СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

Журнал основан в 1998 году
Выходит 4 раза в год

Том 25, № 1(89)

Январь – март, 2022 г.

СОДЕРЖАНИЕ

НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ. 2022. Т. 25, № 1. С. 105–120

УДК 539.3:517.97

РАВНОВЕСИЕ ТРЁХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ С ТРЕЩИНОЙ

© 2022 **Е. В. Пяткина**

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
просп. Акад. Лаврентьева, 15, г. Новосибирск 630090, Россия

E-mail: dusya_pyatkina@mail.ru

Поступила в редакцию 22.07.2021 г.; после доработки 23.09.2021 г.;
принята к публикации 21.10.2021 г.

Рассмотрена задача равновесия трёхслойной пластины, жёстко закреплённой на внешней границе и содержащей сквозную вертикальную трещину. Трёхслойная пластина состоит из двух несущих слоёв, которые моделируются пластинами Кирхгофа — Лява, и слоя мягкого заполнителя между ними. На берегах трещины в несущих слоях заданы условия непроникания. Рассмотрен предельный переход, когда толщина мягкого слоя стремится к нулю, а его приведённая жёсткость к бесконечности. Для исходной и предельной задач показана однозначная разрешимость, приведены вариационная и дифференциальная постановки.

Ключевые слова: пластина Кирхгофа — Лява, трёхслойная пластина, трещина с условием непроникания.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.108

ВВЕДЕНИЕ

В работе исследована разрешимость задачи равновесия трёхслойной пластины, содержащей вертикальную сквозную трещину. Использована модель трёхслойной упругой пластины, состоящей из двух несущих слоёв и мягкого слоя между ними, предложенная в [1]. Пластина состоит из двух несущих слоёв, которые трактуются как анизотропные упругие пластины, подчиняющиеся гипотезе Кирхгофа — Лява, и слоя пониженной жёсткости между ними, который называется заполнителем. Несущие слои и слой заполнителя однородны по толщине. Поперечным деформированием мягкого слоя пренебрегаем. На берегах трещины в несущих слоях задаются условия непроникания. Для этой задачи показана однозначная разрешимость, приведены вариационная и дифференциальная постановки и доказана их эквивалентность. Рассмотрен предельный переход, когда толщина слоя заполнителя стремится к нулю и его приведённая жёсткость одновременно стремится к бесконечности. Предельная задача является задачей равновесия двухслойной пластины Кирхгофа — Лява, содержащей сквозную вертикальную трещину, на берегах которой выполняются условия непроникания. В этом случае также показана однозначная разрешимость задачи равновесия; из вариационной постановки выведена дифференциальная.

В работах [2–5] предложены разные варианты теории малых прогибов слоистых оболочек, состоящих из двух несущих слоёв и слоя заполнителя между ними. В [2] несущие слои являются мембранами, в [3, 4] — пластинами Киргофа — Лява, в [5] построен вариант теории упругих многослойных анизотропных оболочек, где использована обобщённая гипотеза ломаной линии. В [6] предложена модель трёхслойной пластины с лёгким упругим заполнителем, которая сводит расчёт таких пластин к расчёту тонких однородных оболочек с некоторыми обобщёнными приведёнными характеристиками. Этот метод даёт достаточно надёжные результаты для

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-29-10007).

трёхслойных оболочек с жёсткими заполнителями и трёхслойных оболочек с очень тонкими несущими слоями. В [7] выведены уравнения равновесия упругой многослойной пластины из уравнений общей трёхмерной теории упругости путём введения асимптотических разложений по малому параметру, в [8] получено соответствующее вариационное уравнение. Этот метод позволяет найти распределения всех шести компонент тензора напряжений. В работе [9] предложены три условия, которым должна удовлетворять внутренне непротиворечивая теория многослойной оболочки. Вывод дифференциальных уравнений и граничных условий задачи равновесия двух упругих пластин, где на контактной поверхности заданы упругоподатливые связи сдвига и поперечные связи, приведён в [10].

Разрешимость задач равновесия упругих тел и пластин, содержащих трещину, аналитически рассматривалась, в частности, в [11–16]. Особенностью указанных работ является использование условия непроникания в виде неравенства на берегах трещин. В работе [17] аналитически и численно исследуется равновесие двухслойного упругого тела, содержащего сквозную трещину.

Плоская задача о равновесии двух упругих полупространств, скреплённых с упругим изотропным слоем между ними, рассмотрена в [18], где авторы сводят исходную задачу к задаче контакта двух полупрострасть. Всего найдено семь возможных типов граничных условий, выбор которых зависит от упругих свойств тонкого слоя. В [19] показана однозначная разрешимость задачи равновесия двумерного упругого тела с дефектом, найдено выражение для производной функционала энергии по длине в вершине дефекта. В [20, 21] рассмотрены задачи равновесия двухслойных тел, где в одном из слоёв содержится дефект, а также исследованы некоторые предельные случаи. Задача склейки двух упругих пластин вдоль части их внешних боковых границ тонким упругим слоем рассмотрена в [22, 23]. В этих работах строго обосновано сведение исходной задачи к задаче равновесия двух упругих пластин и показано, что условия на отрезке контакта двух пластин зависят от упругих свойств клеящего слоя.

1. РАВНОВЕСИЕ ТРЁХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ, СОДЕРЖАЩЕЙ ТРЕЩИНУ

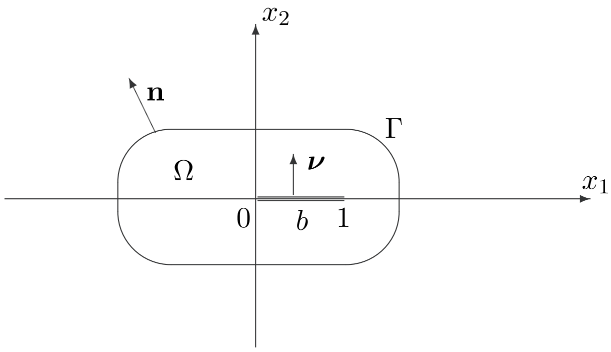
Рассмотрим пластину, состоящую из трёх скреплённых между собой упругих слоёв и содержащую прямолинейную вертикальную трещину. Крайние слои называются несущими, каждый из них имеет толщину $h/2$. Мягкий слой толщины 2δ между несущими слоями назовём заполнителем. Предполагается, что слой заполнителя изотропный и однородный по толщине.

Пусть слоистая пластина имеет форму прямого цилиндра высотой $h + 2\delta$ с основанием Ω в плоскости Ox_1x_2, т. е. Ω — область, занимаемая срединной плоскостью каждого из слоёв. Внешнюю границу этой области обозначим через Γ. Оси Ox_1 и Ox_2 направлены так, что прямолинейный интервал, моделирующий разрез, является единичным отрезком на оси абсцисс $b = (0, 1) \times \{0\}$ и полностью содержится в Ω. Через $\bar{b} = [0, 1] \times \{0\}$ обозначено замыкание b. Единичный вектор $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2)$ нормали к b в плоскости Ox_1x_2 направлен в сторону положительных значений x_2 (см. рисунок). Положим $\Omega_b = \Omega \setminus \bar{b}$. Направим ось Oz по нормали к слоям.

Напряжённо-деформированное состояние несущего слоя полностью определено, если известны горизонтальные $v^I = \left(v_1^I, v_2^I\right)$ и нормальные w перемещения точек, принадлежащих срединной поверхности I-го слоя. Здесь и далее в работе индекс I принимает значения 1 и 2, величины с индексом $I = 1$ относятся к нижнему несущему слою, а с $I = 2$ — к верхнему. Перемещения произвольных точек в нижнем и верхнем несущих слоях определяются соответственно по формулам

$$v^{z1}(x, z) = v^1(x) - (z + h/4 + \delta)\nabla w(x), \quad w^{z1} = w(x), \quad x \in \Omega_b, \quad z \in (-h/2 - \delta, -\delta), \qquad (1)$$

$$v^{z2}(x, z) = v^2(x) - (z - h/4 - \delta)\nabla w(x), \quad w^{z2} = w(x), \quad x \in \Omega_b, \quad z \in (\delta, h/2 + \delta), \qquad (2)$$



Область Ω_b

здесь $x = (x_1, x_2)$.

Компоненты тензора деформаций определяются через перемещения v^I по формуле $\varepsilon_{ij}(v^I) = \left(v^I_{i,j} + v^I_{j,i}\right)/2$, $i, j = 1, 2$. Компоненты тензоров напряжений $\sigma^I(v^I) = \left\{\sigma^I_{ij}(v^I)\right\}$ и деформаций $\varepsilon(v^I) = \{\varepsilon_{ij}(v^I)\}$ связаны линейными законом Гука $\sigma^I(v^I) = A^I\varepsilon(v^I)$. В работе рассматривается случай анизотропных пластин, тензор $A^I = \left\{a^I_{ijkl}\right\}$, $i, j, k, l = 1, 2$, $a^I_{ijkl} \in L_\infty(\Omega)$, является симметричным и положительно определённым тензором модулей упругости. Через E_I и κ_I обозначены модуль Юнга и коэффициент Пуассона I-й пластины соответственно.

Используется следующее допущение для мягкого слоя: для всех компонент вектора перемещений выполняется линейный закон распределения по толщине

$$v^{z*}(x, z) = v^*(x) + z\xi(x), \quad w^{z*}(x) = w^*(x) + z\xi_3(x), \quad x \in \Omega_b, \quad z \in (-\delta, \delta), \tag{3}$$

где

$$v^* = \frac{1}{2}(v^2 + v^1), \quad \xi = \frac{1}{2\delta}\left(v^2 - v^1 + \frac{h}{2}\nabla w\right), \quad w^* = w, \tag{4}$$

а функция $\xi_3 = 0$, так как в рассматриваемой задаче вертикальные прогибы внешних слоёв одинаковы. Для упрощения формул примем, что заданные внешние силы $f^I = \left(f^I_1, f^I_2\right) \in L_2(\Omega)^2$, $F^I \in L_2(\Omega)$, $I = 1, 2$, приложены только к несущим слоям.

Сначала приведём вариационную постановку задачи равновесия. Для этого введём пространства

$$H^1_\Gamma(\Omega_b)^2 = \{u = (u_1, u_2) \in H^1(\Omega_b)^2 \mid u = 0 \text{ на } \Gamma\},$$
$$H^2_\Gamma(\Omega_b) = \left\{w \in H^2(\Omega_b) \mid w = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ на } \Gamma\right\}$$

и множество допустимых перемещений

$$K = \left\{(\bar{v}^1, \bar{v}^2, \overline{w}) \in H^1_\Gamma(\Omega_b)^2 \times H^1_\Gamma(\Omega_b)^2 \times H^2_\Gamma(\Omega_b) \middle|\ \left[\bar{v}^I_2\right] \geqslant \frac{h}{4}\mid[\overline{w}_{,2}]\mid \text{ на } b\right\}. \tag{5}$$

Здесь квадратные скобки означают скачок функции $[\cdot] = \cdot^+ - \cdot^-$ на b, а знаки $\pm$ соответствуют значениям функции на берегах $b^\pm$. Неравенства в определении K являются условиями непроникания на b в несущих слоях. Пусть $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $L_2(\Omega_b)$. Определим функционал потенциальной энергии по формуле

$$\Pi(\bar{v}^1, \bar{v}^2, \overline{w}) = \sum_{I=1}^{2}\left\{\frac{h}{4}(\sigma^I(\bar{v}^I), \varepsilon(\bar{v}^I)) + \frac{1}{2}B_I(\overline{w}, \overline{w}) - \frac{h}{2}(f^I, \bar{v}^I) - (F^I, \overline{w})\right\} + \frac{1}{2}\mu(\bar{g}, \bar{g}), \tag{6}$$

где $\bar{g} = \bar{v}^2 - \bar{v}^1 + c\nabla\overline{w}$, коэффициент $c = h/2 + 2\delta$ равен расстоянию между срединными плоскостями несущих слоёв. Последнее слагаемое в (6) является потенциальной энергией деформации мягкого слоя, для которого введена гипотеза о равномерном распределении касательных напряжений по всей толщине мягкого слоя [1, 3]. Погрешность этого допущения тем меньше, чем тоньше слой и ниже его упругие характеристики по сравнению с упругими характеристиками несущих слоёв. Для определения приведённой жёсткости $\mu > 0$ используется условие [1]

$$\frac{1}{\mu} = \int\limits_{-\delta}^{\delta} \frac{dz}{G(z)}, \tag{7}$$

где $G(z)$ — модуль сдвига в мягком слое.

В формуле (6) свёртка тензоров $\sigma^I_{ij}(\bar{v}^I)\varepsilon_{ij}(\bar{v}^I)$ обозначена через $\sigma^I(\bar{v}^I)\varepsilon(\bar{v}^I)$; по повторяющимся индексам здесь и далее проводится суммирование. Билинейные формы B_I задаются следующим образом:

$$B_I(w, \overline{w}) = -\int\limits_{\Omega_b} m^I_{ij}(w)\overline{w}_{,ij},$$

где элементы $m^I_{ij}(w)$, $i, j = 1, 2$, тензора моментов определяются по формуле

$$m^I_{ij}(w) = -\frac{2}{3}\left(\frac{h}{4}\right)^3 \sigma^I_{ij}(\nabla w).$$

Произведением двух векторов $f^I \bar{v}^I$ является сумма $f^I_i \bar{v}^I_i$.

Множество K является выпуклым и замкнутым и, следовательно, слабо замкнутым. Функционал $\Pi(v^1, v^2, w)$ слабо полунепрерывен снизу и коэрцитивен на K. Тогда [14, с. 30–32] решение задачи минимизации $\Pi(v^1, v^2, w)$ на K существует и удовлетворяет вариационному неравенству

$$(v^1, v^2, w) \in K, \tag{8}$$

$$\sum_{I=1}^{2} \left\{ \frac{h}{2}(\sigma^I(v^I), \varepsilon(\bar{v}^I - v^I)) + B_I(w, \overline{w} - w) - \frac{h}{2}(f^I, \bar{v}^I - v^I) - (F^I, \overline{w} - w) \right\} + \mu(g, \bar{g} - g) \geqslant 0$$
$$\text{для любых } (\bar{v}^1, \bar{v}^2, \overline{w}) \in K. \tag{9}$$

Поскольку Π — строго выпуклый функционал, то решение задачи (8), (9) единственно.

В этом случае имеем следующую краевую задачу относительно перемещений (v^1, v^2, w):

$$-\frac{h}{2}\operatorname{div}\sigma^1(v^1) = \frac{h}{2}f^1 + \mu g, \quad \sigma^1(v^1) = A^1\varepsilon(v^1) \text{ в } \Omega_b, \tag{10}$$

$$-\frac{h}{2}\operatorname{div}\sigma^2(v^2) = \frac{h}{2}f^2 - \mu g, \quad \sigma^2(v^2) = A^2\varepsilon(v^2) \text{ в } \Omega_b, \tag{11}$$

$$-m^1_{ij,ij}(w) - m^2_{ij,ij}(w) - F^1 - F^2 = -\mu c \operatorname{div} g \text{ в } \Omega_b, \tag{12}$$

$$v^I = 0, \quad w = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ на } \Gamma, \tag{13}$$

$$[v^I_2] \geqslant \frac{h}{4}|[w_{,2}]| \text{ на } b, \tag{14}$$

$$\left[\sigma^I_{22}(v^I)\right] = 0, \quad \sigma^I_{12}(v^I) = 0, \quad [m^1(w) + m^2(w)] = 0 \text{ на } b, \tag{15}$$

$$t^{1\pm}(w) + t^{2\pm}(w) - \mu\, c\, g^{\pm}_2 = 0 \text{ на } b, \tag{16}$$

$$|m^{1+}(w)+m^{2+}(w)| \leqslant -\frac{h^2}{8}\big(\sigma^1_{22}(v^1)+\sigma^2_{22}(v^2)\big) \text{ на } b, \tag{17}$$

$$\frac{h}{2}\big(\sigma^1_{22}(v^1)\big[v^1_2\big]+\sigma^2_{22}(v^2)\big[v^2_2\big]\big)+(m^{1+}(w)+m^{2+}(w))[w_{,2}]=0 \text{ на } b. \tag{18}$$

Дивиргенцией тензора напряжений σ^I является вектор $\sigma^I_{ij,j}$. Компоненты касательного вектора к некоторой кривой определяются через компоненты нормального вектора этой кривой по формуле $\boldsymbol{\tau}=(\tau_1,\tau_2)=(-\nu_2,\nu_1)$. Изгибающий момент и перерезывающая сила на кривой с нормалью ν и касательным вектором τ задаются формулами [14]

$$m^I(w)=-m^I_{ij}(w)\nu_j\nu_i, \quad t^I(w)=-m^I_{ij,k}(w)\tau_k\tau_j\nu_i-m^I_{ij,j}(w)\nu_i.$$

В условии (16) два первых слагаемых представляют собой перерезывающую силу в несущих слоях, в последнее слагаемое входят касательные напряжения, которые действуют в мягком связующем слое. Имеет место следующая

Теорема 1. *Предположим, что* $(v^1,v^2,w)\in K$ *и* $\operatorname{div}\sigma^I(v^I)\in L_2(\Omega_b)^2$, $m^I_{ij,ij}\in L_2(\Omega_b)$. *Тогда вариационная* (8), (9) *и дифференциальная* (10)–(18) *формулировки задачи равновесия эквивалентны.*

Доказательство. Покажем эквивалентность формулировок (8), (9) и (10)–(18) и выясним, в каком смысле выполняются соотношения дифференциальной постановки (10)–(18). Для этого воспользуемся результатами, изложенными в [12, 14]. Продолжим отрезок b до замкнутой кривой Σ класса $C^{1,1}$, принадлежащей Ω. Единичный вектор нормали ν определён на Σ таким образом, что на b эта нормаль совпадает с ранее выбранной. Введём пространства $H^{N-1/2}(\Sigma)$, где $N=1,2$, с нормой

$$\|\varphi\|^2_{H^{N-1/2}(\Sigma)}=\|\varphi\|^2_{H^{N-1}(\Sigma)}+\int\limits_\Sigma\int\limits_\Sigma\frac{|D^{N-1}\varphi(x)-D^{N-1}\varphi(y)|^2}{|x-y|^2}.$$

Имеют место включения $v^{I\pm}\in H^{1/2}(\Sigma)^2$, $w^\pm\in H^{3/2}(\Sigma)$, $\nabla w^\pm\in H^{1/2}(\Sigma)^2$. Также рассмотрим пространства $H^{N-1/2}_{00}(b)$, определённые следующим образом:

$$H^{N-1/2}_{00}(b)=\big\{\varphi\in H^{N-1/2}_0(b)\mid \rho^{-1/2}D^{N-1}\varphi\in L_2(b)\big\}$$

с нормой

$$\|\varphi\|^2_{H^{N-1/2}_{00}(b)}=\|\varphi\|^2_{H^{N-1}(b)}+\|\rho^{-1/2}D^{N-1}\varphi\|^2_{L_2(b)},$$

где ρ — расстояние от $x\in b$ до $\bar b\setminus b$. Будем использовать следующее свойство пространств $H^{N-1/2}_{00}(b)$. Пусть функция φ определена на b. Обозначим через $\overline{\varphi}$ продолжение её нулём на $\Sigma\setminus\bar b$. При этом $\overline{\varphi}\in H^{N/2}(\Sigma)$ тогда и только тогда, когда $\varphi\in H^{N/2}_{00}(b)$. Это значит, что $[v^I]\in H^{1/2}_{00}(b)^2$, $[w]\in H^{3/2}_{00}(b)$, $[\nabla w]\in H^{1/2}_{00}(b)^2$.

Обозначим через $H^{-N+1/2}(\Sigma)$ и $H^{-N+1/2}_{00}(\Sigma\setminus\bar b)$ пространства, сопряжённые к $H^{N-1/2}(\Sigma)$ и $H^{N-1/2}_{00}(\Sigma\setminus\bar b)$ соответственно. Пусть дальше угловые скобки $\langle\cdot,\cdot\rangle_{N-1/2,\Sigma}$ обозначают двойственность между пространствами $H^{N-1/2}(\Sigma)$ и $H^{-N+1/2}(\Sigma)$, а скобки $\langle\cdot,\cdot\rangle^{00}_{N-1/2,\Sigma\setminus\bar b}$ — двойственность между $H^{N-1/2}_{00}(\Sigma\setminus\bar b)$ и $H^{-N+1/2}_{00}(\Sigma\setminus\bar b)$.

Сначала выведем соотношения краевой задачи из вариационного неравенства. Чтобы получить уравнения равновесия, выберем в качестве тестовых функций $\bar v^I=v^I\pm\phi$, $\phi\in C^\infty_0(\Omega_b)^2$, $\overline{w}=w$. Тогда (10), (11) выполняются в смысле

$$\frac{h}{2}(\sigma^I(v^I),\varepsilon(\phi))-\frac{h}{2}(f^I,\phi)-((-1)^I\mu g,\phi)=0 \text{ для всех } \phi\in C^\infty_0(\Omega_b)^2. \tag{19}$$

Далее, пусть $\bar v^I = v^I$, $\overline{w} = w \pm \psi$, где $\psi \in C_0^\infty(\Omega_b)$. Отсюда

$$\sum_{I=1}^{2}\{B_I(w,\psi) - (F^I,\psi)\} + \mu c(g,\nabla\psi) = 0 \text{ для всех } \psi \in C_0^\infty(\Omega_b). \tag{20}$$

То есть (12) также выполняется в смысле обобщённых функций.

Применив формулу Грина к неравенству (9), с учётом (19), (20) получим

$$\sum_{I=1}^{2}\bigg\{ -\frac{h}{2}\big[\langle\sigma_\nu^I(v^I), \bar v_\nu^I - v_\nu^I\rangle_{1/2,\Sigma}\big] - \frac{h}{2}\big[\langle\sigma_\tau^I(v^I), \bar v_\tau^I - v_\tau^I\rangle_{1/2,\Sigma}\big] - \bigg[\bigg\langle m^I(w), \frac{\partial\overline{w}}{\partial\boldsymbol{\nu}} - \frac{\partial w}{\partial\boldsymbol{\nu}}\bigg\rangle_{1/2,\Sigma}\bigg] \\ + \big[\langle t^I(w), \overline{w} - w\rangle_{3/2,\Sigma}\big]\bigg\} - \mu\big[\langle g\nu, \overline{w} - w\rangle_{3/2,\Sigma}\big] \geqslant 0. \tag{21}$$

Здесь произведением тензора напряжений и вектора нормали является вектор $\sigma^I\nu = \big(\sigma_{1j}^I\nu_j, \sigma_{2j}^I\nu_j\big)$. Будем пользоваться следующими обозначениями:

$$\sigma_\nu^I = \sigma_{ij}^I\nu_j\nu_i, \quad \sigma_\tau^I = \sigma^I\nu - \sigma_\nu^I\nu, \quad \sigma_\tau^I = \big(\sigma_{\tau 1}^I, \sigma_{\tau 2}^I\big),$$

а также

$$v_\nu^{I\pm} = v^{I\pm}\cdot\nu, \quad v_\tau^{I\pm} = v^{I\pm} - v_\nu^{I\pm}\cdot\nu \text{ на } \Sigma.$$

Перейдём к выводу граничных условий на b. Выберем тестовые функции $\bar v^I = v^I \pm \varphi$, $\overline{w} = w$, где $\varphi \in H_0^1(\Omega)^2$. Тогда

$$\sum_{I=1}^{2}\big\{\big\langle[\sigma_\nu^I(v^I)], \varphi_\nu\big\rangle_{1/2,\Sigma} + \big\langle[\sigma_\tau^I(v^I)], \varphi_\tau\big\rangle_{1/2,\Sigma}\big\} = 0.$$

Из последнего равенства следует, что

$$\big\langle\big[\sigma_\nu^1(v^1) + \sigma_\nu^2(v^2)\big], \phi\big\rangle_{1/2,\Sigma} = \big\langle\big[\sigma_{\tau i}^1(v^1) + \sigma_{\tau i}^2(v^2)\big], \phi_i\big\rangle_{1/2,\Sigma} = 0,\ i = 1,2, \text{ для всех } \phi, \phi_i \in H^{1/2}(\Sigma).$$

Подставив в (21) $\bar v^1 = v^1 \pm \varphi$, $\bar v^2 = v^2$, $\overline{w} = w$, где $\varphi \in H_0^1(\Omega)^2$, получим

$$\big\langle\big[\sigma_\nu^1(v^1)\big], \varphi_\nu\big\rangle_{1/2,\Sigma} + \big\langle\big[\sigma_\tau^1(v^1)\big], \varphi_\tau\big\rangle_{1/2,\Sigma} = 0.$$

Это означает, что

$$\big\langle\big[\sigma_\nu^1(v^1)\big], \varphi_\nu\big\rangle_{1/2,\Sigma} = 0, \quad \big\langle\big[\sigma_\tau^1(v^1)\big], \varphi_\tau\big\rangle_{1/2,\Sigma} = 0 \text{ для всех } \varphi_\nu \in H^{1/2}(\Sigma), \quad \varphi_\tau \in H^{1/2}(\Sigma)^2. \tag{22}$$

Выбрав $\bar v^1 = v^1 \pm \varphi$, $\bar v^2 = v^2$, $\overline{w} = w$, где $[\varphi_\nu] = 0$, $\varphi \in H_\Gamma^1(\Omega_b)^2$, найдём, что

$$\big\langle\sigma_\tau^1(v^1), [\varphi_\tau]\big\rangle_{1/2,\gamma}^{00} = 0, \tag{23}$$

где $\varphi_\tau = (\varphi_1, 0)$, $\sigma_\tau^1(v^1) = \big(\sigma_{12}^1(v^1), 0\big)$ на b. Определим функционалы $\sigma_\tau^I(v^I) \in H_{00}^{-1/2}(b)$ по формуле $\big\langle\sigma_\tau^I(v^I), \varphi\big\rangle_{1/2,b}^{00} = \big\langle\sigma_\tau^I(v^I), \overline{\varphi}\big\rangle_{1/2,\Sigma}$ для всех $\overline{\varphi} = \varphi$ на b, $\overline{\varphi} = 0$ на $\Sigma\setminus\bar b$, $\overline{\varphi} \in H^{1/2}(\Sigma)^2$. Первые два равенства (15) выполняются в смысле (22), (23).

Далее, пусть $\bar v^I = v^I$, $\overline{w} = w \pm \psi$, где $\psi \in H_0^2(\Omega)$. Отсюда получим равенство

$$\sum_{I=1}^{2}\bigg\{ -\bigg\langle[m^I(w)], \frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\nu}}\bigg\rangle_{1/2,\Sigma} + \langle[t^I(w)], \psi\rangle_{3/2,\Sigma}\bigg\} - \mu c\langle[g_2], \psi\rangle_{3/2,\gamma} = 0. \tag{24}$$

В силу независимости ψ и $\dfrac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\nu}}$ на контуре Σ получим условия

$$\langle[m^1(w)+m^2(w)],\varphi\rangle_{1/2,\Sigma}=0 \text{ для всех } \varphi\in H^{1/2}(\Sigma), \tag{25}$$

$$\big\langle\big[t^1(w)+t^2(w)\big],\psi\rangle_{3/2,\Sigma}-\mu c\big\langle\big[v_2^2-v_2^1+cw_{,2}\big],\psi\big\rangle_{3/2,b}^{00}=0 \text{ для всех } \varphi\in H^{3/2}(\Sigma). \tag{26}$$

После подстановки в (21) функций $\bar v^I=v^I$, $\overline{w}=w\pm\psi$, где $[\psi_{,2}]=0$, $[\psi]\neq 0$ на b, $\psi\in H^2_\Gamma(\Omega_b)$, найдём

$$\big\langle t^{1+}(w)+t^{2+}(w)-\mu c\big(v_2^{2+}-v_2^{1+}+cw^+_{,2}\big),[\psi]\big\rangle_{3/2,b}^{00}=0 \text{ для всех } [\psi]\in H^{3/2}_{00}(b), \tag{27}$$

где $t^{I+}\in H^{-3/2}_{00}(b)$, если

$$\langle t^{1+}(w),\phi\rangle_{3/2,b}^{00}=\langle t^{1+}(w),\phi\rangle_{3/2,\Sigma} \text{ для всех } \bar\phi=\phi \text{ на } b,\quad \bar\phi=0 \text{ на } \Sigma\setminus\bar b,\quad \bar\phi\in H^{3/2}(\Sigma).$$

Условия (16) выполняются в смысле (26), (27).

Таким образом, от неравенства (21) осталось несколько слагаемых:

$$\sum_{I=1}^{2}\bigg\{-\frac{h}{2}\big\langle\sigma_{22}^I(v^I),\big[\bar v_2^I-v_2^I\big]\big\rangle_{1/2,b}^{00}-\langle m^{I+}(w),[\overline{w}_{,2}-w_{,2}]\rangle_{1/2,b}^{00}\bigg\}\geqslant 0. \tag{28}$$

Из (28) следует, что при любом $\varphi\geqslant 0$, $\varphi\in H^{1/2}_{00}(b)$ имеем

$$\bigg\langle-\frac{h^2}{8}\big(\sigma_{22}^1(v^1)+\sigma_{22}^2(v^2)\big)-|m^{1+}(w)+m^{2+}(w)|,\varphi\bigg\rangle_{1/2,b}^{00}\geqslant 0.$$

Подставляя в (21) в качестве тестовых функций $(0,0,0)$ и $2(v^1,v^2,w)$, получим условие (18):

$$\sum_{I=1}^{2}\bigg\{\frac{h}{2}\big\langle\sigma_{22}^I(v^I),[v_2^I]\big\rangle_{1/2,b}^{00}+\langle m^{I+}(w),[w_{,2}]\rangle_{1/2,b}^{00}\bigg\}=0.$$

Таким образом, получили все уравнения равновесия и граничные условия краевой задачи (10)–(18), совместимые с принятыми предположениями.

Обратно, выведем неравенство (9) из (10)–(18). Возьмём уравнение (12), умножим на $(\overline{w}-w)$, где $\overline{w}\in K$, и проинтегрируем по области Ω_b. Получим

$$-\sum_{I=1}^{2}\big(m^I_{ij,ij}(w)+F^I,\overline{w}-w\big)-\mu c(\operatorname{div}g,\overline{w}-w)=0.$$

Воспользуемся формулой Грина [14], условиями закрепления на внешней границе (13), а также (10), (11) и получим

$$\sum_{I=1}^{2}\bigg\{\frac{h}{2}(\sigma^I(v^I),\varepsilon(\bar v^I-v^I))+B_I(w,\overline{w}-w)-\frac{h}{2}(f^I,\bar v^I-v^I)-(F^I,\overline{w}-w)\bigg\}$$
$$+\mu(g,\bar g-g)+\mu c[\langle g\nu,\overline{w}-w\rangle_{3/2,\Sigma}]$$
$$+\sum_{I=1}^{2}\bigg\{\frac{h}{2}\big[\big\langle\sigma^I_\nu(v^I),\bar v^I_\nu-v^I_\nu\big\rangle_{1/2,\Sigma}\big]+\frac{h}{2}\big[\big\langle\sigma^I_\tau(v^I),\bar v^I_\tau-v^I_\tau\big\rangle_{1/2,\Sigma}\big]$$

$$+\left[\left\langle m^I(w), \frac{\partial \overline{w}}{\partial \boldsymbol{\nu}} - \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right\rangle_{1/2,\Sigma}\right] - [\langle t^I(w), \overline{w} - w\rangle_{3/2,\Sigma}]\Bigg\} = 0. \quad (29)$$

Использовав условие (16) и последнее равенство (15), получим

$$\sum_{I=1}^{2}\left\{\left[\left\langle m^I(w), \frac{\partial \overline{w}}{\partial \boldsymbol{\nu}} - \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right\rangle_{1/2,\Sigma}\right] - [\langle t^I(w), \overline{w} - w\rangle_{3/2,\Sigma}]\right\}$$

$$+ \mu[\langle g\nu, \overline{w} - w\rangle_{3/2,\Sigma}] = \sum_{I=1}^{2}\left\langle m^{I+}(w), \left[\frac{\partial \overline{w}}{\partial \boldsymbol{\nu}} - \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right]\right\rangle^{00}_{1/2,b}.$$

Для того чтобы вывести равенство

$$\sum_{I=1}^{2}\left\{\frac{h}{2}\left[\left\langle \sigma^I_\nu(v^I), \bar{v}^I_\nu - v^I_\nu\right\rangle_{1/2,\Sigma}\right] + \frac{h}{2}\left[\left\langle \sigma^I_\tau(v^I), \bar{v}^I_\tau - v^I_\tau\right\rangle_{1/2,\Sigma}\right]\right\} = \sum_{I=1}^{2}\frac{h}{2}\left\langle \sigma^I_\nu(v^I), \left[\bar{v}^I_\nu - v^I_\nu\right]\right\rangle^{00}_{1/2,b},$$

были использованы два первых условия (15). Наконец, с помощью условий (14), (17) и (18) оценим сумму

$$\sum_{I=1}^{2}\left\{\left\langle m^{I+}(w), \left[\frac{\partial \overline{w}}{\partial \boldsymbol{\nu}} - \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right]\right\rangle^{00}_{1/2,b} + \left\langle \sigma^I_\nu(v^I), \left[\bar{v}^I_\nu - v^I_\nu\right]\right\rangle^{00}_{1/2,b}\right\} \leqslant 0.$$

Это неравенство и равенство (29) вместе дают искомое неравенство (9). □

Замечание 1. В мягком слое на отрезке b выполнено условие непроникания, если выполнено условие непроникания в несущих слоях.

Действительно, найдём, чему равен скачок горизонтальных перемещений по нормали на отрезке b по всей толщине мягкого слоя. Принимая во внимание (3) и (4), получим

$$[v^{z0}\nu] = \frac{1}{2}\left[v^2_2 + v^1_2 + \frac{z}{\delta}\left(v^2_2 - v^1_2 + \frac{h}{2}w_{,2}\right)\right], \quad z \in (-\delta, \delta).$$

Из формул (1) и (2) найдём выражения для горизонтальных перемещений вдоль оси x_2 точек нижнего и верхнего несущих слоёв на поверхностях $z = -\delta$ и $z = \delta$ соответственно. Тогда последнее равенство можно переписать в виде

$$[v^{z0}\nu] = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{z}{\delta}\right)\left[v^{z2}_2(x, \delta)\right] + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{z}{\delta}\right)\left[v^{z1}_2(x, -\delta)\right], \quad z \in (-\delta, \delta).$$

Здесь в правой части выражения, стоящие в квадратных скобках, неотрицательны в силу условия непроникания (14). Следовательно, $[v^{z0}\nu] \geqslant 0$ при всех $z \in (-\delta, \delta)$.

2. РАВНОВЕСИЕ ДВУХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ, СОДЕРЖАЩЕЙ ТРЕЩИНУ

В этом разделе рассматривается случай предельного перехода в задаче (8), (9), когда полутолщина мягкого слоя δ стремится к нулю, а приведённая жёсткость мягкого слоя стремится к бесконечности. Далее в работе будем считать, что G — положительная постоянная, т. е. из (7) следует $\mu = G/(2\delta)$. Подставим это выражение в вариационное неравенство (8), (9), его решение $v^I = v^{\delta I}$, $w = w^\delta$ зависит от параметра δ. Подставляя в (9) последовательно в качестве тестовых функций $(\bar{v}^1, \bar{v}^2, \overline{w}) = (0, 0, 0)$ и $(\bar{v}^1, \bar{v}^2, \overline{w}) = 2(v^{\delta 1}, v^{\delta 2}, w^\delta)$, получим равенство

$$\sum_{I=1}^{2}\left\{\frac{h}{2}(\sigma^I(v^{\delta I}), \varepsilon(v^{\delta I})) + B_I(w^\delta, w^\delta) - \frac{h}{2}(f^I, v^{\delta I}) - (F^I, w^\delta)\right\} + \frac{G}{2\delta}(g^\delta, g^\delta) = 0. \quad (30)$$

Из (30) следуют равномерные по $\delta > 0$ оценки

$$\|v^{\delta I}\|_{H^1_\Gamma(\Omega_b)^2} \leqslant C, \quad \|w^\delta\|_{H^2_\Gamma(\Omega_b)} \leqslant C, \quad G\left\|v^{\delta 2} - v^{\delta 1} + \frac{h}{2}\nabla w^\delta\right\|_{L_2(\Omega_b)^2} \leqslant 2C\delta^{1/2},$$

где C — положительная постоянная. Из двух первых неравенств следует, что $v^{\delta I} \to v^{0I}$ слабо в $H^1_\Gamma(\Omega_b)^2$, $w^\delta \to w^0$ слабо в $H^2_\Gamma(\Omega_b)$ при $\delta \to 0$, где $(v^{01}, v^{02}, w^0) \in K$ — некоторые функции. Последнее неравенство означает, что $v^{02} - v^{01} + \dfrac{h}{2}\nabla w^0 = 0$ почти всюду в Ω_b.

Определим новое множество допустимых перемещений

$$K_0 = \Big\{(\bar v^1, \bar v^2, \overline{w}) \in H^1_\Gamma(\Omega_b)^2 \times H^1_\Gamma(\Omega_b)^2 \times H^2_\Gamma(\Omega_b) \mid \\ \bar v^2 - \bar v^1 + \frac{h}{2}\nabla\overline{w} = 0 \text{ в } \Omega_b,\ [\bar v^I_2] \geqslant \frac{h}{4}|[\overline{w}_{,2}]| \text{ на } b\Big\}.$$

Возьмём тестовые функции из K_0 и перейдём к нижнему пределу в (8), (9). Получим

$$(v^{01}, v^{02}, w^0) \in K_0, \tag{31}$$

$$\sum_{I=1}^{2}\left\{\frac{h}{2}(\sigma^I(v^{0I}), \varepsilon(\bar v^I - v^{0I})) + B_I(w^0, \overline{w} - w^0) - \frac{h}{2}(f^I, \bar v^I - v^{0I}) - (F^I, \overline{w} - w^0)\right\} \geqslant 0 \\ \text{для всех } (\bar v^1, \bar v^2, \overline{w}) \in K_0. \tag{32}$$

То есть (v^{01}, v^{02}, w^0) — решение задачи минимизации функционала

$$\Pi_0(\bar v^1, \bar v^2, \overline{w}) = \sum_{I=1}^{2}\left\{\frac{h}{4}(\sigma^I(\bar v^I), \varepsilon(\bar v^I)) + \frac{1}{2}B_I(\overline{w}, \overline{w}) - \frac{h}{2}(f^I, \bar v^I) - (F^I, \overline{w})\right\}$$

на множестве K_0. Множество K_0 является выпуклым и замкнутым, а функционал Π_0 — коэрцитивный и слабо полунепрерывный снизу. Следовательно, задача минимизации имеет решение, которое удовлетворяет вариационному неравенству (31), (32). Так как функционал Π_0 строго выпуклый, то это решение единственно.

Теорема 2. *При $\delta \to 0$ последовательность функций $(v^{\delta 1}, v^{\delta 2}, w^\delta)$ сильно сходится к (v^{01}, v^{02}, w^0).*

Доказательство. Из (30) получаем

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \liminf \frac{G}{2\delta}(g^\delta, g^\delta) \leqslant \limsup \frac{G}{2\delta}(g^\delta, g^\delta) \\ &= \limsup \sum_{I=1}^{2}\left\{-\frac{h}{2}(\sigma^I(v^{\delta I}), \varepsilon(v^{\delta I})) - B_I(w^\delta, w^\delta) - \frac{h}{2}(f^I, v^{\delta I}) - (F^I, w^\delta)\right\} \\ &\leqslant \sum_{I=1}^{2}\left\{-\frac{h}{2}(\sigma^I(v^{0I}), \varepsilon(v^{0I})) - B_I(w^0, w^0) - \frac{h}{2}(f^I, v^{0I}) - (F^I, w^0)\right\} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда имеем $\lim\limits_{\delta\to 0}\dfrac{1}{\delta}(g^\delta, g^\delta) = 0$. Используя это равенство и (30), найдём сходимость

$$\sum_{I=1}^{2}\left\{\frac{h}{2}(\sigma^I(v^{\delta I}),\varepsilon(v^{\delta I}))+B_I(w^\delta,w^\delta)\right\}=\sum_{I=1}^{2}\left\{\frac{h}{2}(f^I,v^{\delta I})+(F^I,w^\delta)+\frac{G}{2\delta}(g^\delta,g^\delta)\right\}$$
$$\to\sum_{I=1}^{2}\left\{\frac{h}{2}(f^I,v^{0I})+(F^I,w^0)\right\}=\sum_{I=1}^{2}\left\{\frac{h}{2}(\sigma^I(v^{0I}),\varepsilon(v^{0I}))+B_I(w^0,w^0)\right\}.$$

Отсюда, учитывая условия

$$\liminf(\sigma^I(v^{\delta I}),\varepsilon(v^{\delta I}))\geqslant(\sigma^I(v^{0I}),\varepsilon(v^{0I})),\quad \liminf B_I(w^\delta,w^\delta)\geqslant B_I(w^0,w^0),$$

получим

$$(\sigma^I(v^{\delta I}),\varepsilon(v^{\delta I}))\to(\sigma^I(v^{0I}),\varepsilon(v^{0I})),\quad B_I(w^\delta,w^\delta)\to B_I(w^0,w^0).$$

Вместе со слабой сходимостью последовательностей функций это даёт то, что $v^{\delta I}\to v^{0I}$ сильно в $H^1_\Gamma(\Omega_b)^2$ и $w^\delta\to w^0$ сильно в $H^2_\Gamma(\Omega_b)$. □

Имеем краевую задачу для функций v^{01}, v^{02}, w^0:

$$-\operatorname{div}\sigma^1(v^{01})-\operatorname{div}\sigma^2(v^{02})=f^1+f^2,\quad \sigma^I(v^{0I})=A^I\varepsilon(v^{0I})\text{ в }\Omega_b, \tag{33}$$

$$-m^1_{ij,ij}(w^0)-m^2_{ij,ij}(w^0)+\frac{h^2}{8}\big(\sigma^1_{ij,ij}(v^{01})+f^1_{i,i}-\sigma^2_{ij,ij}(v^{02})-f^2_{i,i}\big)=F^1+F^2\text{ в }\Omega_b, \tag{34}$$

$$v^{02}-v^{01}+\frac{h}{2}\nabla w^0=0\text{ в }\Omega_b, \tag{35}$$

$$v^{0I}=0,\quad w^0=\frac{\partial w^0}{\partial\mathbf{n}}=0\text{ на }\Gamma, \tag{36}$$

$$[v^{0I}_2]\geqslant\frac{h}{4}\big|[w^0_{,2}]\big|\text{ на }b, \tag{37}$$

$$[K_\nu]=0,\quad K_\tau=0,\quad [M]=0\text{ на }b, \tag{38}$$

$$-N^{\pm}_{,1}+t^{1\pm}(w^0)+t^{2\pm}(w^0)+\frac{h^2}{8}\big(\sigma^{1\pm}_{2j,j}(v^{01})-\sigma^{2\pm}_{2j,j}(v^{02})\big)=\frac{h^2}{8}\big(f^{2\pm}_2-f^{1\pm}_2\big)\text{ на }b, \tag{39}$$

$$\big[\sigma^I_{12}(v^{0I})\big]\big|_{\bar b\setminus b}=0,\quad |M|\leqslant\frac{h}{2}K_\nu,\quad K_\nu[v^{0I}_2]+\left(M+(-1)^I\frac{h}{4}K_\nu\right)[w^0_{,2}]=0\text{ на }b. \tag{40}$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$K_\nu=-\frac{h}{2}\big(\sigma^1_\nu(v^{01})+\sigma^2_\nu(v^{02})\big), \tag{41}$$

$$K_\tau=-\frac{h}{2}\big(\sigma^1_\tau(v^{01})+\sigma^2_\tau(v^{02})\big), \tag{42}$$

$$M=-\frac{h^2}{8}\big(\sigma^1_\nu(v^{01})-\sigma^2_\nu(v^{02})\big)-(m^1(w^0)+m^2(w^0)), \tag{43}$$

$$N=-\frac{h^2}{8}\big(\sigma^1_\tau(v^{01})-\sigma^2_\tau(v^{02})\big). \tag{44}$$

В (33)–(40) через K_ν, K_τ обозначены усилия, через M — изгибающий момент двухслойной пластины на берегах интервала b, взятые со знаком минус. В левой части равенства (39) стоит выражение для обобщённой поперечной силы в двухслойной пластине [1, с. 51] на берегах b. Имеет место следующая

Теорема 3. *Предположим, что*

$$(v^{01},v^{02},w^0)\in K_0,\quad \operatorname{div}\sigma^I(v^{0I})\in L_2(\Omega_b)^2,\quad \sigma^I_{ij,ij}(v^{0I})\in L_2(\Omega_b),\quad m^I_{ij,ij}(w^0)\in L_2(\Omega_b).$$

Пусть $f^I_{i,i}\in L_2(\Omega)$. Тогда вариационная (31), (32) *и дифференциальная* (33)–(40) *формулировки задачи равновесия двухслойной пластины с вертикальной трещиной эквивалентны.*

Доказательство. Сначала введём функцию, равную горизонтальным смещениям точек на плоскости $z = 0$:

$$u = v^{01} - \frac{h}{4}\nabla w^0 = v^{02} + \frac{h}{4}\nabla w^0, \tag{45}$$

аналогично определяется функция $\bar{u}$. Тогда неравенство (32) примет вид

$$\sum_{I=1}^{2}\biggl\{\frac{h}{2}(\sigma^I(v^{0I}),\varepsilon(\bar{u}-u)) + B_I(w^0,\overline{w}-w^0) - \frac{h}{2}(f^I,\bar{u}-u) - (F^I,\overline{w}-w^0)$$
$$- (-1)^I\frac{h^2}{8}(\sigma^I(v^{0I}),\varepsilon(\nabla\overline{w}-\nabla w^0)) + (-1)^I\frac{h^2}{8}(f^I,\nabla\overline{w}-\nabla w^0)\biggr\} \geqslant 0. \tag{46}$$

Подставим в (46) пробные функции $\bar{u} = u\pm\phi$, $\phi\in C_0^\infty(\Omega_b)^2$, $\overline{w} = w^0$. Тогда уравнение (33) выполняется в смысле

$$\sum_{I=1}^{2}\{(\sigma^I(v^{0I}),\varepsilon(\phi)) - (f^I,\phi)\} = 0. \tag{47}$$

Далее выведем уравнение (34). Пусть $\bar{u} = v$, $\overline{w} = w^0\pm\psi$, где произвольная функция ψ принадлежит $C_0^\infty(\Omega_b)$. Отсюда получим равенство

$$\sum_{I=1}^{2}\biggl\{B_I(w^0,\psi) - (F^I,\psi) - (-1)^I\frac{h^2}{8}(\sigma^I(v^{0I}),\varepsilon(\nabla\psi)) + (-1)^I\frac{h^2}{8}(f^I,\nabla\psi)\biggr\} = 0. \tag{48}$$

Продолжим отрезок b замкнутой кривой Σ класса $C^{1,1}$, полностью содержащейся в области Ω_b. Применим формулу Грина [14] к неравенству (46), используем (47), (48) и обозначения (41)–(44). Имеем

$$[\langle K_\nu,\bar{u}_\nu-u_\nu\rangle_{1/2,\Sigma}] + [\langle K_\tau,\bar{u}_\tau-u_\tau\rangle_{1/2,\Sigma}] + \left[\left\langle M,\frac{\partial\overline{w}}{\partial\boldsymbol{\nu}}-\frac{\partial w^0}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right\rangle_{1/2,\Sigma}\right] + \left[\left\langle N,\frac{\partial\overline{w}}{\partial\boldsymbol{\tau}}-\frac{\partial w^0}{\partial\boldsymbol{\tau}}\right\rangle_{1/2,\Sigma}\right]$$
$$+\left[\left\langle t^1(w^0)+t^2(w^0)+\frac{h^2}{8}\bigl(\sigma^1_{ij,j}(v^{01})-\sigma^2_{ij,j}(v^{02})+f^1_i-f^2_i\bigr)\nu_i,\overline{w}-w^0\right\rangle_{3/2,\Sigma}\right] \geqslant 0. \tag{49}$$

Подставляя в (49) тестовые функции вида $\bar{u} = u\pm\phi$, $\phi\in H_0^1(\Omega)^2$, $\overline{w} = w^0$, получим

$$\langle[K_\nu],\phi_\nu\rangle_{1/2,\Sigma} + \langle[K_\tau],\phi_\tau\rangle_{1/2,\Sigma} = 0,$$

откуда в силу независимости ϕ_ν и ϕ_τ на Σ следует

$$\langle[K_\nu],\phi_\nu\rangle_{1/2,\Sigma} = 0,\quad \langle[K_\tau],\phi_\tau\rangle_{1/2,\Sigma} = 0. \tag{50}$$

Выбрав $\bar{u} = u\pm\phi$, $[\phi\nu] = 0$ на b, $\phi\in H^1_\Gamma(\Omega_b)^2$, $\overline{w} = w^0$, найдём ещё одно условие на b:

$$\langle K_\tau,[\phi_\tau]\rangle^{00}_{1/2,b} = 0, \tag{51}$$

т. е. первое равенство (38) выполняется в смысле первого равенства (50), второе равенство (38) выполняется в смысле второго равенства (50) и (51).

Пусть $\bar{u} = u$, $\overline{w} = w^0\pm\psi$, $\psi\in H_0^2(\Omega)$. Тогда из равенства

$$\left\langle[M],\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right\rangle_{1/2,\Sigma} + \left\langle[N],\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\tau}}\right\rangle_{1/2,\Sigma} + \langle[t^1(w^0)+t^2(w^0)],\psi\rangle_{3/2,\Sigma}$$

$$+\frac{h^2}{8}\big\langle\big[\sigma^1_{ij,j}(v^{01})-\sigma^2_{ij,j}(v^{02})+f^1_i-f^2_i\big]\nu_i,\psi\big\rangle_{3/2,\Sigma},\psi\rangle_{3/2,\Sigma}=0$$

следует

$$\left\langle [M],\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right\rangle_{1/2,\Sigma}=0, \tag{52}$$

$$\left\langle [N],\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\tau}}\right\rangle_{1/2,\Sigma}+\left\langle [t^1(w^0)+t^2(w^0)]+\frac{h^2}{8}\big[\sigma^1_{ij,j}(v^{01})-\sigma^2_{ij,j}(v^{02})+f^1_i-f^2_i\big]\nu_i,\psi\right\rangle_{3/2,\Sigma}=0. \tag{53}$$

Подставляя в (49) функции $\bar{u}=u$, $\overline{w}=w^0\pm\psi$, $[\psi_{,2}]=0$ на b, $\psi\in H^2_\Gamma(\Omega_b)$, получим

$$\langle N^+,[\psi_{,1}]\rangle^{00}_{1/2,b}+\left\langle t^{1+}(w^0)+t^{2+}(w^0)+\frac{h^2}{8}\big(\sigma^{1+}_{2j,j}(v^{01})-\sigma^{2+}_{2j,j}(v^{02})+f^{1+}_2-f^{2+}_2\big),[\psi]\right\rangle^{00}_{3/2,b}=0. \tag{54}$$

Равенства (53), (54) вместе дают условие (39). В результате от неравенства (49) остались только два слагаемых:

$$\langle K_\nu,[\bar{u}_2-u_2]\rangle^{00}_{1/2,b}+\big\langle M,\big[\overline{w}_{,2}-w^0_{,2}\big]\big\rangle^{00}_{1/2,b}\geqslant 0. \tag{55}$$

Подставим в (55) пробные функции $\bar{u}=u+\varphi$, $\overline{w}=w^0+\psi$, $[\varphi_2]\geqslant h|[\psi_{,2}]|/2$ на b, $\varphi\in H^1_\Gamma(\Omega_b)^2$, $\psi\in H^2_\Gamma(\Omega_b)$, получим

$$\left\langle \frac{h}{2}K_\nu-|M|,[\varphi_2]\right\rangle^{00}_{1/2,b}\geqslant 0. \tag{56}$$

Наконец, подставив последовательно $(\bar{u},\overline{w})=(0,0)$ и $(\bar{u},\overline{w})=2(u,w^0)$ в (55), имеем равенство

$$\langle K_\nu,[u_2]\rangle^{00}_{1/2,b}+\big\langle M,[w^0_{,2}]\big\rangle^{00}_{1/2,b}=0. \tag{57}$$

Таким образом, получили третье условие (40).

Обратно, покажем, что из уравнений и граничных условий краевой задачи следует уравнение равновесия. Умножим уравнение (34) на $\overline{w}-w^0$ и проинтегрируем по области Ω_b. Тогда, использовав формулу Грина, условия закрепления (36), уравнения (33), (35) и обозначения (41)–(45), получим

$$\sum_{I=1}^{2}\left\{\frac{h}{2}(\sigma^I(v^{0I}),\varepsilon(\bar{v}^I-v^{0I}))+B_I(w^0,\overline{w}-w^0)-\frac{h}{2}(f^I,\bar{v}^I-v^{0I})-(F^I,\overline{w}-w^0)\right\}-[\langle K_\nu,\bar{u}_\nu-u_\nu\rangle_{1/2,\Sigma}]$$
$$-[\langle K_\tau,\bar{u}_\tau-u_\tau\rangle_{1/2,\Sigma}]-\left[\left\langle M,\frac{\partial\overline{w}}{\partial\boldsymbol{\nu}}-\frac{\partial w^0}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right\rangle_{1/2,\Sigma}\right]$$
$$-\left[\left\langle N,\frac{\partial\overline{w}}{\partial\boldsymbol{\tau}}-\frac{\partial w^0}{\partial\boldsymbol{\tau}}\right\rangle_{1/2,\Sigma}\right]-[\langle t^1(w^0)+t^2(w^0),\overline{w}-w^0\rangle_{3/2,\Sigma}]$$
$$-\frac{h^2}{8}\big[\big\langle(\sigma^1_{ij,j}(v^{01})-\sigma^2_{ij,j}(v^{02})+f^1_i-f^2_i)\nu_i,\overline{w}-w^0\big\rangle_{3/2,\Sigma}\big]=0. \tag{58}$$

Сумма последних трёх слагаемых левой части (58) равна нулю в силу условия (38) и первого равенства (39), выполняющихся в смысле (53), (54). Оценка

$$-[\langle K_\nu,\bar{u}_\nu-u_\nu\rangle_{1/2,\Sigma}]-[\langle K_\tau,\bar{u}_\tau-u_\tau\rangle_{1/2,\Sigma}]-\left[\left\langle M,\frac{\partial\overline{w}}{\partial\boldsymbol{\nu}}-\frac{\partial w^0}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right\rangle_{1/2,\Sigma}\right]\leqslant 0$$

получается с помощью условий (38), выполненных в смысле (50)–(52), уравнения (35) и неравенства (37), а также второго и третьего условий (40), выполненных в смысле (56), (57). Таким образом, получено искомое неравенство (32). □

Замечание 2. При $\delta \to 0$ функция горизонтальных перемещений мягкого слоя (3), (4)

$$v^{z*\delta} = \frac{1}{2}(v^{\delta 1} + v^{\delta 2}) + \frac{z}{2\delta}\left(v^{\delta 2} - v^{\delta 1} + \frac{h}{2}\nabla w^{\delta}\right), \quad z \in (-\delta, \delta),$$

сходится к функции $v^{*0} = (v^{01} + v^{02})/2$ сильно в $H^1_\Gamma(\Omega_b)^2$.

Чтобы показать справедливость этого утверждения, оценим норму разности

$$\|v^{z*\delta} - v^{*0}\|_{H^1_\Gamma(\Omega_b)^2} \leqslant \frac{1}{2}\|v^{\delta 1} + v^{\delta 2} - v^{01} - v^{02}\|_{H^1_\Gamma(\Omega_b)^2} + \frac{|z|}{2\delta}\left\|v^{\delta 2} - v^{\delta 1} + \frac{h}{2}\nabla w^{\delta}\right\|_{H^1_\Gamma(\Omega_b)^2}.$$

Первое слагаемое в правой части неравенства стремится к нулю вследствие теоремы 2. Для второго слагаемого справедлива оценка

$$\frac{|z|}{2\delta}\left\|v^{\delta 2} - v^{\delta 1} + \frac{h}{2}\nabla w^{\delta}\right\|_{L_2(\Omega_b)^2} \leqslant \frac{C}{G}\delta^{1/2}.$$

Следовательно, $v^{z*\delta} \to v^{*0}$ сильно в $H^1_\Gamma(\Omega_b)^2$. Из (45) следует, что функция v^{*0} является вектором горизонтальных перемещений точек двухслойной пластины на плоскости $z = 0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача равновесия упругой трёхслойной пластины, содержащей сквозную трещину. Задача равновесия двухслойной пластины Кирхгофа — Лява, содержащей вертикальную трещину, получена из задачи равновесия трёхслойной пластины с помощью предельного перехода, когда полутолщина мягкого слоя стремится к нулю, а его приведённая жёсткость — к бесконечности. Для обеих задач показана однозначная разрешимость, доказана эквивалентность вариационной и дифференциальной постановок. Показана сильная сходимость последовательности решений задач равновесия трёхслойной пластины Кирхгофа — Лява при стремлении толщины мягкого слоя к нулю, а его приведённой жёсткости к бесконечности — к решению задачи равновесия двухслойной пластины с вертикальной трещиной.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Болотин В.В., Новичков Ю.Н.* Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980.
2. *Reissner E.* Contributions to the problem of structural analysis of sandwich-type plates and shells. Theory and practice of sandwich construction in aircraft. 1948. (Preprint/ Inst. Aeron. Sci. A symposium; No. 165), pp. 21–48.
3. *Григолюк Э.И.* Уравнение трёхслойных оболочек с лёгким заполнителем // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. 1957. № 1. С. 77–84.
4. *Григолюк Э.И., Чулков П.П.* К общей теории трёхслойных оболочек // Докл. АН СССР. 1963. Т. 150, № 5. С. 1012–1014.
5. *Григолюк Э.И., Куликов Г.М.* Обобщённая модель механики тонкостенных конструкций из композитных материалов // Мех. композит. матер. 1988. № 4. С. 698–704.
6. *Королёв В.И.* Упруго-пластические деформации оболочек. М.: Машиностроение, 1971.
7. *Димитриенко Ю.И.* Асимптотическая теория многослойных тонких пластин // Вестн. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2012. № 3. С. 86–99.
8. *Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Юрин Ю.В.* Вариационные уравнения асимптотической теории многослойных тонких пластин // Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2015. № 4. С. 67–87.
9. *Григолюк Э.И., Куликов Г.М.* Пути развития теории многослойных пластин и оболочек // Вестн. ТГТУ. 2005. Т. 11, С. 439–448.

10. *Ржаницын А.Р.* Составные стержни и пластинки. М.: Стройиздат, 1986.

11. *Хлуднев А.М.* О контакте двух пластин, одна из которых содержит трещину // Прикл. математика и механика. 1997. Т. 61, № 5. С. 882–894.

12. *Khludnev A.M., Kovtunenko V.A.* Analysis of Cracks in Solids. Southampton; Boston: WIT Press, 2000.

13. *Рудой Е.М.* Дифференцирование функционалов энергии в двумерной теории упругости для тел, содержащих криволинейные трещины // Прикл. математика и техн. физика. 2004. Т. 45, № 6. С. 83–94.

14. *Хлуднев А.М.* Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010.

15. *Лазарев Н.П.* Задача о равновесии пластины Тимошенко, содержащей сквозную трещину // Сиб. журн. индустр. математики. 2011. Т. 14, № 4. С. 32–43.

16. *Щербаков В.В.* Об одной задаче управления формой тонких включений в упругих телах // Сиб. журн. индустр. математики. 2013. Т. 16, № 1. С. 138–147.

17. *Рудой Е.М., Казаринов Н.А., Слесаренко В.Ю.* Численное моделирование равновесия двухслойной упругой конструкции со сквозной трещиной // Сиб. журн. вычисл. математики. 2017. Т. 20, № 1. С. 77–90.

18. *Beneveniste Y., Miloh T.* Imperfect soft and stiff interfaces in two-dimensional elasticity // Mech. of Materials. 2001. V. 33. P. 309–323.

19. *Khludnev A.M.* On modelling elastic bodies with defects // Sib. Electr. Math. Rep. 2018. V. 15. P. 153–166.

20. *Фанкина И.В.* О равновесии двухслойной упругой конструкции при наличии трещины // Сиб. журн. индустр. математики. 2019. Т. 22, № 4. С. 107–120.

21. *Фанкина И.В.* О равновесии двухслойной упругой конструкции с верхним слоем, накрывающим вершину дефекта // Сиб. электрон. мат. изв. 2020. Т. 17. С. 141–160.

22. *Rudoy E.* Asymptotic modelling of bonded plates by a soft thin adhesive layer // Sib. Electr. Math. Rep. 2020. V. 17, P. 615–625.

23. *Furtsev A., Rudoy E.* Variational approach to modelling soft and stiff interfaces in the Kirchoff—Love theory of plates // Int. J. Solids Structures. 2020. V. 202. P. 562–574.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 539.3:517.97

EQUILIBRIUM OF A THREE-LAYER PLATE WITH CRACK

© 2022 E. V. Pyatkina

Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS,
pr. Acad. Lavrentyeva 15, Novosibirsk 630090, Russia

E-mail: dusya_pyatkina@mail.ru

Received 22.07.2021, revised 23.09.2021, accepted 21.10.2021

Abstract. An equilibrium problem of a three-layer plate which is clamped at outer edge and containes a through vertical crack is studied. The three-layer plate consists of two structural layers which are considered as anisotropic Kirchhoff—Love plates and a soft layer between them. At the crack edges in the structural layers a non-penetration condition is posed. Passage to the limit as the width of soft layer tends to zero and its reduced stiffness tends to infinity is considered. For the both problems a unique solvability is shown, variational and differentional statements are presented.

Keywords: Kirchhoff—Love plate, three-layer plate, crack with non-penetration condition.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.108

REFERENCES

1. Bolotin V.V., Novichkov Yu.N. Mechanics of multilayered structures. Moscow: Mashinostroenie, 1980 (in Russian).
2. Reissner E. Contributions to the problem of structural analysis of sandwich-type plates and shells. Theory and practice of sandwich construction in aircraft. 1948. (Preprint/ Inst. Aeron. Sci. A symposium; No. 165), pp. 21–48.
3. Grigolyuk E.I. Equation of three-layered shells with lightweight intermediate layer. *Bull. AN USSR. Division of Technical Sci.*, 1957, No. 1, pp. 77–84 (in Russian).
4. Grigolyuk E.I., Chulkov P.P. On the general theory of three-layer shells with a big deflection. *Dokl. Acad. Nauk SSSR*, 1963, Vol. 150, No. 5, pp. 1012–1014.
5. Grigolyuk E.I., Kulikov G.M. Generalized model of mechanics of composite material thin-shell structures. *Mech. Composite Mater.*, 1988, No. 4, pp. 698–704 (in Russian).
6. Korolev V.I. Elasto-plastic deformation of shells. Moscow: Mashinostroenie, 1971 (in Russian)
7. Dimitrienko Yu.I. Asymptotic theory of multylayer thin plates. *Vestn. Moskov. Univ. im. Baumana, Ser. Estestv. Nauki*, 2012, No. 3, pp. 86–99 (in Russian).
8. Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Yurin Yu.V. Variational equations of asymptotic theory of multylayer thin plates. *Vestn. Moskov. Univ. im. Baumana, Ser. Estestv. Nauki*, 2015, No 4, pp. 67–87 (in Russian).
9. Grigolyuk E.I., Kulikov G.M. Development of the theory of elastic multilayered plates and shells. *Vestn. TSTU*, 2005, Vol. 11, pp. 439–448 (in Russian).
10. Rzanitsyn A.R. Built-up bars and plates. Moscow: Stroiizdat, 1986 (in Russian).
11. Khludnev A.M. On the contact of two plates, one of which contains a crack. *J. Appl. Math. Mech.*, 1997, Vol. 61, No. 5, pp. 851–862.
12. Khludnev A.M., Kovtunenko V.A. Analysis of cracks in solids. Southampton; Boston: WIT Press, 2000.

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2022, Vol. 16, No. 1.

13. Rudoy E.M. Differentiation of energy functionals in two-dimensional elasticity theory for solids with curvilinear cracks. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2004, Vol. 45, No. 6, pp. 843–852.

14. Khludnev A.M. Elasticity theory problems in nonsmooth domains. Moscow: Fizmatlit, 2010.

15. Lazarev N.P. The problem of equilibrium of a Timoshenko-type plate containing a through-thickness crack. *J. Appl. Industr. Math.*, 2011, Vol. 14, No. 4, pp. 32–43.

16. Shcherbakov V.V. On an optimal control problem of thin inclusions shapes in elastic bodies. *J. Appl. Industr. Math.*, 2013, Vol. 7, No. 3, pp. 435–443.

17. Rudoy E.M., Kazarinov N.A., Slesarenko V.Yu. Numerical simulation of the equilibrium of an elastic two-layer structure with a crack. *Numer. Analys. Appl.*, 2017, Vol. 10, No. 1, pp. 63–73.

18. Beneveniste Y., Miloh T. Imperfect soft and stiff interfaces in two-dimensional elasticity. *Mech. of Materials*, 2001, Vol. 33, pp. 309–323.

19. Khludnev A.M. On modelling elastic bodies with defects. *Sib. Electr. Math. Rep.*, 2018, Vol. 15, pp. 153–166.

20. Fankina I.V. On the equilibrium of a two-layer elastic structure with a crack. *J. Appl. Industr. Math.*, 2019, Vol. 13, No. 4, pp. 629–641.

21. Fankina I.V. On the equilibrium problem for a two-layer structure with the upper layer covering a defect tip. *Sib. Electr. Math. Rep.*, 2020, Vol. 17, pp. 141–160.

22. Rudoy E. Asymptotic modelling of bonded plates by a soft thin adhesive layer. *Sib. Electr. Math. Rep.*, 2020, Vol. 17, pp. 615–625.

23. Furtsev A., Rudoy E. Variational approach to modelling soft and stiff interfaces in the Kirchoff—Love theory of plates. *Inter. J. Solids Structures*, 2020, Vol. 202, pp. 562–574.