

# СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор	В. Л. Береснев
Зам. главного редактора	А. Л. Карчевский
Отв. секретарь	В. А. Дедок

## ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ

Г. В. Алексеев	С. Б. Медведев
Б. Д. Аннин	Р. Г. Новиков
В. С. Белоносов	Д. Е. Пальчунов
В. Н. Белых	П. И. Плотников
Ю. С. Волков	В. Г. Романов
В. П. Ильин	Е. М. Рудой
С. И. Кабанихин	В. М. Садовский
А. Н. Карапетянц	Д. И. Свириденко
М. В. Клибанов	А. С. Терсенов
С. С. Кутателадзе	В. С. Тимофеев
В. А. Левин	В. В. Шайдуров
Н. И. Макаренко	

Журнал основан в 1998 году  
Выходит 4 раза в год

**Том 25, № 1(89)**

Январь – март, 2022 г.

## СОДЕРЖАНИЕ

Аниконов Ю. Е., Нецадим М. В., Чупахин А. П. Многомерное уравнение Хопфа и некоторые его точные решения .....	5
Дурдиев Д. К., Сафаров Ж. Ш. Задача об определении двумерного ядра уравнения вязкоупругости со слабо горизонтальной неоднородностью .....	14
Зипунова Е. В., Кулешов А. А., Савенков Е. Б. Неизотермическая модель динамики развития канала электрического пробоя типа диффузной границы .....	39
Иртегов В. Д., Титоренко Т. Н. О качественном анализе уравнений движения твёрдого тела в магнитном поле .....	54
Коваленко Е. О., Прохоров И. В. Локализация линий разрыва коэффициента донного рассеяния по данным акустического зондирования .....	67
Куликов И. М., Черных И. Г., Тутуков А. В. Математическое моделирование высокоскоростного столкновения белых карликов — механизма взрыва сверхновых типа Ia/Iax .....	80
• Мошкин Н. П. Нестационарные течения вязкоупругой жидкости Максвелла около критической точки с противотоком в начальный момент .....	92
Пяткина Е. В. Равновесие трёхслойной пластины с трещиной .....	105
Скорospelов В. А., Турук П. А. Оптимизация поверхности тороидальной отсасывающей трубы гидротурбины .....	121
Терсенов Ар. С. Разрешимость задачи Дирихле для анизотропных параболических уравнений в невыпуклых областях .....	131

НОВОСИБИРСК

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

УДК 532.135:532.5.013.2

## НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ МАКСВЕЛЛА ОКОЛО КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ С ПРОТИВОТОКОМ В НАЧАЛЬНЫЙ МОМЕНТ

© 2022 Н. П. Мошкин<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,  
просп. Акад. Лаврентьева, 15, г. Новосибирск 630090, Россия,

<sup>2</sup>Новосибирский государственный университет,  
ул. Пирогова, 1, г. Новосибирск 630090, Россия

E-mail: nikolay.moshkin@gmail.com

Поступила в редакцию 07.07.2021 г.; после доработки 07.07.2021 г.;  
принята к публикации 13.01.2022 г.

Рассмотрены двухмерные нестационарные течения вязкоупругих жидкостей около точки стагнации. Жидкость подчиняется модели Максвелла с верхней конвективной производной. Решения уравнений находятся в предположении, что компоненты тензора дополнительных напряжений являются членами пространственной переменной вдоль твёрдой стенки. Рассмотрены нестационарные течения около передней или задней точки останова на границе. Структура течения зависит от начальной стадии (начальные данные) и вида зависимости градиента давления от времени. Профили компонент вектора скорости и тензора напряжения получаются при численном интегрировании системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Решения уравнений демонстрируют конечные временные сингулярности.

**Ключевые слова:** нестационарное течение около критической точки, вязкопластическая среда Максвелла, верхняя конвективная производная, разрушение решения, уравнение Риккати.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.107

### ВВЕДЕНИЕ

В последние несколько десятилетий значение неньютоновских вязкоупругих жидкостей становилось всё более важным в индустриальной промышленности. Поведение вязкоупругих жидкостей не может быть точно описано моделью вязкой ньютоновской жидкости. Дифференциальные уравнения движения вязкоупругих сред сильно нелинейны. Им присущи свойства гиперболичности.

Исторически значительное внимание было уделено течению жидкости около критической точки. К. Хименц [1] получил точное решение задачи о стационарном течении ньютоновской жидкости около критической точки. В [2] построен класс автомодельных решений для двумерного нестационарного течения около передней или задней критической точки на плоской границе в широком диапазоне возможного поведения течения в зависимости от того, ускоряется или замедляется течение в набегающем потоке. Решения, когда они существуют, являются точными решениями уравнений Навье — Стокса, имеющими характер пограничного слоя, аналогичный характеру стационарного течения около критической точки. Были построены автомодельные решения, описывающие плоские и осесимметричные нестационарные течения в окрестности критической точки [3].

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 19-01-00096).

Задача о стационарном течении вязкоупругой жидкости Максвелла в окрестности критической точки впервые (насколько известно автору) рассмотрена в работах [4, 5]. В ряде более современных работ были построены стационарные и автомодельные решения уравнений Максвелла с верхней конвективной производной. Теория пограничного слоя (ПС) использовалась для упрощения уравнений движения, которые сводились к одному нелинейному ОДУ третьего порядка с использованием функции тока в сочетании с автомодельностью решения [6]. Несколько результатов относительно существования и поведения решений ПС для соответствующих значений параметра пластичности приведено в [7]. В [8] представлено несколько простейших аналитических решений для скорости и компонент тензора напряжений течения вязкопластической среды Максвелла в двумерном нестационарном случае. В [10] система нелинейных уравнений вязкопластической среды Максвелла преобразуется к лагранжевым переменным. В результате получается замкнутая система уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа, которая распадается на гиперболическую подмодель и квадратуру. Гиперболическая часть отвечает за перенос нелинейных поперечных волн в несжимаемой среде Максвелла. Система уравнений гарантирует существование энергетического интеграла, что позволяет анализировать разрывные решения этих уравнения. Показано, что решения с сильными разрывами невозможны, хотя слабые разрывы могут существовать.

Целью данной работы является рассмотрение поведения решения в задаче о нестационарном течении вязкоупругой среды около критической точки. Стационарные решения задачи о течении, направленном к критической точке вдоль твёрдой границы, не допускаются. В тоже время возможны нестационарные решения, которые могут разрушаться за конечный интервал времени или вырождаться к состоянию покоя. В работе предпринята попытка анализа причин такого поведения решений.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается нестационарное течение вязкоупругой жидкости Максвелла около критической точки. В уравнениях, приведённых ниже,  $t$  — время;  $u$  и  $v$  — проекции вектора скорости  $\vec{u}$  на оси прямоугольной декартовой системы координат  $x$  и  $y$ ;  $p$  — давление;  $S_{xx} = A$ ,  $S_{xy} = S_{yx} = B$ ,  $S_{yy} = C$  — компоненты тензора избыточных напряжений  $S$ ;  $D$  — тензор скоростей деформаций;  $\tau$  — время релаксации;  $\mu$  — динамическая вязкость;  $\rho = \text{const}$  — плотность среды. Уравнения неразрывности и моментов определяют движение жидкости:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (1)$$

$$\rho(\vec{u}_t + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u}) = -\nabla p + \text{div } S. \quad (2)$$

В настоящей работе используется уравнения состояния с верхней конвективной производной [9, 10]:

$$\tau \left( \frac{\partial S}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla S - \nabla \vec{u} \cdot S - S \cdot \nabla \vec{u}^T \right) + S = 2\mu D. \quad (3)$$

Здесь тензор  $\nabla \vec{u}$  — градиент вектора, оператор в скобках (действует на тензор  $S$ ) в левой части уравнения (3) представляет одну из многих объективных производных Олдройда. Система (1)–(3) описывает течение несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла в общем трёхмерном случае. Далее рассматривается  $2D$  движение жидкости, натекающей на (оттекающей от) твёрдую непроницаемую границу. Такая ситуация наблюдается например, в окрестности передней или задней критической точки при обтекании тела, в точке отрыва ПС.

Уравнения (1)–(3) в декартовой системе координат  $(x, y)$  имеют следующий вид:

$$u_x + v_y = 0, \quad (4)$$

$$\rho(u_t + uu_x + vv_y) = -p_x + A_x + B_y, \quad (5)$$

$$\rho(v_t + uv_x + vv_y) = -p_y + B_x + C_y, \quad (6)$$

$$A_t + uA_x + vA_y - 2(Au_x + Bu_y) + \tau^{-1}A = 2\mu\tau^{-1}u_x, \quad (7)$$

$$B_t + uB_x + vB_y - Av_x - Cu_y + \tau^{-1}B = \mu\tau^{-1}(u_y + v_x), \quad (8)$$

$$C_t + uC_x + vC_y - 2(Bv_x + Cv_y) + \tau^{-1}C = 2\mu\tau^{-1}v_y. \quad (9)$$

Координатная ось  $x$  направлена вдоль твёрдой границы, координата  $y$  перпендикулярна к стенке, начало системы координат совпадает с критической точкой. Уравнения (4)–(9) допускают решение вида [10, 11]

$$u = xq(y, t), \quad v = -\int_0^y q(s, t) ds, \quad p/\rho = -1/2x^2\varphi(t) + Q(y, t), \quad (10)$$

$$A = x^2a(y, t) + d(y, t), \quad B = xb(y, t), \quad C = c(y, t). \quad (11)$$

Перепишем уравнения (4)–(9) используя (10), (11) и  $v_x = 0$ . Уравнения приведены к безразмерному виду с использованием аффинного преобразования:

$$\begin{aligned} \hat{y} &= \sqrt{\rho k/\mu} y, & \hat{t} &= kt, & v(y, t) &= \sqrt{k\mu/\rho} \hat{v}(\hat{y}, \hat{t}), & b(y, t) &= k\sqrt{\rho\mu k} \hat{b}(\hat{y}, \hat{t}), \\ c(y, t) &= \mu k \hat{c}(\hat{y}, \hat{t}), & a(y, t) &= \rho k^2 \hat{a}(\hat{y}, \hat{t}), & d(y, t) &= \mu k \hat{d}(\hat{y}, \hat{t}), & \phi(t) &= \rho k^2 \hat{\phi}(\hat{t}) \end{aligned}$$

(крышечка используется для обозначения безразмерных величин). Здесь  $k$  — постоянная размерности скорости сдвига. Используя это преобразование и опуская знак обезразмеривания ( $\hat{\cdot}$ ) у переменных, получим систему уравнений ( $W_i = \tau k$  — число Вайсенберга)

$$q_t - q_y \int_0^y q(s, t) ds + q^2 = b_y + 2a + \varphi(t), \quad (12)$$

$$a_t - a_y \int_0^y q(s, t) ds - 2bq_y + W_i^{-1} a = 0, \quad (13)$$

$$b_t - b_y \int_0^y q(s, t) ds + bq - cq_y + W_i^{-1} b = W_i^{-1} q_y, \quad (14)$$

$$c_t - c_y \int_0^y q(s, t) ds + 2cq + W_i^{-1} c = -2W_i^{-1} q, \quad (15)$$

$$d_t - d_y \int_0^y q(s, t) ds - 2dq + W_i^{-1} d = 2W_i^{-1} q. \quad (16)$$

Здесь  $\varphi(t)$  — произвольная функция времени, нижние индексы обозначают частные производные. Уравнение (16) отделено от системы и может рассматриваться независимо после того, как функции  $q$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  определены.

Дополнительно необходимо сформулировать начально-краевую задачу. На границе  $y = 0$  задаются условия прилипания и непротекания  $u = v = 0$ :

$$q(0, t) = 0, \quad t > 0. \quad (17)$$

В пределе при  $y \rightarrow \infty$  функции  $q(y, t)$ ,  $a(y, t)$ ,  $b(y, t)$ ,  $c(y, t)$  и  $d(y, t)$  должны зависеть только от времени:

$$q(y, t) \rightarrow \varsigma(t), \quad a(y, t) \rightarrow \bar{a}(t), \quad b(y, t) \rightarrow \bar{b}(t), \quad c(y, t) \rightarrow \bar{c}(t), \quad d(y, t) \rightarrow \bar{d}(t), \quad y \rightarrow \infty. \quad (18)$$

Эти функции являются решением следующей задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\bar{a}(t)}{dt} + W_i^{-1}\bar{a}(t) = 0, \quad \bar{a}(0) = \bar{a}_0 = \lim_{y \rightarrow \infty} \bar{a}_0(y), \quad (19)$$

$$\frac{d\zeta(t)}{dt} + \zeta(t)^2 = 2\bar{a}(t) + \varphi(t), \quad \zeta(0) = \zeta_0 = \lim_{y \rightarrow \infty} q_0(y), \quad (20)$$

$$\frac{d\bar{b}(t)}{dt} + (W_i^{-1} + \zeta(t))\bar{b}(t) = 0, \quad \bar{b}(0) = \bar{b}_0 = \lim_{y \rightarrow \infty} \bar{b}_0(y), \quad (21)$$

$$\frac{d\bar{c}(t)}{dt} + (W_i^{-1} + 2\zeta(t))\bar{c}(t) = -2\zeta(t)W_i^{-1}, \quad \bar{c}(0) = \bar{c}_0 = \lim_{y \rightarrow \infty} \bar{c}_0(y), \quad (22)$$

$$\frac{d\bar{d}(t)}{dt} + (W_i^{-1} - 2\zeta(t))\bar{d}(t) = 2\zeta(t)W_i^{-1}, \quad \bar{d}(0) = \bar{d}_0 = \lim_{y \rightarrow \infty} \bar{d}_0(y), \quad (23)$$

где  $q(y, 0) = q_0(y)$ ,  $\bar{a}(y, 0) = \bar{a}_0(y)$ ,  $\bar{b}(y, 0) = \bar{b}_0(y)$ ,  $\bar{c}(y, 0) = \bar{c}_0(y)$ ,  $\bar{d}(y, 0) = \bar{d}_0(y)$  — начальные данные. Уравнения (19)–(23) получены в результате предельного перехода при  $y \rightarrow \infty$  в уравнениях (12)–(16). Уравнение (20) является уравнением типа Риккати, решение которого зависит от функций  $\varphi(t)$  и  $\bar{a}(t)$  в правой части. Качественной теории дифференциальных уравнений Риккати посвящены многие исследования (см., например, [12]). В частном случае при  $\bar{a}(t) = 0$  и  $\varphi(t) = \alpha(t+1)^{-2}$  это уравнение может быть преобразовано в однородное ОДУ, которое решается в квадратурах. Решение может разрушаться в зависимости от величины константы  $\alpha$ . Функция  $q_0(y)$  является заданной и определяет конфигурацию течения в начальный момент. Вид этой функции имеет существенное влияние на окончательное решение. В случае фронтальной критической точки течение происходит вдоль твёрдой стенки в противоположных направлениях от критической точки  $q_0(y) > 0$ ,  $0 \leq y < \infty$ . Случай  $q_0(y) < 0$ ,  $0 \leq y < y_*$ ,  $q_0(y) > 0$ ,  $y \geq y_*$  для некоторого  $y_* > 0$  соответствует течению жидкости к критической точке вдоль твёрдой границы в начальный момент  $t = 0$ . (Этот случай можно рассматривать как течение в окрестности задней критической точки, например при обтекании цилиндра или другого тела.)

Уравнения (19), (21)–(23) линейные, если известно решение уравнения Риккати (20). Если в уравнениях (22) и (23) временная производная нулевая, то необходимо выполнение условий

$$\bar{c}_0 = -\frac{2\zeta_0}{1 + 2\zeta_0 W_i}, \quad \bar{d}_0 = \frac{2\zeta_0}{1 - 2\zeta_0 W_i}. \quad (24)$$

## 2. АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

При заданных функциях  $\varphi(t)$ ,  $q_0(y)$ ,  $\bar{a}_0(y)$ ,  $\bar{b}_0(y)$  и  $\bar{c}_0(y)$  уравнения (19)–(23) решаются численно. Начальные значения функций  $\bar{a}_0(y)$ ,  $\bar{b}_0(y)$  и  $\bar{c}_0(y)$  задавались постоянными с учётом уравнений (24). В результате решения системы уравнений (19)–(23) получаем поведение неизвестных функций (18) на бесконечности в зависимости от времени. Эти зависимости являются граничными условиями на бесконечности при решении системы уравнений (12)–(16).

Решение уравнений (12)–(16) ищем в области  $y \in [0, y_\infty]$  с достаточно большим  $y_\infty$ . Используется равномерная сетка с пространственным шагом  $h$ ,  $y_i = (i-1) * h$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $y_N = y_\infty$ . При определении решения граничные условия (18) сносятся на границу  $y_\infty$ . Явная аппроксимация с итерациями по нелинейности используется для численного решения определяющих уравнений:

$$\frac{q_i^{n+1,s} - q_i^n}{\Delta t} - v_i \frac{q_{i+1/2}^{n+1,s-1} - q_{i-1/2}^{n+1,s-1}}{h} + (q_i^{n+1,s-1})^2$$

$$= \frac{b_i^{n+1,s-1} - b_{i-1}^{n+1,s-1}}{h} + 2a_i^{n+1,s-1} + \varphi(t^{n+1}), \quad i = 1, \dots, N, \quad q_1^{n+1,s} = 0. \quad (25)$$

Далее явная аппроксимация уравнений (13)–(15) применяется при определении компонент  $c$ ,  $b$ ,  $a$ :

$$\frac{c_i^{n+1,s} - c_i^n}{\Delta t} - v_i \frac{c_{i+1/2}^{n+1,s-1} - c_{i-1/2}^{n+1,s-1}}{h} + c_i^{n+1,s-1} (W_1^{-1} + 2q_i^{n+1,s}) = -2W_i^{-1} q_i^{n+1,s}, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \frac{b_i^{n+1,s} - b_i^n}{\Delta t} - v_i \frac{b_{i+1/2}^{n+1,s-1} - b_{i-1/2}^{n+1,s-1}}{h} - c_i^{n+1,s-1} \frac{q_{i+1}^{n+1,s} - q_i^{n+1,s}}{h} \\ + b_i^n q_i^{n+1,s} + W_1^{-1} b_i^n = W_i^{-1} \frac{q_{i+1}^{n+1,s} - q_i^{n+1,s}}{h}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \frac{a_i^{n+1,s} - a_i^n}{\Delta t} - v_i \frac{a_{i+1/2}^{n+1,s-1} - a_{i-1/2}^{n+1,s-1}}{h} + W_i^{-1} a_i^{n+1,s-1} - 2b_i^{n+1,s} \frac{q_{i+1}^{n+1,s} - q_i^{n+1,s}}{h} = 0, \quad (28) \\ i = N - 1, \dots, 1, \quad c_N = \bar{c}_0, \quad b_N = \bar{b}_0, \quad a_N = \bar{a}_0. \end{aligned}$$

Конвективные слагаемые аппроксимируются с использованием монотонных разностей первого порядка. Например,

$$q_{i+1/2} = \begin{cases} q_{i+1}, & \text{если } v_i > 0, \\ q_i, & \text{если } v_i \leq 0, \end{cases} \quad q_{i-1/2} = \begin{cases} q_i & \text{если } v_i > 0, \\ q_{i+1} & \text{если } v_i \leq 0. \end{cases}$$

Следует заметить, что уравнение (25) решается от 0 до  $y_\infty$  и требует задания граничного условия только при  $y = 0$ . Уравнения для определения  $a$ ,  $b$ ,  $c$  решаются от  $y_\infty$  до  $y = 0$ . Значения компонент тензора избыточных напряжений  $a(0, t)$ ,  $b(0, t)$ ,  $c(0, t)$  определяются в процессе решения.

### 2.1. Тест сходимости при измельчении сетки

При возрастании  $W_i$  толщина пограничного слоя на стенке уменьшается как для компонент тензора напряжения, так и для вектора скорости. В приграничной области необходимо использовать достаточно мелкую пространственную сетку.

В табл. 1 приведены значения компонент тензора напряжения  $b(0)$ ,  $a(0)$  на твёрдой стенке для трёх чисел Вейсенберга  $W_i = 0,01$ ;  $0,1$ ;  $1,0$ , полученные в расчётах на последовательности измельчающихся сеток. Рассматривалось течение, возникающее из состояния покоя с заданным градиентом давления  $\phi(t) = 1$ . Во всех случаях выбиралась достаточно большая область  $y_N = 10$ . Данные, приведённые в таблице, демонстрируют сходимость численного решения. При малом числе Вейсенберга  $W_i = 0,01$  и  $h = 0,003125$  значения  $b(0)$  на твёрдой стенке хорошо соответствуют случаю вязкой несжимаемой жидкости (см., например, [13]). Необходимо отметить, что достоверные результаты для чисел Вейсенберга в таблице получаются при величине шага по пространству порядка 0,005. Для более больших значений  $W_i$  необходимо использовать более подробную сетку или применять схемы высокого порядка аппроксимации.

## 3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТОВ

В данном разделе для различных чисел Вейсенберга приведены результаты расчётов, которые демонстрируют структуру течения в зависимости от начальных данных и от зависимости градиента давления от времени.

Таблица 1

Эффект измельчения сетки на величины  $b(0), a(0)$ 

$W_i$		$h = 0,1$	$h = 0,05$	$h = 0,025$	$h = 0,0125$	$h = 0,00625$	$h = 0,003125$
0,01	$b(0)$	1,1870	1,2105	1,2222	1,2281	1,2311	1,2325
	$a(0) \cdot 10^2$	1,4088	1,4653	1,4938	1,5082	1,5154	1,5190
0,1	$b(0)$	1,1864	1,2159	1,2311	1,2399	1,2426	1,2446
	$a(0) \cdot 10^1$	1,4075	1,4784	1,5155	1,5345	1,5441	1,5490
1,0	$b(0)$	1,1807	1,2658	1,3210	1,3533	1,3709	1,3802
	$a(0)$	1,3933	1,6013	1,7439	1,8301	1,8780	1,9034

### 3.1. Стационарное течение

Рассмотрим течение, вызванное градиентом давления  $p_x = x\phi(t)$  с постоянной функцией  $\phi(t) = 1,0$ . В этом случае стационарное решение существует при начальных данных без зон противотока  $q_0(y) > 0, 0 < y < Y_\infty$ . В пределе при  $t \rightarrow \infty$  решение выходит на стационарный режим, который зависит от числа Вайсенберга  $W_i$ . На рис. 1 приведены профили скорости и компонент тензора напряжений в случае стационарного режима течения (для чисел Вайсенберга  $W_i = 0,1, 1,0, 5,0$ ), которое возникает из состояния покоя (начальные данные для всех величин выбирались нулевыми  $\phi(t) = 1,0, q_0(y) = 0,0$ ). Время, необходимое для достижения стационарных значений, существенно увеличивается с возрастанием  $W_i$ . Наиболее медленно выходят на стационар компоненты тензора напряжений.

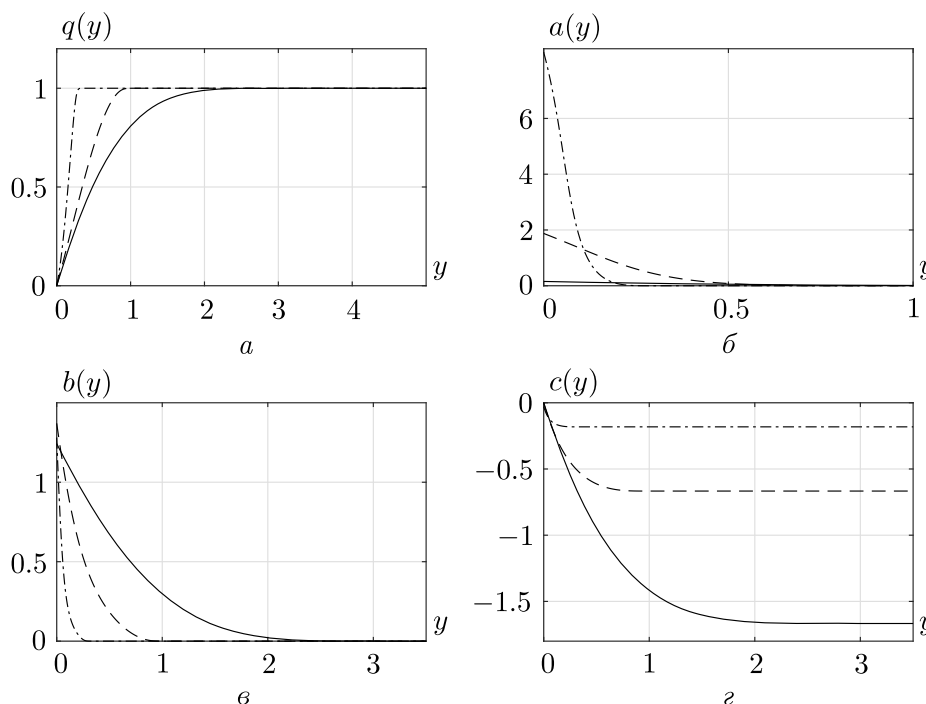


Рис. 1. Зависимости характеристик течения от числа Вайсенберга:  
 $W_i = 0,1$  (сплошная линия),  $W_i = 1,0$  (пунктирная линия),  
 $W_i = 5,0$  (штрих-пунктирная линия)

Толщина пограничного слоя (ТПС), определяется приближённо из условия стремления к асимптотическим значениям  $q(y, t) = 0,99$  при  $y \rightarrow \infty$ . Численные значения ТПС для нескольких чисел Вайсенберга приведены во второй строке табл. 2. Во второй колонке показаны значения, соответствующие течению вязкой несжимаемой жидкости [13].

Компоненты тензора избыточных напряжений  $a, b$  концентрируются около твёрдой стенки. Значение напряжения сдвига  $\tau_{xy} = xb(0) = xk\sqrt{\rho\mu k}\hat{b}(0)$  на твёрдой стенке линейно зависит от  $b(0)$ . Третья строка табл. 2 демонстрирует значения  $\hat{b}(0)$  для различных чисел Вайсенберга  $W_i = 0,01; 0,1; 0,49, 1,0; 5,0; 10,0$ . Большим значениям  $b(0)$  соответствует большее значение сдвигового напряжения. Для небольших значений  $W_i$  значения  $\hat{b}(0)$  близки соответствующим значениям в случае вязкой жидкости [13], которые приведены во второй колонке таблицы.

Таблица 2

Толщина пограничного слоя при  $q(y) \approx 0,99$ . Сдвиговое напряжение на твёрдой стенке  $y = 0$  пропорционально  $\hat{b}(0)$ .

$W_i$	0 [13]	0,01	0,1	0,49	1,00	5,0	10,0
ТПС	2,4	2,195	1,910	1,225	0,825	0,285	0,170
$b(0)$	1,2326	1,2325	1,2446	1,2918	1,3802	1,7144	1,8630

### 3.2. Нестационарные течения с зоной противотока в начальный момент

Далее рассмотрим случай когда в начальный момент времени имеется зона противотока (т. е. когда течение вдоль стенки направлено к критической точке). Такая ситуация наблюдается, например, в задней критической точке при обтекании цилиндра. В классической задаче Хименца (вязкая жидкость) стационарное течение с зоной противотока не допускается. Однако можно рассматривать нестационарные режимы течения [11]. Следуя этой работе, рассмотрим течение с «умеренной» зоной противотока в начальных данных  $q_0(y) = 1 - (y + 1)/(y^4 + 1)$ . На рис. 2 приведены графики  $q(y, t)$ ,  $a(y, t)$ ,  $b(y, t)$ ,  $c(y, t)$  для нескольких моментов времени, соответствующих нескольким значениям  $W_i$ . Сплошные линии соответствует  $W_i = 0,1$ , пунктирные линии демонстрирует результаты для  $W_i = 1,0$ , штрих-пунктирные линии изображают расчёты при  $W_i = 5,0$ . Точечная линия на рис. 2,  $a$  показывает начальное распределение  $q_0(y)$ . В случае «благоприятного» ( $\phi(t) > 0$ ) градиента давления  $\phi(t) = 1$  зона противотока исчезает за конечный интервал времени и в пределе при  $t \rightarrow \infty$  все неизвестные функции достигают стационарного режима. Стационарные решения соответствуют значениям, приведённым в предыдущем разделе на рис. 1.

На рис. 2,  $a$  цифрами 1, 2, 3 отмечены кривые, соответствующие моментам времени  $t = 10^{-5}$ ,  $t = 0,2$ ,  $t = 1,0$ . Из данных на этом рисунке видно, что при числе  $W_i = 0,1$  профиль скорости практически достиг стационарного решения к моменту времени  $t = 1,0$ . Профили скорости для  $W_i = 1,0; 5,0$  «помнят» о зоне противотока в начальный момент времени. В качестве ещё одной особенности в приведённых решениях надо отметить, что для  $W_i = 1,0; 5,0$  в момент времени  $t = 0,2$  течение в окрестности стенки направлено в противоположную сторону от критической точки, т. е. вдоль стенки возникает течение в направлении от критической точки, зона противотока отодвигается от стенки и одновременно уменьшается максимум скорости в зоне противотока. На рис. 2,  $b, в, г$  изображены профили компонент тензора напряжения для момента времени  $t = 1,0$ . Сплошные, пунктирные и штрих-пунктирные линии соответствуют числам Вайсенберга, равным  $W_i = 0,1; 1,0; 5,0$ . Как и ожидалось, при небольшом значении  $W_i = 0,1$  профили компонент тензора напряжения быстрее приближаются к стационарным значениям, чем профили, соответствующие большим значениям числа Вайсенберга. Зона противотока исчезает за конечный промежуток времени.

Рассмотрим течение с «умеренной» зоной противотока  $q_0(y) = 1 - (y + 1)/(y^4 + 1)$  в случае «неблагоприятного» градиента давления  $\phi(t) = \alpha/(t + 1)^2$ ,  $\alpha < 0$ . На рис. 3 изображены графики функции  $q(y, t)$  при  $\alpha < 0$ . Когда  $\alpha = -0,3$ , зона возвратного течения исчезает за конечный промежуток времени. При  $t \rightarrow \infty$  течение стремится к покою.

При  $\alpha = -1,0$  зона возвратного течения не исчезает и с ростом времени решение разрушается.



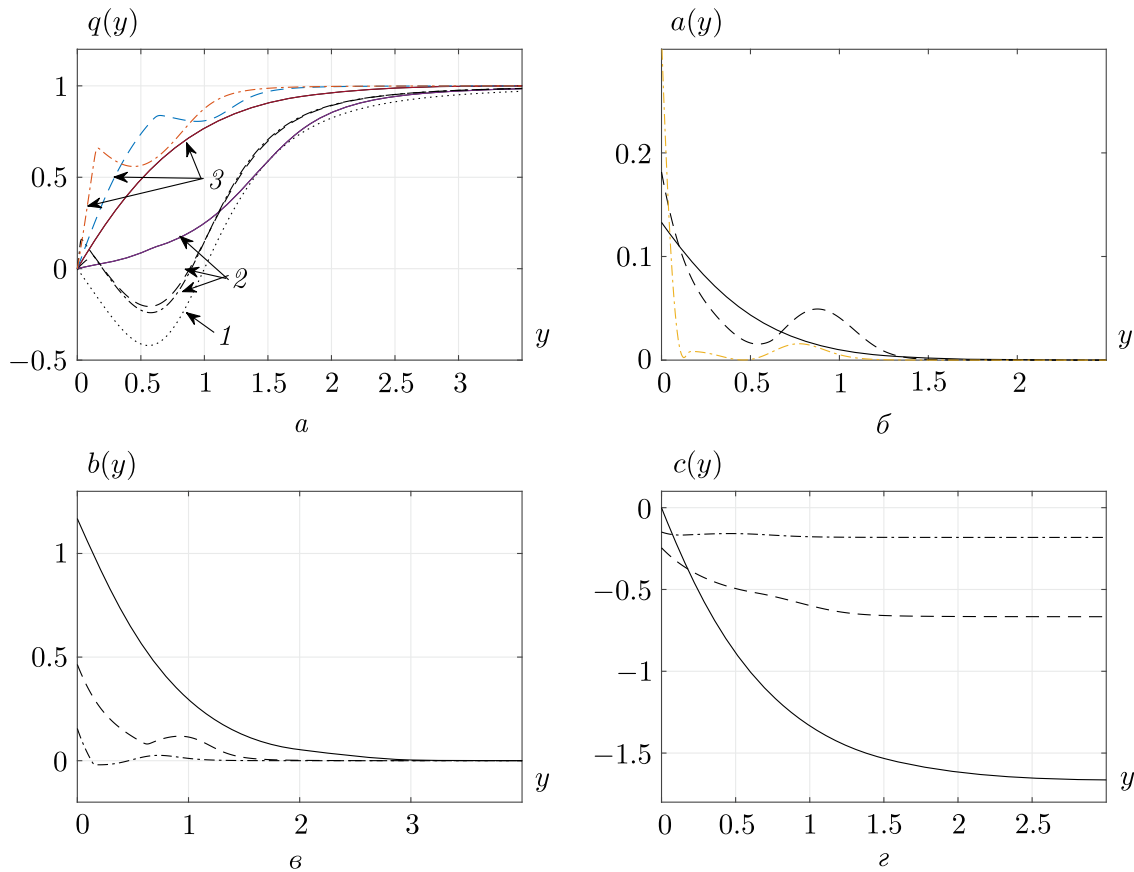


Рис. 2. Профили функций  $q(y)$ ,  $a(y)$ ,  $b(y)$ ,  $c(y)$  при  $\phi(t) = 1$ ,  $q_0(y) = 1 - (y + 1)/(y^4 + 1)$ , соответствующих  $W_i = 0,1$  (сплошные линии),  $W_i = 1,0$  (пунктирные линии),  $W_i = 5,0$  (штрих-пунктирные линии). Точечная линия на (a) показывает начальное распределение  $q_0(y)$ . Цифры 1, 2, 3 соответствуют моментам времени  $t = 10^{-5}$ ,  $t = 0,2$ ,  $t = 1,0$

Следует отметить, что решение может разрушаться и вследствие начальных данных. Так, в работе [11] показано, что если начальные данные заданы в виде  $q_0(y) = 1,0 - e^{y-0,25y^2}$ , то зона противотока в вязком течении не исчезает с ростом времени и решение разрушается при положительном градиенте давления  $\phi(t) = 1,0$ . На рис. 4 приведены профили функции  $q(y, t)$  для нескольких моментов времени  $t = 0,4; 0,6; 0,8; 1,0; 10,0$ , числа Вайсенберга  $W_i = 0,1$  и начальных данных, заданных в виде  $q_0(y) = 1,0 - e^{y-0,25y^2}$ . Расчёты, проведённые в настоящей работе, показали, что если градиент давления убывает со временем по закону  $\phi(t) = 2/(t+1)^2$ , то решение разрушается за конечный интервал времени (см. рис. 4, a), и если  $\phi(t) = 4/(t+1)^2$ , то решение не разрушается и стремится к состоянию покоя при  $t \rightarrow \infty$  (см. рис. 4, б).

Анализ проведённых расчётов демонстрирует, что обрушение решения зависит от комбинации двух факторов: 1) градиента давления  $p_x = -x\phi(t)$ , т. е. от выбора функции  $\phi(t)$ ; 2) задаваемого профиля начальной скорости  $q_0(y)$ .

По-видимому, частично обрушение решения связано с решением краевой задачи для уравнения Риккати. Например, решение уравнения Риккати (20) с  $\phi(t) = \alpha/(t+1)^2$  и  $a(t) \equiv 0$  разрушается при  $\alpha < -0,3$ , на интервале  $-0,3 < \alpha < 1,0$  монотонно убывает и стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . При  $1,0 < \alpha$  решение немонотонно, возрастает на начальном интервале времени, достигает некоторого максимального значения и далее монотонно стремится к нулю. Решение с начальными данными  $q_0(y) = 1,0 - e^{y-0,25y^2}$  при  $W_i = 0,1$  разрушается при  $\phi(t) = 2/(t+1)^2$ , а при  $\phi(t) = 4/(t+1)^2$  зона противотока исчезает и решение стремится к нулю.

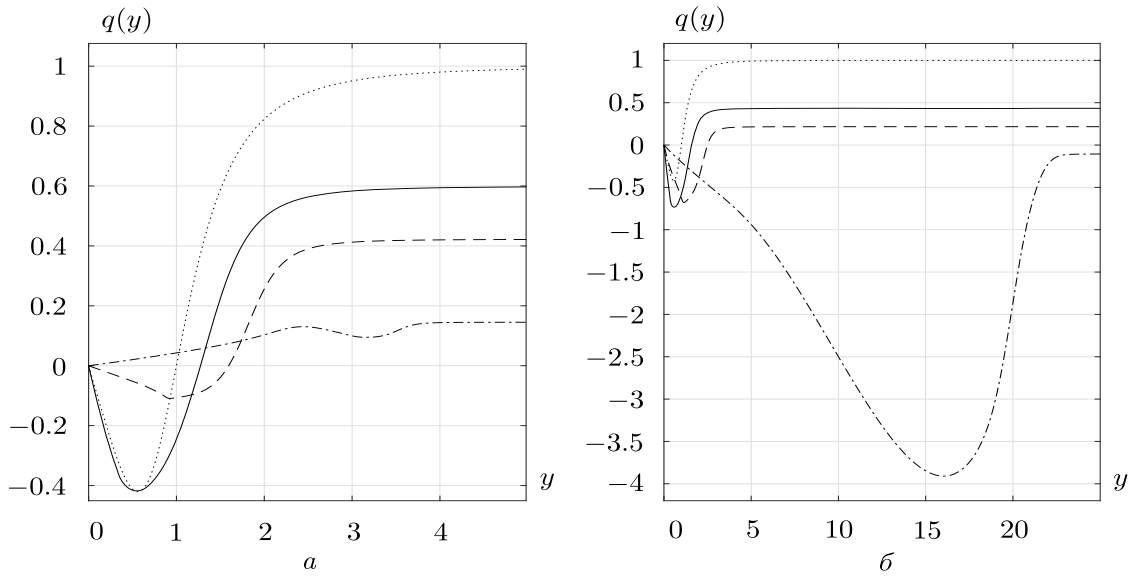


Рис. 3. График зависимости  $q(y, t)$  для двух значений: (а)  $\alpha = -0,3$ , (б)  $\alpha = -1,0$ ; числа Вейсенберга  $W_i = 1,0$ ;  $q_0(y) = 1 - (y + 1)/(y^4 + 1)$ ,  $\phi(t) = \alpha/(t + 1)^2$  в моменты времени  $t = 0$  (точечная линия),  $t = 0,5$  (сплошная линия),  $t = 1,0$  (пунктирная линия),  $t = 4,0$  (штрих-пунктирная линия)

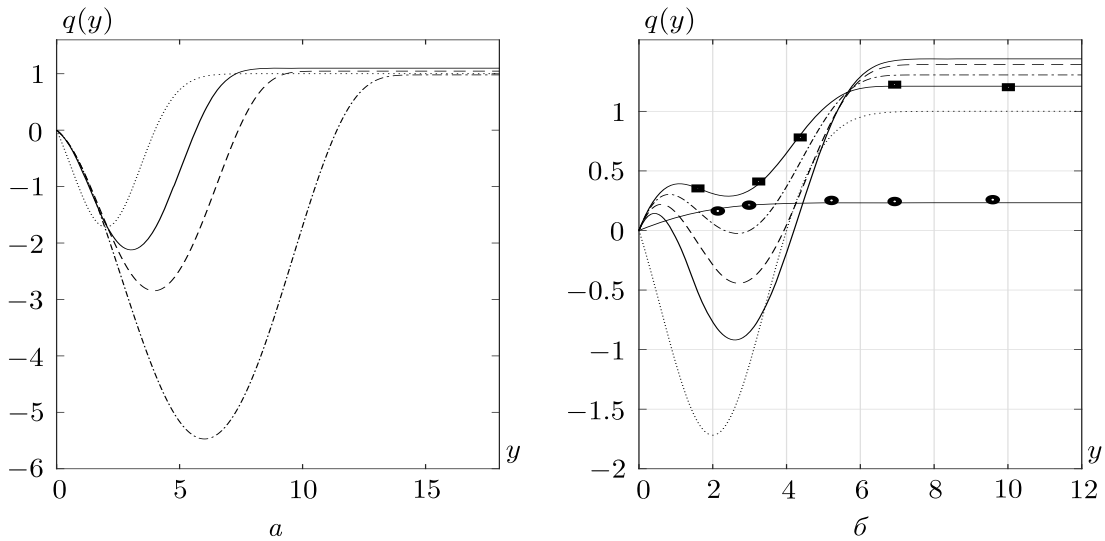


Рис. 4. Решения с начальными данными: (а)  $q_0(y) = 1,0 - e^{y-0,25y^2}$ ,  $\phi(t) = 2/(t + 1)^2$ , (б)  $\phi(t) = 4/(t + 1)^2$  при  $W_i = 0,1$  в моменты времени:  $t = 0$  (точечная линия),  $t = 0,4$  (сплошная линия),  $t = 0,6$  (пунктирная линия),  $t = 0,8$  (штрих-пунктирная линия),  $t = 1,0$  (сплошная линия с квадратиками),  $t = 10,0$  (сплошная линия с кружочками)

### 3.3. Натекание потока на покоящийся слой жидкости (слабый разрыв в начальных данных)

Рассмотрим течение, в котором в начальный момент времени равномерный поток вязкоупругой жидкости натекает на горизонтальный слой жидкости конечной толщины с теми же самыми физическими свойствами, покоящийся на твёрдой неподвижной стенке. Начальные

данные  $q_0(y)$  терпят слабый разрыв при  $y = 2$  и заданы следующим образом:

$$q_0(y) = \begin{cases} 0,0 & \text{при } y \leq 2, \\ 1 - e^{-(y-2)^2} & \text{при } y > 2. \end{cases} \quad (29)$$

На рис. 5 приведены графики функций  $q(y, t)$ ,  $a(y, t)$ ,  $b(y, t)$ ,  $c(y, t)$  для нескольких моментов времени на начальном этапе развития течения перед выходом на стационарный режим, соответствующий течениям, показанным на рис. 1.

Расчёты выполнены при числе Вайсенберга  $W_i = 0,1$  и постоянном градиенте давления  $\phi(t) = 1$ . Следует отметить наличие зон постоянных значений  $q(y, t)$ ,  $c(y, t)$  и нулевых значений компонент напряжений  $a(y, t)$  и  $b(y, t)$ . При  $t = 0,2$  (сплошные линии) зоны постоянных и нулевых значений расположены в интервале  $y_1 \leq y \leq y_2$  и они отделены от твёрдой границы,  $y_1 > 0$ .

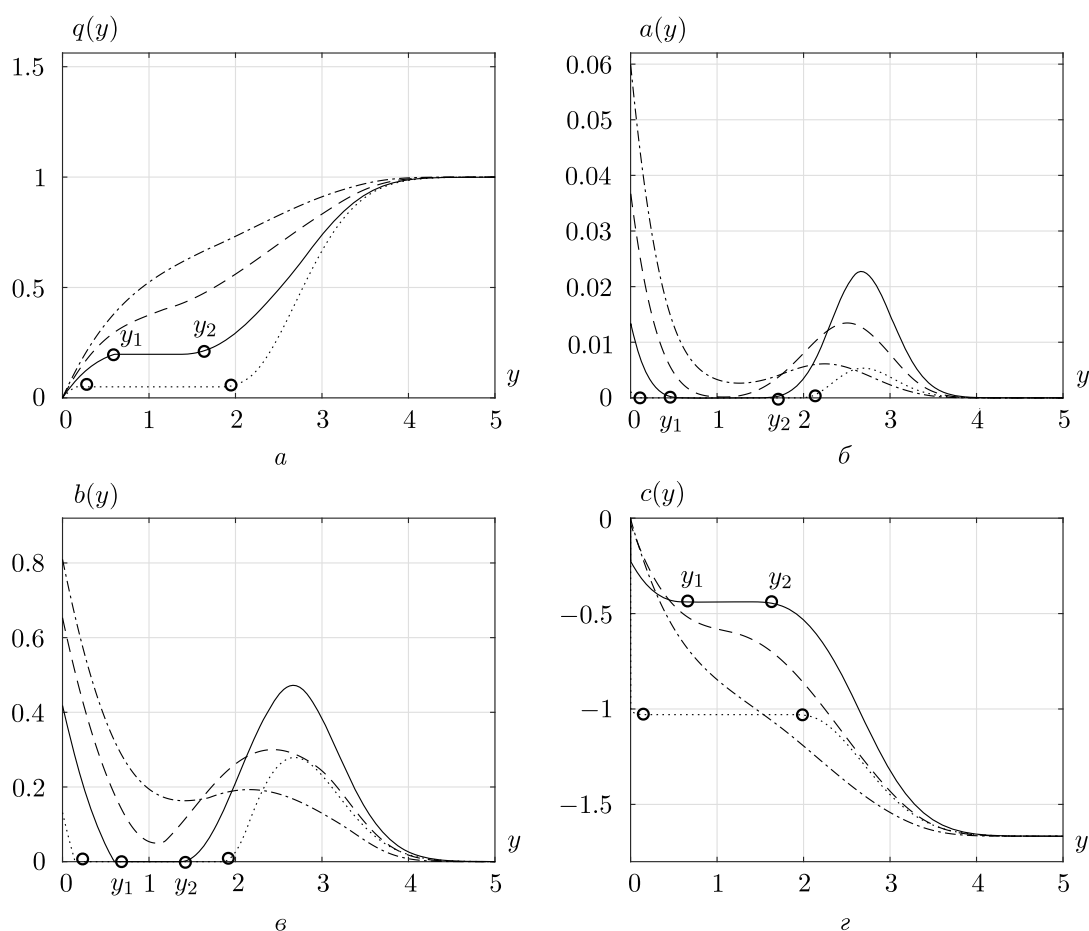


Рис. 5. Натекание потока на неподвижный слой конечной толщины, где  $q_0(y)$  задано уравнением (29), при  $W_i = 0,1$ ,  $\phi(t) = 1$  в моменты времени  $t = 0,05$  (точечная линия),  $t = 0,2$  (сплошная линия),  $t = 0,4$  (пунктирная линия),  $t = 0,6$  (штрих-пунктирная линия)

Компоненты напряжений  $a(0, t)$  и  $b(0, t)$  на твёрдой стенке монотонно возрастают с ростом времени и в пределе достигают стационарных значений. Профиль функции  $c(y, t)$  изображён на рис. 5, г. С ростом времени значение  $c(0, t)$  на твёрдой стеки стремится к нулю. Зоны постоянного значения этой функции находятся на интервале  $y_1 \leq y \leq y_2$ . Зоны постоянных и нулевых значений исчезают за конечный промежуток времени, величина которого возрастает

с увеличением числа Вайсенберга. Зоны постоянных значений отделены от твёрдой границы,  $y = 0$ .

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрено нестационарное течение вязкоупругой жидкости Максвелла около критической точки на твёрдой поверхности. Результаты численных расчётов получены для различных чисел Вайнсберга и для начальных данных, содержащих зону противотока или слой неподвижной среды.

Решение начально-краевой задачи может разрушаться за конечный промежуток времени как по причине формы начальных данных, так и по причине специально подобранной зависимости градиента давления от времени.

Рассмотрена задача со слабым разрывом начальных данных, когда на слой покоящейся среды натекает поток вязкоупругой жидкости. На начальном этапе развития течения обнаружены зоны со стационарными значениями компонент тензора напряжений. Исчезновения таких зон происходит за конечный промежуток времени.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Hiemenz K.* Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszyylinder // *Dingler's Polytechnic J.* 1911. V. 326. P. 321–410.
2. *Kolomenskiy D., Moffatt H.K.* Similarity solutions for unsteady stagnation point flow // *J. Fluid Mech.* 2012. V. 711. P. 394–410.
3. *Фроловская О.А.* Автомодельное нестационарное течение вязкой жидкости вблизи критической точки // *Прикл. механика и техн. физика.* 2016. Т. 57, № 3. С. 3–8.
4. *Sharma S.K.* Flow of a visco-elastic liquid near a stagnation point // *J. Phys. Soc. Japan.* 1959. V. 14, N 10. P. 1421–1425.
5. *Phan-Thien N.* Plane and axi-symmetric stagnation flow of a Maxwellian fluid // *Rheol. Acta.* 1983. V. 22. P. 127–130.
6. *Kayvan Sadeghy, Hadi Hajibeygib, Seyed-Mohammad Taghavia.* Stagnation-point flow of upper-convected Maxwell fluids // *Int. J. Non-Linear Mech.* 2006. V. 41. P. 1242–1247.
7. *Paullet J.E.* Analysis of stagnation point flow of an upper-convected Maxwell fluid // *Electron. J. Differ. Equ.* 2017. V. 2017, N 302. P. 1–14.
8. *Meleshko S.V., Moshkin N.P., Pukhnachev V.V.* On exact analytical solutions of equations of Maxwell incompressible viscoelastic medium // *Int. J. Non-Linear. Mech.* 2018. V. 105. P. 152–157.
9. *Astarita G., Marrucci G.* Principles of Non-Newtonian Fluid Mechanics. McGraw-Hill, 1974.
10. *Moshkin N.P., Pukhnachev V.V., Bozhkov Yu.D.* On the unsteady, stagnation point flow of a Maxwell fluid in 2D // *Int. J. Non-Linear Mech.* 2019. V. 116. P. 32–38.
11. *Petrova A.G., Pukhnachev V.V., Frolovskaya O.A.* Analytical and numerical investigation of unsteady flow near a critical point // *J. Appl. Math. Mech.* 2016. V. 80, N 3. P. 215–224.
12. *Егоров А.И.* Уравнения Риккати. М.: Физматлит, 2001.
13. *Serth R.W.* Solution of a viscoelastic boundary layer equation by orthogonal collocation // *J. Engrg. Math.* 1974. V. 8. P. 89–92.
14. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Физматгиз, 1962.

UDC 532.135:532.5.013.2

**UNSTEADY FLOW OF MAXWELL VISCOELASTIC FLUID NEAR  
A CRITICAL POINT WITH COUNTERCURRENT AT THE INITIAL  
MOMENT**© 2022 N. P. Moshkin<sup>1,2</sup><sup>1</sup>*Lavrent'ev Institute of Hydrodynamics,  
pr. Akad. Lavrentyeva 15, Novosibirsk 630090, Russia,*<sup>2</sup>*Novosibirsk State University,  
ul. Pirogova 1, Novosibirsk 630090, Russia*

E-mail: nikolay.moshkin@gmail.com

Received 07.07.2021, revised 07.07.2021, accepted 13.01.2022

**Abstract.** Two-dimensional unsteady stagnation-point flow of viscoelastic fluids is studied assuming that the fluid obeys the upper-convected Maxwell (UCM) model. The solutions of governing equations are found in assumptions that components of extra stress tensor are polynomials of spatial variable along solid wall. A class of solutions for unsteady flow in the neighbourhood of a front or rear stagnation point on a plane boundary is considered, and a range of possible behaviour is revealed, depending on an initial stage (initial data) and on whether the pressure gradient is accelerating or decelerating function of time. The velocity and stress tensor's components profiles are obtained by numerical integration the system of nonlinear ordinary differential equation. The solutions of equations exhibit finite-time singularities depending on the initial data and the type of pressure gradient dependence on time.

**Keywords:** unsteady critical point flow, Maxwell viscoelastic media, upper convective derivative, blow-up solution, Riccati equation.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.107

## REFERENCES

1. Hiemenz K. Die Grenzschicht an einem in den gleichformigen Flussigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszyylinder. *Dingler's Polytechnic J.*, 1911, Vol. 326, pp. 321–410.
2. Kolomenskiy D., Moffatt H.K. Similarity solutions for unsteady stagnation point flow. *J. Fluid Mech.*, 2012, Vol. 711, pp. 394–410.
3. Frolovskaya O.A. Unsteady self-similar viscous flow near a stagnation point. *J. Appl. Math. Mech.*, 2016, Vol. 57, No. 3, pp. 391–395.
4. Sharma S.K. Flow of a visco-elastic liquid near a stagnation point. *J. Phys. Soc. Japan*, 1959, Vol. 14, No. 10, pp. 1421–1425.
5. Phan-Thien N. Plane and axi-symmetric stagnation flow of a Maxwellian fluid. *Rheol. Acta*, 1983. Vol. 22, pp. 127–130.
6. Kayvan Sadeghy, Hadi Hajibeygib, Seyed-Mohammad Taghavia. Stagnation-point flow of upper-convected Maxwell fluids. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2006, Vol. 41, pp. 1242–1247.
7. Paullet J.E. Analysis of stagnation point flow of an upper-convected Maxwell fluid. *Electron. J. Differ. Equ.*, 2017, Vol. 2017, No. 302, pp. 1–14.
8. Meleshko S.V., Moshkin N.P., Pukhnachev V.V. On exact analytical solutions of equations of Maxwell incompressible viscoelastic medium. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2018, Vol. 105, pp. 152–157.

9. Astarita G., Marrucci G. Principles of Non-Newtonian Fluid Mechanics. McGraw-Hill, 1974.
10. Moshkin N.P., Pukhnachev V.V., Bozhkov Yu.D. On the unsteady, stagnation point flow of a Maxwell fluid in  $2D$  // *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2019. V. 116. P. 32–38.
11. Petrova A.G. , Pukhnachev V.V., Frolovskaya O.A. Analytical and numerical investigation of unsteady flow near a critical point. *J. Appl. Math. Mech.*, 2016, Vol. 80, No. 3, pp. 215–224.
12. Егоров А.И. Riccati equations. M.: Fizmatlit, 2001 (in Russian).
13. Serth R.W. Solution of a viscoelastic boundary layer equation by orthogonal collocation. *J. Engrg. Math.*, 1974, Vol. 8, pp. 89–92.
14. Schlichting H. Boundary-Layer Theory. N. Y.: McGraw–Hill, 1960.