СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

Журнал основан в 1998 году
Выходит 4 раза в год

Том 25, № 1(89)

Январь – март, 2022 г.

СОДЕРЖАНИЕ

НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

УДК 517.95

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В НЕВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЯХ

Ар. С. Терсенов

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
просп. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия

E-mail: aterseno@math.nsc.ru

Поступила в редакцию 21.09.2021 г.; после доработки 21.09.2021 г.;
принята к публикации 21.10.2021 г.

Приведены достаточные условия существования и единственности непрерывного по Липшицу по пространственным переменным и непрерывного по Гёльдеру по времени, вязкого по Лионсу решения первой начально-краевой задачи для анизотропного параболического уравнения с показателями анизотропности, зависящими от времени, в невыпуклых областях.

Ключевые слова: анизотропные параболические уравнения в невыпуклых областях, вязкие решения, непрерывные по Липшицу.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.110

1. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим первую начально-краевую задачу для анизотропного параболического уравнения в области Ω_T:

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} (|u_{x_i}|^{p_i(t)-2} u_{x_i})_{x_i} = B(t, x, u, \nabla u), \tag{1.1}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad (0, T) \times \partial\Omega, \tag{1.2}$$

$$u(0, x) = u_0(x) \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u_0(x)\Big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1.3}$$

где Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $T \in (0, \infty)$. Что касается показателей $p_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, мы предполагаем, что $p_i(t) \geqslant 2$ при любом фиксированном i для всех значений $t \in [0, T]$. Уравнения с главной частью, такой же как в (1.1), принадлежат к так называемому классу уравнений с нестандартными условиями роста, которые заключаются в следующем: если положить

$$\mathbf{a}(t, \nabla u) = (|u_{x_1}|^{p_1(t)-2} u_{x_1}, \ldots, |u_{x_n}|^{p_n(t)-2} u_{x_n}),$$

тогда вектор-функция $\mathbf{a}(t, q)$ удовлетворяет условиям

$$b_1 |q|^{p_*-1} - b_2 \leqslant |\mathbf{a}(t, q)| \leqslant b_3 |q|^{p^*-1} + b_4,$$

где $p_* = \min\limits_{i,t \in [0,T]} \{p_i(t)\}$, $p^* = \max\limits_{i,t \in [0,T]} \{p_i(t)\}$, а b_k — некоторые неотрицательные постоянные.

Нестандартность условий роста заключается в возможном строгом неравенстве $p_* < p^*$, что означает, что показатели коэрцитивности и скорости роста по градиенту разные. Это приводит к тому, что многие классические методы исследования, например основанные на однородности главной части по градиенту, не могут быть применены. Наличие градиентных членов также привносит определённые трудности, так как усложняет, а иногда даже исключает возможность использования методов вариационного исчисления. В связи с этим для доказательства разрешимости краевых задач для уравнений вида (1.1) чаще используются разнообразные аппроксимационные и топологические методы.

Интерес к исследованию этих уравнений обусловлен большим количеством приложений в различных областях механики. Они возникают при моделировании течений неньютоновских жидкостей, как дилатантных ($p_i > 2$), так и псевдопластичных ($p_i < 2$), в моделях нелинейной упругости, теории капиллярных поверхностей и гляциологии, при описании течений жидкости в пористых средах. Отметим также использование уравнений вида (1.1) при моделировании течений электрореологических и термореологических жидкостей [1–4], а также в обработке сигналов и изображений [5, 6].

К настоящему моменту существует обширная литература, посвящённая вопросам глобального существования соболевских решений задачи (1.1)–(1.3) (см. [7] и ссылки в ней). Наряду с соболевскими решениями исследование разрешимости задач вида (1.1)–(1.3), а также их изотропных аналогов, проводится в классе вязких по Лионсу решений [8–12]. В работах [13–15] исследуется эквивалентность соболевских и вязких решений. Отметим также работы [16–24], в которых исследуются уравнения, содержащие градиентные члены.

Нас интересуют решения анизотропных уравнений, обладающие ограниченными пространственными производными, т. е. решения, имеющие максимальную гладкость, известную на сегодняшний день. В [25] были получены результаты о регулярности решения задачи Дирихле для анизотропного параболического уравнения вида

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} (|u_{x_i}|^{p_i-2} u_{x_i})_{x_i} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_T$$

с постоянными p_i, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область. Доказано, что при условии

$$2 \leqslant \min_i p_i \leqslant \max_i p_i < \min_i p_i + 4/n \tag{1.4}$$

любое слабое решение $u \in \mathbb{L}^{p^-}(0, T; \mathbb{W}^{1,p^-}(\Omega)) \cap \mathbb{L}^{p^+}_{\text{loc}}\big(0, T; \mathbb{W}^{1,p^+}_{\text{loc}}(\Omega)\big)$ обладает локально ограниченным градиентом ∇u, где $p^- = \min_i p_i$, $p^+ = \max_i p_i$. Более того, в случае, когда p_i удовлетворяют несколько более жёстким ограничениям вида

$$2 \leqslant \min_i p_i \leqslant \max_i p_i < \min_i p_i + \frac{4}{n+2}, \tag{1.5}$$

удалось доказать теорему существования указанного слабого решения, производная по времени которого $u_t \in \mathbb{L}^{\frac{p^-}{p^+-1}}(0, T; \mathbb{W}^{-1,\frac{p^-}{p^+-1}}(\Omega))$, для неоднородной начально-краевой задачи при достаточно общих предположениях относительно начальной функции. Отметим также работы о существовании и локальной липшицевой регулярности вязких по Лионсу решений для эллиптического аналога уравнения (1.1) в изотропном случае [9, 10].

В работах [26, 27] был определён достаточно широкий класс анизотропных уравнений, для которых построены решения указанной выше регулярности.

В [26] доказано существование соболевского решения в случае, когда $B = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i u_{x_i} + \lambda g(u) + f(t, x)$, c_i, λ — постоянные, обладающего ограниченными пространственными производными. В [27] мы доказываем существование вязкого по Лионсу решения указанной выше гладкости в случае, когда функция $B = g(t, u, \nabla u) - \lambda u + f(t, x)$ не удовлетворяет условию Бернштейна — Нагумо. В [25] показатели анизотропности удовлетворяют условиям (1.4), (1.5), в [9, 10] все

$p_i = p$. В [26, 27] никаких ограничений на взаимосвязь между показателями p_i нет. В то же время одним существенным условием, позволившим получить результаты в [26, 27], наряду с определённой гладкостью данных задачи, является требование к области Ω, которая удовлетворяет следующим условиям: область Ω является либо параллелепипедом $\Omega = (-l_1, l_1)\times\cdots\times(-l_n, l_n)$, где l_i, $i = 1, \ldots, n$, — некоторые положительные постоянные, либо Ω — выпуклая область и части границы $\partial\Omega$, лежащие в полупространствах $x_i < 0$ и $x_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, могут быть записаны в виде

$$x_i = F_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \quad \text{и} \quad x_i = G_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \tag{A}$$

соответственно, где F_i и G_i являются $\mathbb{C}^2$-функциями своих переменных.

В данной работе мы отказываемся от этих условий на область Ω и формулируем достаточные условия существования решения с ограниченными пространственными производными для областей с границей класса $\mathbb{C}^1$, которые удовлетворяют условию внешней сферы. Используя гладкость входных данных и условие внешней сферы, нам удаётся существенно обобщить условие (1.5), приведённое в [25].

Теорема существования для задачи вида (1.1)–(1.3) будет сформулирована в классе вязких по Лионсу [28] решений. В конце работы мы сделаем несколько замечаний о существовании соболевских решений для (1.1)–(1.3).

Рассмотрим следующее уравнение:

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} (|u_{x_i}|^{p_i(t)-2} u_{x_i})_{x_i} = g(t, \nabla u) - \lambda u + f(t, x) \quad \text{в} \quad \Omega_T \tag{1.6}$$

с начально-краевыми условиями (1.2), (1.3), где λ — положительная постоянная. Предположим, что

$$|u_0(x) - u_0(y)| \leqslant K|x - y|, \quad K \geqslant 0, \tag{1.7}$$

$g(t, 0) = 0$, а показатели анизотропности удовлетворяют неравенствам $p_i(t) \geqslant 2$, $i = 1, \ldots, n$.

Дадим определение вязкого решения для параболических уравнений, следуя [29] (см. также [11]). Заметим, что для произвольной функции $\phi(t, x) \in \mathbb{C}^{1,2}_{t,x}(\Omega_T)$ имеем

$$\phi_t - \sum_{i=1}^{n} \left(|\phi_{x_i}|^{p_i(t)-2} \phi_{x_i}\right)_{x_i} = \phi_t - \sum_{i=1}^{n} (p_i(t) - 1)|\phi_{x_i}|^{p_i(t)-2} \phi_{x_i x_i}. \tag{1.8}$$

Чтобы определить понятие вязкого решения, введём оператор

$$\Phi(t, x, u, q, X) = \sum_{i=1}^{n} (p_i(t) - 1)|q_i|^{p_i(t)-2} X_{ii} + g(t, q) - \lambda u + f(t, x),$$

где $q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}^n$, $X = \{X_{ij}\} \in \mathbb{S}^n$, $\mathbb{S}^n$ — пространство симметричных матриц.

Определение 1.1. Будем говорить, что функция $u(t, x)$ является вязким субрешением (суперрешением) задачи (1.6), (1.2), (1.3), если

$$u \leqslant 0 \ (\geqslant 0) \quad \text{на} \quad (0, T) \times \partial\Omega, \quad u(0, x) \leqslant u_0(x) \ (\geqslant u_0(x)) \quad \text{в} \quad \Omega$$

и для произвольной функции $\phi(t, x) \in \mathbb{C}^{1,2}_{t,x}(\Omega_T)$, удовлетворяющей для $(t, x), (t_0, x_0) \in \Omega_T$ условиям

$$u(t, x) \leqslant \phi(t, x) \ (\geqslant \phi(t, x)), \quad u(t_0, x_0) = \phi(t_0, x_0),$$

имеет место

$$\phi_t(t_0, x_0) - \Phi(t_0, x_0, \phi(t_0, x_0), \nabla\phi(t_0, x_0), \nabla^2\phi(t_0, x_0)) \leqslant 0 \ (\geqslant 0).$$

Непрерывная функция $u(t,x)$ является вязким решением задачи (1.6), (1.2), (1.3), если она одновременно является суб- и суперрешением.

Хорошо известно, что одним из стандартных условий в теории вязких решений, налагаемых на функцию Φ, является монотонность по переменной u, что в нашем случае означает $\lambda > 0$. Очевидно, что с помощью преобразования сдвига по времени можно всегда перейти от исходной задачи с произвольным λ к задаче с $\lambda > 0$ (см. [27], пример 6 во введении). Учитывая это, в дальнейшем мы будем считать, что такая замена переменных уже проведена, если это необходимо, и $\lambda > 0$.

Теорема 1.1. *Пусть Ω удовлетворяет условию внешней сферы, $\partial\Omega \in \mathbb{C}^1$, $g(t,\nabla u) \in \mathbb{C}^1([0,T]\times\mathbb{R}^n)$, $p_i(t) \in \mathbb{C}^\beta([0,T])$ при некотором $0 < \beta < 1$, $i = 1,\dots,n$, $f(t,x) \in \mathbb{C}^1(\overline{\Omega}_T)$, $\lambda > 0$. Пусть $u_0(x)$ удовлетворяет* (1.7)*. Более того, предположим, что $p_i(t) \geqslant 2$, $i = 1,\dots,n$, и выполнено условие*

$$\max_i p_i(t) \leqslant 2\min_i p_i(t), \quad t \in [0,T], \tag{1.9}$$

а функция g удовлетворяет условию

$$|g(t,\nabla u)| \leqslant \gamma|\nabla u|^{p_-(t)}, \quad p_-(t) = \min_i p_i(t), \quad \gamma = \mathrm{const} \geqslant 0. \tag{1.10}$$

Тогда для произвольного $T > 0$, существует единственное вязкое решение задачи (1.6), (1.2), (1.3) *такое, что $u(t,x)$ является непрерывной по Гёльдеру по переменной t с показателем $1/2$, непрерывной по Липшицу по пространственным переменным.*

Отметим, что существование непрерывного по Липшицу по пространственным переменным решения исходной задачи доказано в случае, когда показатели анизотропности p_i зависят от времени. Кроме того, указанный результат получен для уравнения, содержащего нелинейные градиентные члены.

Пример 1.1. Рассмотрим задачу вида (1.6), (1.2), (1.3) для уравнения

$$u_t - \sum_{i=1}^n (|u_{x_i}|^{p(t)-2}u_{x_i})_{x_i} = \prod_{i=1}^n |u_{x_i}|^{s_i} - u + f(t,x) \quad \text{в} \quad \Omega_T,$$

где $s_i > 1$, $p(t) \geqslant 2$, $p_i(t) \in \mathbb{C}^\beta([0,T])$, $f(t,x) \in \mathbb{C}^1(\overline{\Omega}_T)$. Из теоремы 1.1 вытекает существование решения указанной гладкости при $\sum\limits_{i=1}^n s_i \leqslant p_-(t)$.

Пример 1.2. Рассмотрим уравнение

$$u_t - \sum_{i=1}^n (|u_{x_i}|^{p(t)-2}u_{x_i})_{x_i} = |\nabla u|^{p(t)} - u + f(t,x) \quad \text{в} \quad \Omega_T.$$

Из теоремы 1.1 вытекает существование решения указанной гладкости при $p(t) \geqslant 2$, $p(t) \in \mathbb{C}^\beta([0,T])$, $f(t,x) \in \mathbb{C}^1(\overline{\Omega}_T)$.

2. АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ КЛАССИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ РЕГУЛЯРИЗОВАННОЙ ЗАДАЧИ

Методика получения наших результатов базируется на аппроксимации искомого решения исходной задачи гладкими функциями, являющимися классическими решениями регуляризованной задачи. Для получения решений указанной гладкости одним из ключевых моментов является вывод априорных оценок для классических решений регуляризованной задачи, не зависящих от ε – параметра регуляризации. Это достигается, в частности, с помощью условия (A), налагаемого на область Ω (либо существенно пользуемся тем, что Ω — параллелепипед). В то же время отметим, что условие (A) (либо то, что Ω — параллелепипед) используется только для получения априорной оценки градиента решения. Отказ от условия (A) (либо от того, что Ω — параллелепипед) приводит к необходимости получения новых априорных оценок, но только лишь для градиента решения.

Рассмотрим регуляризацию исходного уравнения в области Ω_T:

$$u_{\varepsilon t} - \sum_{i=1}^{n} \left(\left(u_{\varepsilon x_i}^{\alpha_i} + \varepsilon \right)^{\frac{p_i(t)-2}{\alpha_i}} u_{\varepsilon x_i} \right)_{x_i} = g(t, \nabla u_\varepsilon) - \lambda u_\varepsilon + f(t,x), \tag{2.1}$$

где $\alpha_i > 0$ — постоянные, $\alpha_i = r_i/m_i$ с положительными целыми r_i и m_i, $r_i < m_i$ и r_i — чётное число. Перепишем (2.1) в недивергентном виде (для простоты вместо u_ε будем писать u):

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} a_{i\varepsilon}(t, u_{x_i}) u_{x_i x_i} = g(t, \nabla u) - \lambda u + f, \tag{2.2}$$

где

$$a_{i\varepsilon}(t,z) = (z^{\alpha_i} + \varepsilon)^{\frac{p_i(t)-2}{\alpha_i} - 1} ((p_i(t) - 1)\, z^{\alpha_i} + \varepsilon).$$

Наша цель — получить равномерные по ε априорные оценки классических решений регуляризованной задачи. Это даст возможность предельным переходом получить вязкое решение, гладкость которого указана в теореме 1.2.

Положим

$$M_1 = \min\left\{ \frac{1}{\lambda} \min_{\overline{\Omega}_T} f, \min_{\overline{\Omega}} u_0, 0 \right\}, \quad M_2 = \max\left\{ \frac{1}{\lambda} \max_{\overline{\Omega}_T} f, \max_{\overline{\Omega}} u_0, 0 \right\}.$$

Следующая лемма является простым следствием принципа максимума, применённого к задаче (2.2), (1.2), (1.3).

Лемма 2.1. *Пусть Ω — ограниченная область. Тогда для любого классического решения задачи* (2.2), (1.2), (1.3) *мы имеем следующую оценку:*

$$M_1 \leqslant u(t,x) \leqslant M_2. \tag{2.3}$$

Для общности результата выведем априорную оценку градиента решения в случае уравнения вида

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} a_{i\varepsilon}(t, u_{x_i}) u_{x_i x_i} = g(t, \nabla u) + c(t,x) b(u) + f(t,x) \quad \text{в} \quad \Omega_T \tag{2.4}$$

с начально-краевыми условиями (1.2), (1.3), где Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющая условию внешней сферы. Докажем априорную оценку на градиент решения задачи (2.4), (1.2), (1.3) в предположении, что оценка (2.3) на само решение у нас уже имеется. Положим

$$p_-(t) = \min_i p_i(t), \quad p_+ = \max_i \max_{t \in [0,T]} p_i(t).$$

Лемма 2.2. *Предположим, что для любого классического решения задачи* (2.4), (1.2), (1.3) *имеет место оценка* (2.3). *Пусть функции* $g(t, \nabla u)$, $c(t, x)$, $b(u)$, $f(t, x)$ *принадлежат* $\mathbb{C}^1$ *по своим аргументам,* $p_i(t) \in \mathbb{C}^\beta$, $0 < \beta < 1$, *а* Ω *— ограниченная область в* $\mathbb{R}^n$ *с границей* $\partial\Omega \in \mathbb{C}^1$, *удовлетворяющая условию внешней сферы. Более того, предположим, что* $p_i(t) \geqslant 2$, $i = 1, \ldots, n$, *и выполнено условие*

$$\max_i p_i(t) \leqslant 2 \min_i p_i(t), \quad t \in [0, T], \tag{2.5}$$

а функция g *удовлетворяет условию*

$$|g(t, \nabla u)| \leqslant \gamma |\nabla u|^{p_-(t)}. \tag{2.6}$$

Тогда для любого классического решения задачи (2.4), (1.2), (1.3) *имеет место следующая оценка:* $|\nabla u| \leqslant C$, *где постоянная* C *зависит от* $\|b\|_{\mathbb{C}^1}$, $\|f\|_{\mathbb{C}^1}$, $\|c\|_{\mathbb{C}^1}$, K *(постоянная Липшица функции* $u_0(x)$*),* T, n, γ, p_+, $p_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, $M = \max\{|M_1|, |M_2|\}$.

Доказательство. Мы будем использовать классический метод Бернштейна получения априорной оценки градиента решения, заключающийся в дифференцировании уравнения по переменной x_i, $i = 1, \ldots, n$, с последующим домножением на u_{x_i} и суммированием по всем i [30–32]. Применяя метод Бернштейна к уравнению (2.4), для функции $v = |\nabla u|^2$ получаем следующее неравенство:

$$\sum_{i=1}^n a_{i\varepsilon}(t, u_{x_i}) v_{x_i x_i} - v_t + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial a_{i\varepsilon}(t, u_{x_i})}{\partial u_{x_i}} u_{x_i x_i} + 2 g_{u_{x_i}} \right) v_{x_i} \\ + 2 \left(c(t, x) b'(u) + \frac{1}{|\nabla u|^2} \sum_{i=1}^n (c_{x_i} b(u) + f_{x_i}) u_{x_i} \right) v \geqslant 0.$$

Если $v \geqslant 1$, тогда существует постоянная K, зависящая от $\max|c|$, $\max|b|$, $\max|b'|$, $\max|c_{x_i}|$, $\max|f_{x_i}|$, такая, что

$$2 \left(c(t, x) b'(u) + \frac{1}{|\nabla u|^2} \sum_{i=1}^n (c_{x_i} b(u) + f_{x_i}) u_{x_i} \right) < K.$$

Для функции $\omega = v e^{-Kt}$ мы получаем

$$\sum_{i=1}^n a_{i\varepsilon}(t, u_{x_i}) \omega_{x_i x_i} - \omega_t + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial a_{i\varepsilon}(t, u_{x_i})}{\partial u_{x_i}} u_{x_i x_i} + 2 g_{u_{x_i}} \right) \omega_{x_i} \\ + \left[2 \left(c(t, x) b'(u) + \frac{1}{|\nabla|^2} \sum_{i=1}^n (c_{x_i} b(u) + f_{x_i}) u_{x_i} \right) - K \right] \omega \geqslant 0.$$

Применяя классический принцип максимума к последнему неравенству, мы заключаем, что $\omega \leqslant \max\limits_{\Gamma_T} \omega$, где Γ_T — параболическая граница области Ω_T и, как следствие,

$$v \leqslant \max\{e^{KT} \max_{\Gamma_T} v, 1\}.$$

Перейдём к оценке $\max v$ на множестве $(0, T] \times \partial\Omega$. Так как область Ω удовлетворяет условию внешней сферы, то для любой точки $x^0 \in \partial\Omega$ существует шар $B_R(y^0)$ с центром в точке y^0 радиуса R такой, что $x^0 = \partial\Omega \cap \overline{B}_R(y^0)$. Рассмотрим функцию расстояния вида

$r(x) \equiv |x-y^0|-R$. Положим $w = w(r)$, где w — гладкая функция, удовлетворяющая $w'(r) \geqslant 1$. Легко видеть, что выполняются следующие соотношения:

$$r_{x_i} = \frac{x_i - y_i^0}{|x-y^0|}, \quad r_{x_ix_i} = \frac{1}{|x-y^0|} - \frac{(x_i-y_i^0)^2}{|x-y^0|^3} \leqslant \frac{1}{R}.$$

Для функции w имеем

$$\begin{aligned} Lw(r) &\equiv \sum_{i=1}^n a_{i\varepsilon}(t, w_{x_i})w_{x_ix_i} + g(t,\nabla w) + c(t,x)b(u) + f(t,x) - w_t \\ &= w'\sum_{i=1}^n a_{i\varepsilon}(t, w_{x_i})r_{x_ix_i} + \frac{w''}{w'^2}\sum_{i=1}^n a_{i\varepsilon}(t, w_{x_i})r_{x_i}^2 w'^2 + g(t,\nabla w) + c(t,x)b(u) + f(t,x) \\ &\qquad\qquad \leqslant \frac{1}{R}w'\sum_{i=1}^n a_{i\varepsilon}(t, w_{x_i}) + \frac{w''}{w'^2}\sum_{i=1}^n a_{i\varepsilon}(t, w_{x_i})r_{x_i}^2 w'^2 + \gamma w'^{p_-} \\ &\qquad\qquad\qquad + \max_{(t,x)\in\Omega_T, |u|\leqslant M}(c(t,x)b(u) + f(t,x)), \end{aligned}$$

где $M = \max\{|M_1|, |M_2|\}$. Докажем, что существует постоянная μ, не зависящая от ε, такая, что неравенство

$$w'\sum_{i=1}^n a_{i\varepsilon}(t, w_{x_i}) \leqslant \mu\sum_{i=1}^n a_{i\varepsilon}(t, w_{x_i})r_{x_i}^2 w'^2 \tag{2.7}$$

имеет место при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ и при любых значениях ∇w. Учитывая то, что функции, входящие в (2.7), непрерывны по ε и компоненты вектора ∇w не обращаются в нуль одновременно ни в одной точке x, достаточно показать, что строгое неравенство в (2.7) имеет место при $\varepsilon = 0$. Таким образом, нам надо доказать, что для любого $t \in (0,T)$

$$w'\sum_{i=1}^n |w_{x_i}|^{p_i(t)-2} < \mu\sum_{i=1}^n |w_{x_i}|^{p_i(t)-2}r_{x_i}^2 w'^2. \tag{2.8}$$

Перепишем (2.8) в виде

$$w'\sum_{i=1}^n w'^{p_i(t)-2}|r_{x_i}|^{p_i(t)-2} < \mu\sum_{i=1}^n w'^{p_i(t)-2}|r_{x_i}|^{p_i(t)-2}r_{x_i}^2 w'^2. \tag{2.9}$$

Разделив (2.9) на w', получим

$$\sum_{i=1}^n w'^{p_i(t)-2}|r_{x_i}|^{p_i(t)-2} < \mu w'\sum_{i=1}^n w'^{p_i(t)-2}|r_{x_i}|^{p_i(t)-2}r_{x_i}^2. \tag{2.10}$$

Нетрудно заметить, что при любых фиксированных w' и r_{x_i} можно найти такое μ, что (2.10) будет иметь место. Причём существует μ_0 такое, что (2.10) имеет место сразу для всех $w' \leqslant n$ и любых r_{x_i} и $t \in (0,T)$. Действительно, из $w' \leqslant n$ и $|r_{x_i}| \leqslant 1$ следует

$$\sum_{i=1}^n w'^{p_i(t)-2}|r_{x_i}|^{p_i(t)-2} \leqslant n^{p_+-1}. \tag{2.11}$$

В то же время в силу $w' \geqslant 1$

$$\mu w'\sum_{i=1}^n w'^{p_i(t)-2}|r_{x_i}|^{p_i(t)-2}r_{x_i}^2 \geqslant \mu\sum_{i=1}^n |r_{x_i}|^{p_i(t)} \geqslant \mu r_0, \tag{2.12}$$

где $r_0 > 0$, так как непрерывная функция $\Xi(t,\xi_1,\ldots,\xi_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^{p_i(t)}$ достигает своего минимума, отличного от нуля, на замкнутом многообразии

$$\left\{(t,\xi_1,\ldots,\xi_n) \mid [0,T] \times \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 = 1\right)\right\}.$$

Откуда уже легко следует существование указанного $\mu = \mu_0 > n^{p_+-1}/r_0$. Следовательно, нам осталось показать, что (2.10) будет иметь место для всех $w' > n$ при произвольных r_{x_i} и $t \in (0,T)$ с некоторой постоянной μ_1. Ясно, что искомое $\mu = \max\{\mu_0,\mu_1\}$.

Отметим проблемы, возникающие при попытке определить постоянную μ_1. При оценке слагаемого вида $w'^{p_i(t)-2}|r_{x_i}|^{p_i(t)-2}$ из левой части (2.10) через подобное ему слагаемое в правой получаем неравенство

$$w'^{p_i(t)-2}|r_{x_i}|^{p_i(t)-2} < \mu_1 w' w'^{p_i(t)-2}|r_{x_i}|^{p_i(t)-2} r_{x_i}^2,$$

которое имеет место при

$$1 < \mu_1 w' r_{x_i}^2. \tag{2.13}$$

Легко видеть, что для того, чтобы (2.13) было верно при любых фиксированных $w' > n$ и $r_{x_i} \to 0$, необходимо, чтобы $\mu_1 \to \infty$. Таким образом, слагаемые вида $w'^{p_i(t)-2}|r_{x_i}|^{p_i(t)-2}$, при сколь угодно малых r_{x_i}, надо оценивать через другие слагаемые правой части (2.10). А в этом случае, уже при фиксации значений r_{x_i}, может возникнуть проблема при $w' \to \infty$, связанная с показателями $p_i(t)$. В то же время замечаем, что при $r_{x_i}^2 \geqslant 1/w'$ неравенство (2.13) будет выполняться при $\mu_1 > 1$. Представим левую часть (2.10) в виде

$$\sum_{i=1}^{n} w'^{p_i(t)-2}|r_{x_i}|^{p_i(t)-2} = \sum_{r_{x_i}^2 \leqslant w'^{-1}} w'^{p_i(t)-2}|r_{x_i}|^{p_i(t)-2} + \sum_{r_{x_i}^2 > w'^{-1}} w'^{p_i(t)-2}|r_{x_i}|^{p_i(t)-2}. \tag{2.14}$$

Вторая сумма в правой части (2.14) при каждом фиксированном t не пуста. Действительно, если во второй сумме нет членов, тогда получим

$$\sum_{i=1}^{n} r_{x_i}^2 \leqslant n\frac{1}{w'} < 1 \quad \text{при} \quad w' > n,$$

что противоречит равенству $\sum\limits_{i=1}^{n} r_{x_i}^2 = 1$, которому удовлетворяют r_{x_i}. Для любого индекса j_0, попавшего во вторую сумму в (2.14), имеем

$$w'^{p_{j_0}(t)-2}|r_{x_{j_0}}|^{p_{j_0}(t)-2} < \mu_1 w' w'^{p_{j_0}(t)-2}|r_{x_{j_0}}|^{p_{j_0}(t)-2} r_{j_0}^2,$$

так как $w' r_{j_0}^2 > 1$ для любого j_0 из второй суммы. Таким образом, все члены, входящие во вторую сумму в правой части (2.14), оцениваются через подобные слагаемые правой части (2.10). Предположим теперь, что первая сумма в правой части (2.14) содержит $0 < m \leqslant n-1$ членов, а вторая соответственно $n-m$. Тогда из того, что $\sum\limits_{r_{x_i}^2 \leqslant w'^{-1}} r_{x_i}^2 \leqslant \dfrac{m}{w'}$, следует

$$\sum_{r_{x_i}^2 > w'^{-1}} r_{x_i}^2 \geqslant 1 - \frac{m}{w'} > 1 - \frac{m}{n}.$$

Следовательно, существует по крайней мере один индекс i_0 из второй суммы в (2.14) такой, что

$$r_{x_{i_0}}^2 > \frac{1}{n-m}\left(1 - \frac{m}{n}\right) = \frac{1}{n}.$$

Покажем, что для любого индекса i_l, $l=1,\dots,m$, из первой суммы в правой части (2.14) существует постоянная μ_{1l} такая, что

$$w'^{p_{i_l}(t)-2}|r_{x_{i_l}}|^{p_{i_l}(t)-2} < \mu_{1l} w' w'^{p_{i_0}(t)-2}|r_{x_{i_0}}|^{p_{i_0}(t)-2} r_{i_0}^2. \tag{2.15}$$

Действительно, из условия $r_{x_{i_l}}^2 \leqslant 1/w'$ вытекает неравенство

$$w'^{p_{i_l}(t)-2}|r_{x_{i_l}}|^{p_{i_l}(t)-2} \leqslant w'^{p_{i_l}(t)-2} w'^{1/2(2-p_{i_l}(t))}.$$

В то же время

$$\mu_{1l} w'^{p_{i_0}(t)-1}|r_{x_{i_0}}|^{p_{i_0}(t)} > \mu_{1l} n^{-p_{i_0}(t)/2} w'^{p_{i_0}(t)-1} \geqslant w'^{p_{i_l}(t)-2} w'^{(2-p_{i_l}(t))/2}$$

при

$$\mu_{1l} n^{-p_{i_0}(t)/2} \geqslant 1 \quad \text{и} \quad 2p_{i_0}(t) \geqslant p_{il}(t), \quad t\in(0,T).$$

Так как i_0 и i_l могут совпадать с любым из индексов $k=1,\dots,n$, то неравенство (2.15) будет иметь место при $\mu_{1l} \geqslant n^{p_+/2}$ и выполнении (2.5). Так как $\max m = n-1$, то можно положить $\mu_1 = 1+(n-1)n^{p_+/2}$. Откуда при $\mu = \max\{\mu_0, 1+(n-1)n^{p_+/2}\}$ и выполнении (2.5) имеет место неравенство (2.7).

Покажем теперь, что существует постоянная μ_2 такая, что

$$\gamma w'^{p_-} + \max_{(t,x)\in\Omega_T,|u|\leqslant M}(c(t,x)b(u)+f(t,x)) \leqslant \mu_2 \sum_{i=1}^n w'^{p_i(t)}|r_{x_i}|^{p_i(t)}. \tag{2.16}$$

Заметим, что из $w' \geqslant 1$ следует

$$\sum_{i=1}^n w'^{p_i(t)}|r_{x_i}|^{p_i(t)} \geqslant \sum_{i=1}^n |r_{x_i}|^{p_i(t)} \geqslant r_0$$

для всех $t\in[0,T]$. Положив

$$\varkappa = \frac{\max_{(t,x)\in\Omega_T,|u|\leqslant M}(c(t,x)b(u)+f(t,x))}{r_0},$$

получим

$$\max_{(t,x)\in\Omega_T,|u|\leqslant M}(c(t,x)b(u)+f(t,x)) \leqslant \varkappa \sum_{i=1}^n w'^{p_i(t)}|r_{x_i}|^{p_i(t)}.$$

В то же время легко видеть, что

$$\tilde\varkappa \sum_{i=1}^n w'^{p_i(t)}|r_{x_i}|^{p_i(t)} \geqslant \tilde\varkappa w'^{p_-(t)} \sum_{i=1}^n |r_{x_i}|^{p_i(t)} \geqslant \tilde\varkappa r_0 w'^{p_-(t)} = \gamma w'^{p_-(t)}$$

при $\tilde\varkappa = \gamma/r_0$. Положив $\mu_2 = \varkappa + \tilde\varkappa$, мы получим неравенство (2.16). Из (2.7)–(2.16) вытекает, что

$$Lw(r) \leqslant \left(\frac{w''}{w'^2} + \nu\right) \sum_{i=1}^n a_{i\varepsilon}(w_{x_i}) r_{x_i}^2 w'^2 \tag{2.17}$$

с некоторым $\nu \geqslant \mu R^{-1} + \mu_2$.

Пусть теперь $w(r)$ является решением краевой задачи

$$w'' + \nu w'^2 = 0, \quad w(0)=0, \quad w(d)=M.$$

Очевидно, что решение этой задачи даётся формулой

$$w(r) = \frac{1}{\nu}\ln\left(1 + \frac{e^{M\nu} - 1}{d}r\right).$$

Легко видеть, что производная w' удовлетворяет неравенству

$$w' \geqslant \frac{1}{\nu d}\frac{e^{M\nu} - 1}{e^{M\nu}} \tag{2.18}$$

и может быть сделана больше либо равной единице при достаточно малых d. Рассмотрим цилиндр

$$\Omega^d_{x_0} = \{(t,x) \mid 0 < t \leqslant T, 0 < r(x) < d\} \cap \Omega_T.$$

Из (2.17) следует, что $Lw \leqslant 0$ в $\Omega^d_{x_0}$. На части границы $\Omega^d_{x_0}$, принадлежащей $(0,T] \times \partial\Omega$, мы получаем $u - w = -w < 0$. На части параболической границы, лежащей внутри области Ω_T (при $t > 0$), имеем $u - w = u - M \leqslant 0$. Из (2.18) вытекает, что при $t = 0$, выбирая d достаточно маленьким, можно добиться выполнения неравенства $u_0 \leqslant w$. Таким образом, из принципа максимума имеем $u(t,x) \leqslant w(r(x))$ в $\overline{\Omega}^d_{x_0}$. Аналогично можно показать, что $u(t,x) \geqslant -w(r(x))$ в $\overline{\Omega}^d_{x_0}$. Из последних двух неравенств немедленно вытекает требуемая оценка:

$$v(t,x_0) = |\nabla u(t,x_0)|^2 \leqslant nw'^2(0) = C.$$

Лемма 2.2 доказана. □

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1

Существование глобального классического решения задачи (2.2), (1.2), (1.3) вытекает из полученных в предыдущем разделе априорных оценок [31]. Пусть $\{\varepsilon_k\}$ — монотонная последовательность положительных чисел, стремящаяся к нулю при $k \to \infty$. Получим вязкое решение задачи (1.6), (1.2), (1.3) как предел классических решений u_{ε_k} при $k \to \infty$ задачи (2.2), (1.2), (1.3). Но прежде сформулируем лемму, которая является классическим результатом теории параболических уравнений [33] (см. также [34]).

Лемма 3.1. *Для любого классического решения задачи* (2.2), (1.2), (1.3) *выполняется следующее неравенство:*

$$|u_{\varepsilon_k}(t+h,x) - u_{\varepsilon_k}(t,x)| \leqslant C_0 h^{1/2}, 0 < h < 1, \quad t, t+h \in [0,T],$$

постоянная C_0 зависит от M, $w'(0)$, n, $\max|g(t,\nabla u_\varepsilon) - \lambda u_\varepsilon + f(t,x)|$, здесь максимум берётся по множеству $\overline{\Omega}_T \times [-M,M] \times Q$, где $Q = \{(q_1,\ldots,q_n) \mid q_i \in (-\sqrt{n}w'(0), \sqrt{n}w'(0))\}$.

Заметим, что равномерная непрерывность по Гёльдеру классических решений задачи (2.2), (1.2), (1.3) нам необходима для доказательства их равномерной сходимости при доказательстве существования вязкого решения исходной задачи.

Доказательство теоремы 1.1. Для упрощения обозначений мы опустим индекс k и будем писать ε и $\varepsilon \to 0$. Как известно [11], гладкая функция является вязким решением уравнения тогда и только тогда, когда она удовлетворяет ему в классическом смысле. Таким образом, классическое решение u_ε регуляризованной задачи (2.2), (1.2), (1.3) является также и вязким решением той же самой задачи. Заметим, что

$$\Phi(t,x,u,\nabla u,\nabla^2 u) = \sum_{i=1}^{n}(p_i(t) - 1)|u_{x_i}|^{p_i(t)-2}u_{x_i x_i} + g(t,\nabla u) - \lambda u + f(t,x).$$

Обозначим

$$\Phi_\varepsilon(t,x,u,\nabla u,\nabla^2 u)=\sum_{i=1}^{n}(u_{x_i}^{\alpha_i}+\varepsilon)^{\frac{p_i(t)-2}{\alpha_i}-1}((p_i(t)-1)u_{x_i}^{\alpha_i}+\varepsilon)u_{x_ix_i}+g(t,\nabla u)-\lambda u+f(t,x),$$

Одним из стандартных свойств вязких решений является следующее [28, 35, 36]

Утверждение (свойство устойчивости). *Пусть $\Phi_\varepsilon(t,x,u,p,X)\colon \mathcal{G}\mapsto\mathbb{R}$ непрерывна на $\mathcal{G}=\Omega_T\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{S}^n$, где $\mathbb{S}^n$ — пространство симметричных $n\times n$ матриц, u_ε непрерывна на $\overline{\Omega}_T$. Пусть u_ε — вязкое решение уравнения: $u_t-\Phi_\varepsilon(t,x,u,\nabla u,\nabla^2 u)=0$ в Ω_T при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$; $\Phi_\varepsilon(t,x,r,p,X)\to\Phi(t,x,r,p,X)$ равномерно на компактных подмножествах $\mathcal{G}$; $u_\varepsilon\to u$ равномерно на компактных подмножествах Ω_T при $\varepsilon\to 0$. Тогда u является вязким решением уравнения: $u_t-\Phi(t,x,u,\nabla u,\nabla^2 u)=0$ в Ω_T.*

Из лемм 2.2, 3.1 мы получаем существование непрерывной функции $u(t,x)$ такой, что $u_\varepsilon\to u$ равномерно на компактных подмножествах Ω_T. Непосредственными вычислениями можно показать, что на каждом компактном подмножестве $\mathcal{G}$ функция Φ_ε сходится равномерно к Φ. Действительно, положим

$$\begin{gathered}\Phi_{1\varepsilon}(t,x,r,q,X)=\sum_{i=1}^{n}\big(q_i^{\alpha_i}+\varepsilon\big)^{\frac{p_i(t)-2}{\alpha_i}-1}\big((p_i(t)-1)q_i^{\alpha_i}+\varepsilon\big)X_{ii},\\ \Phi_1(t,x,r,q,X)=\sum_{i=1}^{n}(p_i(t)-1)|q_i|^{p_i(t)-2}X_{ii}.\end{gathered}\tag{3.1}$$

Сходимость $\Phi_\varepsilon\to\Phi$ очевидно эквивалентна сходимости $\Phi_{1\varepsilon}\to\Phi_1$. Легко видеть, что $\Phi_{1\varepsilon}\to\Phi_1$ на каждом компактном подмножестве $\mathcal{G}$ при $\varepsilon\to 0$. Для того чтобы доказать равномерную сходимость $\Phi_{1\varepsilon}\to\Phi_1$, достаточно заметить, что $\Phi_{1\varepsilon}$ и Φ_1 — непрерывные функции и для любого $i=1,\ldots,n$ функции

$$\big(q_i^{\alpha_i}+\varepsilon\big)^{\frac{p_i(t)-2}{\alpha_i}-1}\big((p_i(t)-1)q_i^{\alpha_i}+\varepsilon\big)$$

являются убывающими при $\varepsilon\to 0$. Принимая во внимание свойство устойчивости вязких решений, начально-краевые условия (1.2), (1.3) и равенство (1.8), мы заключаем, что $u=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}u_\varepsilon$ является вязким решением задачи (1.6), (1.2), (1.3). Из равномерных по ε оценок, полученных в леммах 2.2 и 3.1, вытекает, что построенное решение является непрерывным по Гёльдеру по времени с показателем 1/2 и непрерывным по Липшицу по пространственным переменным в Ω_T. Можно легко проверить выполнение теоремы сравнения для непрерывных вязких суб- и суперрешений задачи (1.6), (1.2), (1.3) (см. теорему 8.2 [28, гл. 8]). Следовательно, полученное решение является единственным. Теорема 1.1 доказана. □

Замечание (о существовании соболевских решений в областях, удовлетворяющих условию внешней сферы). В работе [31] рассматривалась начально-краевая задача для уравнения

$$u_t-\sum_{i=1}^{n}(|u_{x_i}|^{p_i(t)-2}u_{x_i})_{x_i}=\sum_{i=1}^{n}c_iu_{x_i}+\lambda g(u)+f(t,x)\quad\text{в}\quad\Omega_T$$

с условиями (1.2), (1.3). Было доказано существование соболевского, понимаемого в интегральном смысле, решения, являющегося непрерывным по Липшицу по пространственным переменным и непрерывным по Гёльдеру по времени. Наличие только лишь линейного градиентного члена объясняется невозможностью осуществить предельный переход в нелинейном градиенте после регуляризации с целью получения решения указанной гладкости. Отметим, что в этом случае никакой монотонности оператора по переменной u мы не требуем.

Действуя так же, как в [31], заменяя леммы 3.1, 3.2 [31] на лемму 2.2 из настоящей работы, можно доказать теорему, аналогичную теореме 1 из [31].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Acerbi E., Mingione G.* Regularity results for stationary electro-rheological fluids // Arch. Ration. Mech. Anal. 2002. V. 164. P. 213–259.
2. *Antontsev S. N., Rodrigues J. F.* On stationary thermo-rheological viscous flows // Ann. Univ. Ferrara. Sez. VII Sci. Mat. 2006. V. 52. P. 19–36.
3. *Rajagopal K., Ružička M.* Mathematical modelling of electro-rheological fluids // Contin. Mech. Thermodyn. 2001. V. 13. P. 59–78.
4. *Ružička M.* Electrorheological fluids: modeling and mathematical theory // Berlin: Springer-Verl., 2000, V. 1748. (Lecture Notes in Mathematics).
5. *Aboulaicha R., Meskinea D., Souissia A.* New diffusion models in image processing // Comput. Math. Appl. 2008. V. 56. P. 874–882.
6. *Chen Y., Levine S., Rao M.* Variable exponent, linear growth functionals in image restoration // SIAM J. Appl. Math. 2006. V. 66. P. 1383–1406.
7. *Antontsev S., Shmarev S.* Evolution PDEs with nonstandard growth conditions: existence, uniqueness, localization, blow-up. Atlantis Press, 2015. V. 4. (Atlantis Studies in Differential Equations).
8. *Belloni M., Kawohl B.* The pseudo-p Laplace eigenvalue problem and viscosity solutions as $p \to \infty$ // ESAIM: Control Optim. Calc. Variations. 2004. V. 10. P. 28–52.
9. *Birindelli I., Demengel F.* Existence and regularity results for fully nonlinear operators on the model of the pseudo Pucci's operators // J. Elliptic Parabolic Equ. 2017. V. 2, N 1–2. P. 171–187.
10. *Demengel F.* Lipschitz interior regularity for the viscosity and weak solutions of the pseudo p-Laplacian equation // Adv. Differ. Equ. 2016. V. 21, N 3–4. P. 373–400.
11. *Juutinen P.* On the definition of viscosity solutions for parabolic equations // Proc. Amer. Math. Soc. 2001. V. 129, N 10. P. 2907–2911.
12. *Tersenov Ar. S.* Viscosity subsolutions and supersolutions for non-uniformly and degenerate elliptic equations // Arch. Mathematicum. 2009. V. 45, N 1. P. 19–35.
13. *Juutinen P., Lindqvist P., Manfredi J. J.* On the equivalence of the viscosity solutions and weak solutions for a quasilinear equation // SIAM J. Math. Anal. 2001. V. 33, N 3. P. 699–717.
14. *Siltakoski J.* Equivalence of viscosity and weak solutions for a p-parabolic equation // J. Evol. Equ. 2021. V. 21. P. 2047–2080.
15. *Zhan H.* On Solutions of a Parabolic Equation with Nonstandard Growth Condition // J. Function Spaces. 2020. Article number 9397620. P. 1–10.
16. *Bendahmane M., Karlsen K.H.* Nonlinear anisotropic elliptic and parabolic equations in $\mathbb{R}^N$ with advection and lower order terms and locally integrable data // Potential Anal. 2005. V. 22 P. 207–227.
17. *Dall'Aglio A., Giachetti D., Segura de Leon S.* Global existence for parabolic problems involving the p-Laplacian and a critical gradient term // Indiana Univ. Math. J. 2009. V. 58, N 1. P. 1–48.
18. *Figueiredo D. G., Sanchez J., Ubilla P.* Quasilinear equations with dependence on the gradient // Nonlinear Anal. Theory Meth. Appl. 2009. V. 71. P. 4862–4868.
19. *Fu Y., Pan N.* Existence of solutions for nonlinear parabolic problem with $p(x)$-growth // J. Math. Anal. Appl. 2010. V. 362. P. 313–326.
20. *Iturriaga L., Lorca S., Sanchez J.* Existence and multiplicity results for the p-Laplacian with a p-gradient term // NoDEA Non-Linear Differ. Equ. Appl. 2008. V. 15. P. 729–743.
21. *Li J., Yin J., Ke Y.* Existence of positive solutions for the p-Laplacian with p-gradient term // J. Math. Anal. Appl. 2011. V. 383. P. 147–158.
22. *Nakao M., Chen C.* Global existence and gradient estimates for the quasilinear parabolic equations of m-Laplacian type with a nonlinear convection term // J. Differ. Equ. 2000. V. 162. P. 224–250.

23. *Zhan H.* On anisotropic parabolic equations with a nonlinear convection term depending on the spatial variable // Adv. Differ. Equ. 2019. V. 27. P. 1–26.
24. *Zhao J.* Existence and nonexistence of solutions for $u_t = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + f(\nabla u, u, x, t)$ // J. Math. Anal. Appl. 1993. V. 172, N 1. P. 130–146.
25. *Bögelein V., Duzaar F., Marcellini P.* Parabolic equations with p, q-growth // J. Math. Pures Appl. 2013. V. 100, N 4. P. 535–563.
26. *Терсенов Ал. С., Терсенов Ар. С.* О квазилинейных параболических уравнениях с переменным показателем анизотропности // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 1. С. 201–223.
27. *Tersenov Al. S., Tersenov Ar. S.* Existence results for anisotropic quasilinear parabolic equations with time-dependent exponents and gradient term // J. Math. Anal. Appl. 2019. V. 480, N 1. Article number 123386.
28. *Crandall M. G., Ishii H., Lions P. L.* User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations // Bull. Amer. Math. Soc. 1992. V. 27. P. 1–67.
29. *Wang L.* On the regularity theory of fully nonlinear parabolic equations I // Comm. Pure. Appl. Math. 1992. V. 45. P. 27–76.
30. *Бернштейн С. Н.* Собрание сочинений. Том III: Дифференциальные уравнения, вариационное исчисление и геометрия. М.: Изд-во АН СССР, 1960.
31. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
32. *Starovoitov V. N., Tersenov Al. S.* Singular and degenerate anisotropic parabolic equations with a nonlinear source // Nonlinear Anal., Theory Meth. Appl. 2010. V. 72, N 6. P. 3009–3027.
33. *Gilding B. H.* Hölder continuity of solutions of parabolic equations // J. London Math. Soc. 1976. V. 13, N 1. P. 103–106.
34. *Kruzhkov S. N.* Quasilinear parabolic equations and systems with two independent variables // Topics in Modern Math. N. Y.: Consultant Bureau, 1985. P. 217–272.
35. *Ishii H.* On uniqueness and existence of viscosity solutions of fully nonlinear second-order elliptic PDE's // Comm. Pure Appl. Math. 1989. V. 42. P. 14–45.
36. *Ishii H., Lions P.L.* Viscosity solutions of fully nonlinear second-order elliptic partial differential equations // J. Differ. Equ. 1990. V. 83. P. 26–78.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 517.95

ON THE SOLVABILITY OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR ANISOTROPIC PARABOLIC EQUATIONS IN NON-CONVEX DOMAINS

© 2022 Ar. S. Tersenov

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
pr. Acad. Koptyuga 4, Novosibirsk 630090, Russia

E-mail: aterseno@math.nsc.ru

Received 21.09.2021, revised 21.09.2021, accepted 21.10.2021

Abstract. The Cauchy—Dirichlet problem in non-convex domains for anisotropic parabolic equation with time-dependent exponents and gradient term is considered. We state sufficient conditions that guarantee the existence and uniqueness of a viscosity solution which is Lipschitz continuous in the space variables and Hölder continuous in time.

Keywords: boundary value problems, anisotropic equations, a priori estimates, viscosity solutions.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.110

REFERENCES

1. Acerbi E., Mingione G. Regularity results for stationary electro-rheological fluids. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 2002, Vol. 164, pp. 213–259.
2. Antontsev S. N., Rodrigues J. F. On stationary thermo-rheological viscous flows. *Ann. Univ. Ferrara. Sez. VII Sci. Mat.*, 2006, Vol. 52, pp. 19–36.
3. Rajagopal K., Ružička M. Mathematical modelling of electro-rheological fluids. *Contin. Mech. Thermodyn.*, 2001, Vol. 13, pp. 59–78.
4. Ružička M. Electrorheological fluids: modeling and mathematical theory. Berlin: Springer-Verl., 2000, V. 1748. (Lecture Notes in Mathematics).
5. Aboulaicha R., Meskinea D., Souissia A. New diffusion models in image processing. *Comput. Math. Appl.*, 2008, Vol. 56, pp. 874–882.
6. Chen Y., Levine S., Rao M. Variable exponent, linear growth functionals in image restoration. *SIAM J. Appl. Math.*, 2006, Vol. 66, pp. 1383–1406.
7. Antontsev S., Shmarev S. Evolution PDEs with nonstandard growth conditions: existence, uniqueness, localization, blow-up. Atlantis Press, 2015. V. 4. (Atlantis Studies in Differential Equations).
8. Belloni M., Kawohl B. The pseudo-p Laplace eigenvalue problem and viscosity solutions as $p \to \infty$. *ESAIM: Control Optim. Calc. Variations*, 2004, Vol. 10, pp. 28–52.
9. Birindelli I., Demengel F. Existence and regularity results for fully nonlinear operators on the model of the pseudo Pucci's operators. *J. Elliptic Parabolic Equ.*, 2017, Vol. 2, No. 1–2, pp. 171–187.
10. Demengel F. Lipschitz interior regularity for the viscosity and weak solutions of the pseudo p-Laplacian equation. *Adv. Differ. Equ.*, 2016, Vol. 21, No. 3–4, pp. 373–400.
11. Juutinen P. On the definition of viscosity solutions for parabolic equations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2001, Vol. 129, No. 10, pp. 2907–2911.

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2022, Vol. 16, No. 1.

12. Tersenov Ar. S. Viscosity subsolutions and supersolutions for non-uniformly and degenerate elliptic equations. *Arch. Mathematicum*, 2009, Vol. 45, No. 1, pp. 19–35.
13. Juutinen P., Lindqvist P., Manfredi J. J. On the equivalence of the viscosity solutions and weak solutions for a quasilinear equation. *SIAM J. Math. Anal.*, 2001, Vol. 33, No. 3, pp. 699–717.
14. Siltakoski J. Equivalence of viscosity and weak solutions for a p-parabolic equation. *J. Evol. Equ.*, 2021, Vol. 21, pp. 2047–2080.
15. Zhan H. On Solutions of a Parabolic Equation with Nonstandard Growth Condition. *J. Function Spaces*, 2020, Article number 9397620, pp. 1–10.
16. Bendahmane M., Karlsen K.H. Nonlinear anisotropic elliptic and parabolic equations in $\mathbb{R}^N$ with advection and lower order terms and locally integrable data // Potential Anal. 2005. V. 22 P. 207–227.
17. Dall'Aglio A., Giachetti D., Segura de Leon S. Global existence for parabolic problems involving the p-Laplacian and a critical gradient term. *Indiana Univ. Math. J.*, 2009, Vol. 58, No. 1, pp. 1–48.
18. Figueiredo D. G., Sanchez J., Ubilla P. Quasilinear equations with dependence on the gradient. *Nonlinear Anal. Theory Meth. Appl.*, 2009, Vol. 71, pp. 4862–4868.
19. Fu Y., Pan N. Existence of solutions for nonlinear parabolic problem with $p(x)$-growth. *J. Math. Anal. Appl.*, 2010, Vol. 362, pp. 313–326.
20. Iturriaga L., Lorca S., Sanchez J. Existence and multiplicity results for the p-Laplacian with a p-gradient term. *NoDEA Non-Linear Differ. Equ. Appl.*, 2008, Vol. 15, pp. 729–743.
21. Li J., Yin J., Ke Y. Existence of positive solutions for the p-Laplacian with p-gradient term. *J. Math. Anal. Appl.*, 2011, Vol. 383, pp. 147–158.
22. Nakao M., Chen C. Global existence and gradient estimates for the quasilinear parabolic equations of m-Laplacian type with a nonlinear convection term. *J. Differ. Equ.*, 2000, Vol. 162, pp. 224–250.
23. Zhan H. On anisotropic parabolic equations with a nonlinear convection term depending on the spatial variable. *Adv. Differ. Equ.*, 2019, Vol. 27, pp. 1–26.
24. Zhao J. Existence and nonexistence of solutions for $u_t = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + f(\nabla u, u, x, t)$. *J. Math. Anal. Appl.*, 1993, Vol. 172, No. 1, pp. 130–146.
25. Bögelein V., Duzaar F., Marcellini P. Parabolic equations with p, q-growth. *J. Math. Pures Appl.*, 2013, Vol. 100, No. 4, pp. 535–563.
26. Tersenov Al.S., Tersenov Ar.S. On quasilinear anisotropic parabolic equations with time-dependent exponents. *Sib. Math. J.*, 2020, Vol. 61, pp. 159–177.
27. Tersenov Al. S., Tersenov Ar. S. Existence results for anisotropic quasilinear parabolic equations with time-dependent exponents and gradient term. *J. Math. Anal. Appl.*, 2019, Vol. 480, No. 1, Article number 123386.
28. Crandall M. G., Ishii H., Lions P. L. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations // Bull. Amer. Math. Soc. 1992. V. 27. P. 1–67.
29. Wang L. On the regularity theory of fully nonlinear parabolic equations I. *Comm. Pure. Appl. Math.*, 1992, Vol. 45, pp. 27–76.
30. Bernshtein S.N. Collected works. V. III: Differential equations, calculus of variations and geometry, Izdat. Akad. Nauk SSSR, Moscow, 1960 (in Russian).
31. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
32. Starovoitov V. N., Tersenov Al. S. Singular and degenerate anisotropic parabolic equations with a nonlinear source. *Nonlinear Anal., Theory Meth. Appl.*, 2010, Vol. 72, No. 6, pp. 3009–3027.
33. Gilding B. H. Hölder continuity of solutions of parabolic equations. *J. London Math. Soc.*, 1976, Vol. 13, No. 1, pp. 103–106.
34. Kruzhkov S. N. Quasilinear parabolic equations and systems with two independent variables. *Topics in Modern Math.*. N. Y.: Consultant Bureau, 1985, pp. 217–272.
35. Ishii H. On uniqueness and existence of viscosity solutions of fully nonlinear second-order elliptic PDE's. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1989, Vol. 42, pp. 14–45.

36. Ishii H., Lions P.L. Viscosity solutions of fully nonlinear second-order elliptic partial differential equations. *J. Differ. Equ.*, 1990, Vol. 83, pp. 26–78.