}\left(2A_2\omega_1 + (B_{11} + B_{22} - D)\gamma_1 \mp \frac{2\sqrt{2D}B_{12}}{\sqrt{B_{11} - B_{22} + D}}\right),\\ \omega_2 - \left(\frac{B_{12}\,\gamma_1}{A_2} \pm \frac{B_{11}(B_{11} - B_{22} - D)(\sqrt{2D}\sqrt{B_{11} - B_{22} + D} \pm 2B_{12}\gamma_1)}{4A_2B_{12}^2}\right), \quad \omega_3.\end{gathered} \tag{25}$$

Для решений (22) получен аналогичный результат.

Условия устойчивости ИМ (19) совпадают с условием устойчивости ИМ (11).

4. О РЕШЕНИЯХ НА МНОГООБРАЗИИ

Рассмотрим задачу отыскания стационарных решений и ИМ дифференциальных уравнений (12). Будем использовать тот же подход, что и в разд. 2.

Первые интегралы уравнений (12) можно получить, исключив переменные ω_2, ω_3, γ_1 из исходных интегралов K_1, $\widetilde{V}_1$, V_2 с помощью уравнений (11). Они имеют вид

$$\begin{aligned}\overline{K}_1 = B_{22}^2\big[B_{12}^2\big(\gamma_2^2 + \gamma_3^2\big) - B_{11}^2\big(\gamma_2^2 - \gamma_3^2\big)\big] + (B_{12}\gamma_2 - A_2\omega_1)\big[\big(B_{11}^2 + B_{12}^2\big)(B_{12}\gamma_2 - A_2\omega_1)\\ + 2B_{11}B_{22}(B_{12}\gamma_2 + A_2\omega_1)\big] = \overline{c}_1 = \mathrm{const},\end{aligned}$$

$$\overline{V}_1 = \big(B_{12}^2 - B_{11}B_{22}\big)\gamma_2^2 - A_2^2\omega_1^2 = \overline{c}_2 = \mathrm{const}, \quad \overline{V}_2 = \frac{(B_{12}\gamma_2 - A_2\omega_1)^2}{B_{22}^2} + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1.$$

Выберем из этих интегралов независимые (такими будут, например, $\overline{K}_1$, $\overline{V}_2$). Образуем их линейную комбинацию $2\overline{\Omega} = 2\mu_0\overline{K}_1 - \mu_1\overline{V}_2$ и запишем необходимые условия экстремума $\overline{\Omega}$ по переменным ω_1, γ_2, γ_3:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\overline{\Omega}}{\partial\omega_1} = \frac{1}{B_{22}^2}\left(\frac{B_{12}z}{A_2}\gamma_2 - (z - 2B_{11}B_{22}\mu_0)\omega_1\right) = 0,\\ \frac{\partial\overline{\Omega}}{\partial\gamma_2} = \frac{1}{A_2B_{22}}\left(\frac{B_{12}z}{B_{22}}\omega_1 + \frac{1}{A_2}\left(2B_{11}\big(B_{11}B_{22} - B_{12}^2\big)\mu_0 - \frac{\big(B_{12}^2 + B_{22}^2\big)\,z}{B_{22}}\right)\gamma_2\right) = 0,\\ \frac{\partial\overline{\Omega}}{\partial\gamma_2} = -\frac{z}{A_2^2}\gamma_3 = 0.\end{gathered} \tag{26}$$

Здесь μ_0, μ_1 — параметры семейства интегралов $\overline{\Omega}$, $z = \big(B_{11}^2 + B_{12}^2\big)\mu_0 + A_2^2\mu_1$.

Очевидно, при $\mu_1 = -\big(\big(B_{11}^2 + B_{12}^2\big)\mu_0\big)/A_2^2$ уравнения (26) имеют решение

$$\omega_1 = 0, \quad \gamma_2 = 0. \tag{27}$$

Непосредственно вычислением по определению ИМ можно проверить, что соотношения (27) определяют ИМ коразмерности 2 дифференциальных уравнений (12).

Ещё одно ИМ коразмерности 2 было получено посредством построения лексикографического базиса для полиномов системы (26) относительно $\mu_1 > \omega_1 > \gamma_3$. Уравнения ИМ записываются в виде

$$\gamma_3 = 0, \quad A_2^2B_{12}\omega_1^2 - A_2\big(2B_{12}^2 - B_{22}(B_{11} - B_{22})\big)\omega_1\gamma_2 + B_{12}\big(B_{12}^2 - B_{11}B_{22}\big)\gamma_2^2 = 0. \tag{28}$$

Дифференциальные уравнения $\dot\gamma_3 = 0$ ($\dot\gamma_2 = 0$) на ИМ (27) (ИМ (28)) имеют семейства решений $\gamma_3 = \gamma_3^0 = \text{const}$ ($\gamma_2 = \gamma_2^0 = \text{const}$). Таким образом, с геометрической точки зрения, найденным ИМ в пространстве $\mathbb{R}^3$ соответствуют кривые, каждая точка которых является неподвижной точкой в фазовом пространстве системы (12).

Дополним уравнения (26) соотношением $\overline{V}_2 = 1$ и построим для полиномов получившейся системы лексикографический базис относительно $\omega_1 > \gamma_2 > \gamma_3 > \mu_1$. Результатом будет система уравнений, которая позволит получить следующие решения дифференциальных уравнений (12):

$$\omega_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = \pm 1, \tag{29}$$

$$\omega_1 = \pm\frac{D_1\big(2B_{12}^2 - B_{22}(B_{11} - B_{22} - D)\big)}{2\sqrt{2D}A_2B_{12}}, \quad \gamma_2 = \pm\frac{D_1}{\sqrt{2D}}, \quad \gamma_3 = 0, \tag{30}$$

$$\omega_1 = \pm\frac{D_2\big(2B_{12}^2 - B_{22}(B_{11} - B_{22} + D)\big)}{2\sqrt{2D}A_2B_{12}}, \quad \gamma_2 = \pm\frac{D_2}{\sqrt{2D}}, \quad \gamma_3 = 0. \tag{31}$$

Эти решения соответствуют неподвижным точкам фазового пространства исследуемой системы.

Очевидно, решения (29) принадлежат ИМ (27). Нетрудно показать, что решения (30), (31) принадлежат ИМ (28). Для этого подставим соотношения (30) в уравнения (28). Последние обратятся в тождество. Откуда следует, что решения (30) принадлежат ИМ (28). Аналогичный результат получается и в случае решений (31).

Непосредственно вычислением можно проверить, что выражения (30) совместно с уравнениями (11) определяют в исходном фазовом пространстве решения дифференциальных уравнений (4), совпадающие с (21). Решениям (31) в исходном пространстве соответствуют решения (22).

Исследуем устойчивость решений (30), используя интеграл

$$2\Phi = 2\overline{K}_1 + \frac{B_{12}^2 - B_{11}(B_{22} + D)}{A_2^2}\overline{V}_2,$$

принимающий стационарное значение на этих решениях, для получения достаточных условий.

В отклонениях

$$y_1 = \omega_1 \mp \frac{D_1\big(2B_{12}^2 - B_{22}(B_{11} - B_{22} - D)\big)}{2\sqrt{2D}A_2B_{12}}, \quad y_2 = \gamma_2 \mp \frac{D_1}{\sqrt{2D}}, \quad y_3 = \gamma_3$$

на линейном многообразии

$$\delta\overline{V}_2 = \pm\frac{\sqrt{2}}{B_{22}\sqrt{D}D_1}\big(2A_2B_{12}\,y_1 + (B_{22}\big(B_{11} - B_{22} + D) - 2B_{12}^2\big)y_2\big) = 0$$

вариация интеграла Φ записывается следующим образом:

$$\Delta\Phi = -\frac{2B_{11}\big(4B_{12}^2 + (B_{11} - B_{22})^2\big)(B_{11} - B_{22} + D)}{\big(2B_{12}^2 - B_{22}(B_{11} - B_{22} + D)\big)^2}y_1^2 - \frac{B_{11}(B_{11} + B_{22} + D)}{2A_2^2}y_3^2.$$

Квадратичная форма $\Delta\Phi$ будет положительно определённой при следующих ограничениях на параметры B_{11}, B_{12}, B_{22}:

$$\left((B_{12} \neq 0) \wedge \left((B_{22} < 0) \wedge \left(\frac{B_{12}^2}{B_{22}} < B_{11} < 0\right)\right) \vee ((B_{22} > 0) \wedge (B_{11} < 0)\right). \tag{32}$$

Условия (32) являются достаточными для устойчивости решений (30).

Необходимые условия устойчивости решений (30) получим, используя теорему Ляпунова об устойчивости по первому приближению [13].

Уравнения первого приближения в рассматриваемом случае записываются в виде

$$
\begin{gathered}
\dot{y}_1 = \frac{\big(B_{11}B_{22} - B_{12}^2\big)D_1}{\sqrt{2D}A_2^2}y_3, \quad \dot{y}_2 = \pm\frac{\big(B_{22}\big(B_{11} - B_{22} - D\big) - 2B_{12}^2\big)D_1}{2\sqrt{2D}A_2B_{12}}y_3, \\
\dot{y}_3 = \pm\left(\frac{B_{22}\big(B_{11}^2 + B_{22}(B_{22}+D)\big) + (2B_{12}^2 - B_{11}B_{22})(2B_{22}+D)}{2\sqrt{2D}A_2B_{12}B_{22}}y_2 - \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{2}B_{22}}y_1\right)D_1.
\end{gathered} \tag{33}
$$

Характеристическое уравнение

$$
\lambda(2A_2^2\lambda^2 + (B_{11} - B_{22})^2 + (B_{11} + B_{22})D + 4B_{12}^2) = 0
$$

системы (33) имеет только нулевые и чисто мнимые корни при выполнении условий

$$
(B_{12} \neq 0) \wedge \left((B_{22} < 0) \wedge \ \left(\frac{B_{12}^2}{B_{22}} \leqslant B_{11} < 0\right) \vee (B_{11} > 0)\right) \vee ((B_{22} > 0) \wedge (B_{11} \neq 0)).
$$

Сопоставляя последние неравенства с (32), заключаем, что достаточные условия близки к необходимым.

Таким образом, устойчивым на многообразии решениям (30) соответствуют устойчивые по части переменных решения (21) в исходном фазовом пространстве. Такой же результат получен и в случае решений (31).

Исходя из представленных результатов, можно сформулировать следующее

Утверждение. *Используемые для анализа рассматриваемой задачи обобщения метода Рауса — Ляпунова позволили выделить особые множества дифференциальных уравнений* (1) *в частном случае существования дополнительного квадратичного интеграла* K_1 *из* (3) *этих уравнений* (*стационарные* ИМ (11), (14), (19) *и стационарные решения* (21), (22) *как точки пересечения этих* ИМ) *и исследовать найденные решения на устойчивость. С помощью линейных и нелинейных комбинаций первых интегралов задачи, доставляющих стационарные значения найденным решениям, получены достаточные условия устойчивости* (23) *и* (24) *для* ИМ (11), (19) *и* ИМ (14) *соответственно, для стационарных решений доказана устойчивость по переменным* (25). *Используемый подход также позволил провести аналогичное исследование дифференциальных уравнений на* ИМ (11).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В задаче о движении твёрдого тела с неподвижной точкой под действием магнитного поля, порождённого эффектом Барнетта — Лондона, и потенциальных сил указаны новые дополнительные квадратичные интегралы. Проведён качественный анализ системы дифференциальных уравнений, допускающей один из этих интегралов. Выделены стационарные ИМ коразмерности 3 и 4 и получены достаточные условия их устойчивости. Показано, что пересечением многообразий являются неподвижные точки фазового пространства системы, соответствующие перманентным вращениям тела. Доказана устойчивость этих движений по части переменных. Проведён также качественный анализ дифференциальных уравнений на одном из найденных ИМ. Выделены стационарные решения и ИМ коразмерности 2. Для стационарных решений на многообразии получены достаточные условия устойчивости и сопоставлены с необходимыми. Отметим, что в рассмотренном случае существования дополнительного квадратичного интеграла параметры, характеризующие влияние потенциальных сил, явно не входят ни в уравнения движения тела, ни в первые интегралы. Условия устойчивости решений получены в виде ограничений на параметры, характеризующие магнитные силы. Таким образом, можно предположить, что потенциальные силы не оказывают существенного влияния на движение тела в данном случае.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Barnett S.J.* Magnetization by rotation // Phys. Rev. 1915. V. 6, N 4. P. 239–270.
2. *Егармин И.Е.* О магнитном поле вращающегося сверхпроводящего тела. Астрофизика и геокосмические исследования. М.: изд. МФТИ, 1983. С. 95–96.
3. *Everitt C.W. F. et al.* Gravity probe B: final results of a space experiment to test general relativity // Phys. Rev. Lett. 2011. V. 106, N 22. P. 221101; http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.106.221101
4. *Урман Ю.М.* Влияние эффекта Барнетта — Лондона на движение сверхпроводящего ротора в неоднородном магнитном поле // Журн. техн. физики. 1998. Т. 68, № 8. С. 10–15.
5. *Горр В.Г.* О линейном инвариантном соотношении в задаче о движении гиростата в магнитном поле // Прикл. математика и механика. 1997. Т. 61, вып. 4. С. 566–569.
6. *Самсонов В.А.* О вращении тела в магнитном поле // Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела. 1984. № 4. С. 32–34.
7. *Козлов В.В.* К задаче о вращении твёрдого тела в магнитном поле // Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела. 1985. № 6. С. 28–33.
8. *Зыза А.В.* Компьютерное исследование полиномиальных решений уравнений динамики гиростата // Компьютерные исследования и моделирование. 2018. Т. 10, № 1. С. 7–25.
9. *Hess W.* Über die Euler'schen Bewegungsgleichungen und über eine neue partikulare Lösung des Problems der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt // Math. Ann. 1890. V. 37, N 2. P. 153–181.
10. *Irtegov V., Titorenko T.* On linear invariant manifolds in the generalized problem of motion of a top in a magnetic field. Springer-Verl., 2019. LNCS 11661. P. 246–261; https://doi.org/10.1007/978-3-030-26831-2_17
11. *Прасолов В.В.* Многочлены. М.: изд. МЦНМО, 2000.
12. *Иртегов В.Д., Титоренко Т.Н.* Об инвариантных многообразиях систем с первыми интегралами // Прикл. математика и механика. 2009. Т. 73, № 4. С. 531–537.
13. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. Соб. соч. Т. 2. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. С. 7–263.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 531.36

ON THE QUALITATIVE ANALYSIS OF THE EQUATIONS OF MOTION OF A RIGID BODY IN A MAGNETIC FIELD

V. D. Irtegov[1a], **T. N. Titorenko**[1b]

[1] *Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, 134, Lermontov str., Irkutsk, 664033, Russia*

E-mails: [a]irteg@icc.ru, [b]titor@icc.ru

Received 30.07.2021, revised 29.09.2021, accepted 21.10.2021

Abstract. In the problem of the motion of a rigid body with a fixed point under the influence of a magnetic field generated by the Barnett—London effect, as well as potential forces, particular cases of the existence of additional quadratic integrals are presented and the qualitative analysis of the equations of motion of the body is done in one of these cases.

Keywords: rigid body, qualitative analysis, computer algebra.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.104

REFERENCES

1. Barnett S.J. Magnetization by rotation. *Phys. Rev.*, 1915, Vol. 6, No. 4, pp. 239–270.
2. Egarmin I. E. On the magnetic field of a rotating superconducting body. *Aerophysics and Geocosmic Research*, 1983, Moscow: MFTI Publ., 1983, pp. 95–96 (in Russian).
3. Everitt C.W. F. et al. Gravity probe B: final results of a space experiment to test general relativity. *Phys. Rev. Lett.*, 2011, Vol. 106, No. 22, pp. 221101; http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.106.221101
4. Urman Yu.M. Influence of the Barnett-London effect on the motion of a superconducting rotor in a nonuniform magnetic field. *Tech. Phys.*, 1998, Vol. l43, No. 8, pp. 885–889; https://doi.org/10.1134/1.1259095
5. Gorr G.V. A linear invariant relation in the problem of the motion of a gyrostat in a magnetic field. *J. Appl. Math. Mech.*, 1997, Vol. 61, No. 4, pp. 549-552; https://doi.org/10.1016/S0021-8928(97)00072-5
6. Samsonov V.A. O vrashchenii tela v magnitnom pole [On the rotation of a rigid body in a magnetic field]. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Mekhanika tverdogo tela*, 1984, No. 4, pp. 32–34 (in Russian).
7. Kozlov V. V. To the problem of the rotation of a rigid body in a magnetic field. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Mekhanika Tverdogo Tela*, 1985, No. 6, pp. 28–33 (in Russian)
8. Zyza A. V. Computer studies of polynomial solutions for gyrostat dynamics. *Computer Research and Modeling*, 2018, Vol. 10, No. 1, pp. 7–25; https://doi.org/10.20537/2076-7633-2018-10-1-7-25
9. Hess W. Über die Euler'schen Bewegungsgleichungen und über eine neue partikulare Lösung des Problems der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt. *Math. Ann.*, 1890, Vol. 37, No. 2, pp. 153–181.
10. Irtegov V., Titorenko T. On Linear Invariant Manifolds in the Generalized Problem of Motion of a Top in a Magnetic Field. Springer-Verl., 2019. LNCS 11661. P. 246–261; https://doi.org/10.1007/978-3-030-26831-2_17

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2022, Vol. 16, No. 1.

11. Prasolov V.V. Polynomials. Berlin: Springer-Verl., 2004.
12. Irtegov V.D., Titorenko T.N. The invariant manifolds of systems with first integrals. *J. Appl. Math. Mech.*, 2009, Vol. 73, No. 4, pp. 385–394; https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2009.08.014
13. Lyapunov A. M. The General Problem of the Stability of Motion, London: Taylor & Francis, 1992.