

# СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор	В. Л. Береснев
Зам. главного редактора	А. Л. Карчевский
Отв. секретарь	В. А. Дедок

## ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ

Г. В. Алексеев	С. Б. Медведев
Б. Д. Аннин	Р. Г. Новиков
В. С. Белоносов	Д. Е. Пальчунов
В. Н. Белых	П. И. Плотников
Ю. С. Волков	В. Г. Романов
В. П. Ильин	Е. М. Рудой
С. И. Кабанихин	В. М. Садовский
А. Н. Карапетянц	Д. И. Свириденко
М. В. Клибанов	А. С. Терсенов
С. С. Кутателадзе	В. С. Тимофеев
В. А. Левин	В. В. Шайдуров
Н. И. Макаренко	

Журнал основан в 1998 году  
Выходит 4 раза в год

**Том 25, № 2(90)**

Апрель – июнь, 2022 г.

## СОДЕРЖАНИЕ

- Андреев В. К., Вахрамеев И. В., Магденко Е. П. Тепловая конвекция во вращающейся трубе ..... 5
- Васюткин С. А., Чупахин А. П. Построение минимального базиса инвариантов для дифференциальной алгебры  $(2 \times 2)$ -матриц ..... 21
- Воронин А. Ф. К методу факторизации матриц-функций в алгебре Винера порядка 2 ..... 32
- Наумов В. В., Шамаев И. И., Местников С. В., Лазарев Н. П. Максимизация валового дохода для макроэкономической системы с потреблением, пропорциональным трудовым ресурсам ..... 46
- Прокудин А. Н., Фирсов С. В. Упругопластические деформации во вращающемся полом цилиндра с жёстким внешним покрытием при условии максимальных приведённых напряжений ..... 58
- Романов В. Г., Бугуева Т. В. Обратная задача для нелинейного волнового уравнения ..... 83
- Сенашов С. И., Савостьянова И. Л. Использование законов сохранения для решения краевых задач системы Моисила – Теодореску ..... 101
- Фадеев С. А., Дедок В. А., Бондаренко А. Н. Полиномиальный алгоритм классификации решений задачи Томсона ..... 110
- Хасанов А. Б., Хасанов Т. Г. Интегрирование нелинейного уравнения Кортевега — де Фриза с нагруженным членом и источником ..... 127

НОВОСИБИРСК

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

УДК 532.5.013.4

## ТЕПЛОВАЯ КОНВЕКЦИЯ ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ТРУБЕ

© 2022 В. К. Андреев<sup>1,2a</sup>, И. В. Вахрамеев<sup>2b</sup>, Е. П. Магденко<sup>1,2c</sup><sup>1</sup>Институт вычислительного моделирования СО РАН,  
Академгородок, 50/44, г. Красноярск 660036, Россия,<sup>2</sup>Институт математики и фундаментальной информатики СФУ,  
просп. Свободный, 79, г. Красноярск 660041, РоссияE-mails: <sup>a</sup>andr@icm.krasn.ru, <sup>b</sup>vahrameev@mail.ru,  
<sup>c</sup>magdenko\_evgeniy@icm.krasn.ruПоступила в редакцию 17.11.2021 г.; после доработки 30.12.2021 г.;  
принята к публикации 13.01.2022 г.

Исследована нестационарная краевая задача о движении жидкости во вращающейся цилиндрической трубе. Для описания движения жидкости используются уравнения Обербека — Буссинеска. С математической точки зрения задача является обратной относительно градиентов давлений вдоль оси цилиндра. На основе априорных оценок получены условия, при которых решение стационарной обратной задачи является экспоненциально устойчивым. В изображениях по Лапласу решение найдено в виде квадратур. Даны достаточные условия выхода решения нестационарной задачи с ростом времени на стационарный режим.

**Ключевые слова:** конвекция, обратная задача, априорные оценки, асимптотическое поведение, преобразование Лапласа.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.201

## ВВЕДЕНИЕ

Тепловая конвекция во вращающихся системах изучалась для астрофизических и геофизических приложений. Так, для моделирования крупномасштабной циркуляции в атмосфере Земли, обусловленной разницей температур между экваториальной и полярной областями, в [1, 2] изучена конвекция, вызванная центробежными силами, в быстро вращающемся цилиндре. В [3] подробно рассмотрена конвекция для случая, соответствующего полярным районам Земли. Работы [4, 5] посвящены исследованию конвекции во вращающемся цилиндрическом кольцевом слое с приложенным градиентом температуры: случай, относящийся к экваториальным областям Земли. В работе [6] с помощью прямого численного моделирования исследовано влияние соотношения радиусов на турбулентный конвективный теплообмен внутри концентрической кольцевой трубы. В [7] представлены результаты теоретических и экспериментальных исследований тепловой конвекции во вращающемся горизонтальном цилиндрическом слое жидкости. Рассматривается стационарная тепловая конвекция, которая определяется двумя механизмами — термовибрационным и центробежным. Показано, что результаты экспериментального исследования квазиравновесной устойчивости слоя хорошо согласуются с результатами, полученными в рамках численного расчета и линейной теории. В работе [8] изучено течение сжимаемой жидкости во вращающихся трубах с целью разработки нового

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Красноярского Математического центра Минобрнауки России в рамках создания и развития региональных научно-образовательных центров математики (Соглашение № 075-02-2021-1384).

типа теплообменников. Моделируется ситуация, когда вследствие вращения радиальное ускорение и осевой градиент температуры вызывают в осевом направлении циркуляционный поток. Жидкость движется вдоль градиента температуры около стенки и обратно около оси трубы (или около внутренней стенки кольцевого слоя). Поэтому такое возвратное течение переносит охлаждённую жидкость вдоль стенки и нагретую жидкость вдоль оси. Такая центробежная конвекция может обеспечить эффективную теплопередачу между горячим и холодным основаниями и защитить боковую стенку трубы от перегрева. В рамках модели Обербека — Буссенеска в [9] была рассмотрена конвекция во вращающейся круглой трубе, возбуждаемая взаимодействием центробежной силы и теплового потока вдоль трубы. В случае вращательной симметрии построены некоторые точные решения в отсутствие силы тяжести. В [10, 11] также изучалась гравитационная конвекция при вращении. В работах [12, 13] представлены результаты экспериментальных исследований тепловой конвекции в плоской и цилиндрической полостях, вращающихся вокруг горизонтальной оси.

Во всех перечисленных статьях угловая скорость была постоянной величиной, а конвективные течения предполагались стационарными. В настоящей работе угловая скорость круглой трубы зависит от времени, движение является вращательно симметричным и нестационарным. Кроме того, расход жидкости через поперечное сечение трубы также есть функция от времени. Массовые силы отсутствуют, что имеет место при достаточно большой угловой скорости вращения трубы (центробежное ускорение может быть в  $10^6$  раз больше ускорения силы тяжести в практических вихревых трубах [8]) или в условиях, близких к невесомости. Вдоль поверхности трубы приложен постоянный градиент температуры. С математической точки зрения возникает обратная начально-краевая задача, где дополнительно требуется определить нестационарный градиент давления вдоль оси трубы, причём условием переопределения и является задание расхода жидкости. Стоит отметить, что в упомянутых выше работах исследовались краевые прямые задачи стационарной конвекции.

Для поставленной задачи получены априорные оценки решения в равномерной метрике. Даны достаточные условия на входные данные (угловая скорость и расход), при которых решение с ростом времени выходит на стационарный режим по экспоненциальному закону. В изображениях по Лапласу решение найдено в виде квадратур. Численное обращение преобразования Лапласа позволяет получить количественные характеристики конвекции. В частности, установить условия, при которых появляются возвратные движения, которые могут значительно улучшить теплопередачу, что важно для теплообменников. Таким образом, задавая расход и угловую скорость как функции времени, можно управлять тепловой конвекцией в трубе.

Отметим, что близкая обратная задача рассматривалась в [9]. В ней изучалось нестационарное течение Пуазейля чисто вязкой жидкости в покоящейся цилиндрической трубе произвольного поперечного сечения с заданным расходом, зависящим от времени.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается задача о тепловой конвекции жидкости во вращающейся цилиндрической трубе. В качестве математической модели используются уравнения Обербека — Буссенеска. Пусть  $r, \varphi, z$  — цилиндрические координаты,  $t$  — время,  $a$  — радиус цилиндра и  $\omega(t)$  — угловая скорость его вращения вокруг оси  $z$ . Далее,  $u$  и  $w$  суть радиальная и осевая компоненты вектора скорости;  $v$  есть разность между азимутальной скоростью и скоростью вращения жидкости  $\omega(t)r$  как твёрдого тела;  $p$  — отклонение истинного давления от состояния равновесия  $\rho\omega^2(t)r^2/2$ ;  $\Theta$  — отклонение абсолютной температуры от её среднего значения  $\bar{\Theta} = \text{const}$ . Жидкость характеризуется следующими физическими параметрами: плотностью  $\rho$  при температуре  $\bar{\Theta}$ , кинематической вязкостью  $\nu$ , коэффициентами термодиффузии  $\chi$  и теплового расширения  $\beta$ . Ниже эти параметры предполагаются постоянными и положительными.

Ускорение силы тяжести отсутствует. Последнее предположение выполняется, если угловая скорость  $\omega(t)$  достаточно велика.

В указанных выше предположениях уравнения тепловой конвекции имеют вид [9]

$$\begin{aligned}
u_t + uw_r - \frac{v}{r} u_\varphi + \omega(t)u_\varphi + wu_z - 2\omega(t)v - \frac{v^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} p_r + \nu \left( Lu - \frac{2}{r^2} v_\varphi - \frac{u}{r^2} \right) - \omega^2(t)\beta r \Theta, \\
v_t + \omega_t(t)r + wv_r + \omega(t)v_\varphi + wv_\varphi + 2\omega(t)u + \frac{wv}{r} &= -\frac{1}{\rho r} p_\varphi + \nu \left( Lv - \frac{2}{r^2} u_\varphi - \frac{v}{r^2} \right), \\
w_t + uw_r + \frac{v}{r} w_\varphi + \omega(t)w_\varphi + ww_z &= -\frac{1}{\rho} p_z + \nu Lw, \\
u_r + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} v_\varphi + w_z &= 0, \\
\Theta_t + u\Theta_r + \frac{v}{r} \Theta_\varphi + \omega(t)\Theta_\varphi + w\Theta_z &= \chi L\Theta,
\end{aligned} \tag{1}$$

где  $L = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  — оператор Лапласа.

Система уравнений (1) допускает бесконечную непрерывную группу Ли преобразований, определяемую операторами  $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ ,  $\frac{\partial}{\partial z} - A \frac{\partial}{\partial \Theta} + \left( f(t) + \rho\beta A\omega^2(t) \frac{r^2}{2} \right) \frac{\partial}{\partial p}$ , где  $A = \text{const}$ ,  $f(t)$  — произвольная гладкая функция времени [14, с. 350–351]. Согласно методам группового анализа дифференциальных уравнений [14] решение системы (1) следует искать в виде

$$\begin{aligned}
u &= u(r, t), \quad v = v(r, t), \quad w = w(r, t), \\
p &= \rho \left[ A\beta\omega^2(t) \frac{r^2}{2} + f(t) \right] z + q(r, t), \\
\Theta &= -Az + T(r, t).
\end{aligned} \tag{2}$$

По классификации [14] оно является инвариантным решением системы (1).

При подстановке вида решения (2) в (1), предполагая, что на оси  $z$  отсутствуют источники или стоки, получим  $u = 0$  и систему уравнений

$$w_t = \nu \left( w_{rr} + \frac{1}{r} w_r \right) - \frac{1}{2} A\beta\omega^2(t)r^2 - f(t), \tag{3}$$

$$T_t = \chi \left( T_{rr} + \frac{1}{r} T_r \right) + Aw, \tag{4}$$

$$v_t + \omega_t(t)r = \nu \left( v_{rr} + \frac{1}{r} v_r - \frac{v}{r^2} \right), \tag{5}$$

$$q_r = \frac{\rho v^2}{r}. \tag{6}$$

Начальные и граничные условия имеют вид

$$w(r, 0) = w_0(r), \quad v(r, 0) = v_0(r), \quad T(r, 0) = T_0(r), \quad 0 \leq r \leq a, \tag{7}$$

$$w(a, t) = 0, \quad v(a, t) = 0, \quad T(a, t) = 0, \quad t \in [0, t_1], \tag{8}$$

$$|w| < \infty, \quad |v| < \infty, \quad |T| < \infty, \quad r \rightarrow 0. \tag{9}$$

Кроме того, задаётся объёмный расход через поперечное сечение

$$\int_0^a r w(r, t) dr = \frac{Q(t)}{2\pi}. \quad (10)$$

При заданных функциях  $\omega(t)$ ,  $Q(t)$  решению задачи (3)–(10) можно дать следующую интерпретацию. Жидкость заполняет вращающийся с угловой скоростью  $\omega(t)$  цилиндр, через поперечное сечение которого прокачивается жидкость с секундным расходом  $Q(t)$ . На поверхности цилиндра задан температурный градиент ( $-A$ ) вдоль оси. Требуется определить возникающее вращательно-симметричное движение. Если  $Q(t) = 0$ , то можно ожидать, что решение задачи описывает конвекцию вдали от твёрдых, перпендикулярных оси цилиндра стенок, т. е. движение в ядре.

С математической точки зрения задача (3)–(10) является обратной: наряду с  $w(r, t)$ ,  $v(r, t)$ ,  $T(r, t)$  необходимо найти дополнительный градиент давления вдоль оси  $z$  — функцию  $f(t)$ . Отметим также, что задача для  $v(r, t)$  отделяется. Основной же является задача (3), (7)–(10) для  $w(r, t)$ ,  $f(t)$ . При известной  $w(r, t)$  функция  $T(r, t)$  находится как решение классической первой начально-краевой задачи, а  $q(r, t)$  — интегрированием (6).

В [9] анонсирован результат об однозначной разрешимости задачи (3)–(10) при  $Q(t) = 0$  в пространствах Гёльдера. В настоящей работе получены априорные оценки решения, даны достаточные условия выхода, с ростом времени, на стационарный режим. Найдено точное решение в образах по Лапласу и приведены результаты расчёта поля скоростей и функции  $f(t)$  для конкретной жидкой среды.

Заметим, что поставленная обратная задача имеет стационарное решение [9]:

$$\begin{aligned} w^s(\xi) &= \frac{\chi}{a} \left[ \frac{R}{96} \left( 3\xi^4 - 4\xi^2 + 1 \right) + \frac{2Q^s}{\pi\chi a} (1 - \xi^2) \right], \quad v^s = 0, \\ T^s(\xi) &= aA \left[ \frac{R}{1152} \left( 1 - \xi^2 \right)^3 + \frac{Q^s}{8\pi\chi a} (\xi^4 - 4\xi^2 + 3) \right], \\ f^s &= -\frac{\nu\chi}{a^3} \left( \frac{8Q^s}{\pi\chi a} + \frac{R}{6} \right), \quad q^s = \text{const}, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\xi = r/a$ ,  $R = A\beta(\omega^s)^2 a^5 / (\nu\chi)$  — аналог числа Релея. Скорость  $w^s$  есть суперпозиция поля скорости Пуазейля и поля скорости, возникающего за счёт вращения трубы и теплового расширения жидкости. При  $Q^s / (\chi a) \gg R$  течение близко к течению Пуазейля. При обратном неравенстве преобладает тепловая конвекция. Кроме того, при  $Q^s = 0$  течение будет всегда возвратным. Как легко показать, в общем случае возвратное течение возникает лишь при

$$Q^s / (\chi a) < \pi R / 96. \quad (12)$$

## 2. АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ

В основной обратной задаче произведём замену

$$w(r, t) = W(r, t) + \frac{2Q(t)}{\pi a^4} (a^2 - r^2). \quad (13)$$

Для функции  $W(r, t)$  получим задачу

$$W_t = \nu \left( W_{rr} + \frac{1}{r} W_r \right) - f(t) + g(r, t), \quad 0 < r < a, \quad 0 \leq t \leq t_0, \quad (14)$$

$$W(r, 0) = w_0(r) - \frac{2Q(0)}{\pi a^4}(a^2 - r^2) \equiv W_0(r), \quad 0 \leq r \leq a, \quad (15)$$

$$W(a, t) = 0, \quad \left| W(0, t) \right| < \infty, \quad \int_0^a rW(r, t) dr = 0, \quad (16)$$

$$g(r, t) = -\frac{8\nu Q(t)}{\pi a^4} - \frac{2Q'(t)}{\pi a^4}(a^2 - r^2) - \frac{1}{2}A\beta\omega^2(t)r^2, \quad 0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq t \leq t_0, \quad (17)$$

где штрих означает дифференцирование по  $t$ . Тем самым предполагается, что  $Q(t) \in C^1[0, t_0]$ .

### 2.1. Оценка $W(r, t)$

Получим априорные оценки  $W(r, t)$  в равномерной метрике, т. е. в  $C([0, a] \times [0, t_0])$ . Для этого умножим уравнение (14) на  $rW(r, t)$  и интегрируем на интервале  $[0, a]$  с учётом (16). Получим тождество

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^a rW^2 dr + \nu \int_0^a rW_r^2 dr = \int_0^a rWg dr. \quad (18)$$

В силу первого равенства (16) имеет место неравенство Фридрикса [15]

$$E(t) = \int_0^a rW^2(r, t) dr \leq \frac{a^2}{4} \int_0^a rW_r^2(r, t) dr. \quad (19)$$

**Замечание.** На самом деле  $1/4$  в неравенстве (19), учитывая последнее равенство (16), можно заменить на минимальное значение  $1/x_0^2$ , где  $x_0 \approx 3,8317$  — первый положительный нуль функции Бесселя  $J_1(x)$  [15].

Используя неравенство Гёльдера и (19), из тождества (18) получим неравенство

$$\frac{\partial}{\partial t} \sqrt{E} + 2\delta\sqrt{E} \leq \left( \int_0^a rg^2(r, t) dr \right)^{1/2}$$

с постоянной  $\delta = 2\nu/a^2$ . Откуда

$$E(t) \leq \left[ \sqrt{E_0} + \int_0^t e^{2\delta\tau} \left( \int_0^a rg^2(r, \tau) dr \right)^{1/2} d\tau \right]^2 e^{-4\delta t} \equiv H_1^2(t)e^{-4\delta t}, \quad (20)$$

$$E_0 = \int_0^a rW_0^2(r) dr.$$

Для задачи (14)–(17) имеет место ещё одно тождество (достаточно умножить уравнение (14) на  $rW_t$ ):

$$\int_0^a rW_t^2 dr + \frac{\nu}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^a rW_r^2 dr = \int_0^a rgW_t dr,$$

откуда

$$\int_0^a rW_r^2 dr \leq \int_0^a rW_{0r}^2 dr + \frac{1}{\nu} \int_0^t \int_0^a rg^2(r, \tau) dr d\tau \equiv H_2^2(t). \quad (21)$$

Из интегрального равенства (16) следует существование точки  $\zeta \in (0, a)$  в которой  $W(\zeta, t) = 0$ . Поэтому из (20), (21)

$$|W^2(r, t)| \leq 2 \int_{\zeta}^a |W(r, t)| |W_r(r, t)| dr \leq \frac{2}{\zeta} H_1(t) H_2(t).$$

Значит,

$$|W(r, t)| \leq \sqrt{\frac{2}{\zeta} H_1(t) H_2(t)} e^{-\delta t}, \quad (22)$$

откуда следует ограниченность  $W(r, t)$  при  $t \in [0, t_0]$  для всех  $r \in [0, a]$ .

## 2.2. Оценка $f(t)$

Перейдём к оценке дополнительного градиента давления  $f(t)$  в  $C[0, t_0]$ . Умножим уравнение (14) на  $r(a-r)^2$  и проинтегрируем. После простых преобразований найдём

$$f(t) = 12 \left[ -2\nu \int_0^a (a-2r)W(r, t) dr - \int_0^a r(a-r)^2 W_t(r, t) dr + \int_0^a r(a-r)^2 g(r, t) dr \right]. \quad (23)$$

Оценка для  $W_t(r, t)$  находится путём дифференцирования по времени задачи (14)–(16). При этом получим задачу, аналогичную задаче для  $W(r, t)$ , с начальным условием

$$W_t(r, 0) = \nu \left( W_{0rr} + \frac{1}{r} W_{0r} \right) - f(0) + g(r, 0) \equiv W_1(r), \quad r \in [0, a]. \quad (24)$$

Начальное условие  $f(0)$  можно найти из другого представления  $f(t)$ :

$$f(t) = \frac{2}{a^2} \left[ \nu a W_r(a, t) + \int_0^a r g(r, t) dr \right],$$

так что

$$f(0) = \frac{2}{a^2} \left[ \nu a W_{0r}(a) + \int_0^a r g(r, 0) dr \right]. \quad (25)$$

Таким образом, имеем оценку, аналогичную (22):

$$|W_t(r, t)| \leq \sqrt{\frac{2}{\zeta} H_3(t) H_4(t)} e^{-\delta t} \quad (26)$$

при всех  $r \in [0, a]$ ,  $t \in [0, t_0]$ . Функции  $H_3(t)$ ,  $H_4(t)$  соответственно аналогичны  $H_1(t)$ ,  $H_2(t)$ , где надо заменить  $W_0(r)$  на  $W_1(r)$ , а  $g(r, t)$  на  $g_t(r, t)$ . Функция  $W_1(r)$  определяется из (24), (25).

Теперь из (22), (23), (26) получим

$$|f(t)| \leq 12 \left[ \int_0^a r(a-r)^2 |g(r, t)| dr + \frac{a^2}{\sqrt{2\zeta}} \left( \sqrt{H_1(t) H_2(t)} + \frac{a^2}{6} \sqrt{H_3(t) H_4(t)} \right) e^{-\delta t} \right], \quad (27)$$

$$t \in [0, t_0].$$

Таким образом, справедлива

**Теорема 1.** Пусть  $w_0(r) \in C^1[0, r]$ ,  $\omega(t) \in C^1[0, t_0]$ ,  $Q(t) \in C^2[0, t_0]$  и выполнены условия согласования  $W_0(a) = 0$ ,  $|W_0(0)| < \infty$ ,  $\int_0^a rW_0(r) dr = 0$ . Тогда решение обратной задачи (14)–(17) удовлетворяет оценкам (22), (27) для всех  $r \in [0, a]$ ,  $t \in [0, t_0]$ .

Согласно замене (13) имеем оценки

$$|w(r, t)| \leq \frac{2|Q(t)|}{\pi a^2} + \sqrt{\frac{2}{\zeta}} H_1(t)H_2(t) e^{-\delta t},$$

$$|w_t(r, t)| \leq \frac{2|Q'(t)|}{\pi a^2} + \sqrt{\frac{2}{\zeta}} H_3(t)H_4(t) e^{-\delta t}, \quad r \in [0, a], \quad t \in [0, t_0].$$
(28)

### 3. О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЯ ПРИ $t \rightarrow \infty$

Предположим, что функции  $\omega(t)$ ,  $\omega'(t)$ ,  $Q(t)$ ,  $Q'(t)$ ,  $Q''(t)$  определены при всех  $t \geq 0$  и сходятся интегралы

$$\int_0^\infty e^{2\delta\tau} \left( \int_0^a r g^2(r, \tau) dr \right)^{1/2} d\tau, \quad \int_0^\infty \int_0^a r g^2(r, \tau) dr d\tau.$$
(29)

Заметим, что из сходимости первого интеграла следует сходимость и второго, так как

$$\int_0^a r g^2(r, t) dr = e^{-4\delta t} h(t)$$
(30)

с положительной ограниченной при  $t \rightarrow \infty$  функцией  $h(t)$ ,  $\int_0^\infty h(t) dt < \infty$ .

Обращаясь к неравенствам (22), (26), (27) и формулам определения функций  $H_j(t)$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , получим экспоненциальную сходимость к нулю  $W(r, t)$ ,  $W_t(r, t)$ ,  $f(t)$  при  $t \rightarrow \infty$  для всех  $r \in [0, a]$ . Конечно, здесь необходимо потребовать сходимость интеграла

$$\int_0^\infty e^{2\delta\tau} \left( \int_0^a r g_t^2(r, \tau) dr \right)^{1/2} d\tau,$$
(31)

так что

$$\int_0^a r g_t^2(r, t) dr = e^{-4\delta t} h_1(t), \quad \int_0^\infty h_1(t) dt < \infty.$$
(32)

Первое слагаемое в квадратной скобке неравенства (27) оценивается просто величиной

$$a^3 \int_0^a r g^2(r, t) dr = a^3 e^{-4\delta t} h(t)$$

в силу (30) и  $f(t) \rightarrow 0$  по экспоненте при  $t \rightarrow \infty$ .

Укажем достаточные условия на  $\omega(t)$ ,  $Q(t)$ , при которых имеет место сходимость интегралов (29), (31). Используя элементарное неравенство  $(x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2)$ , получим

$$g^2(r, t) \leq \frac{64\nu^2}{\pi^2 a^8} Q^2(t) + \frac{4}{\pi^2 a^4} (Q'(t))^2 + \frac{a^4}{4} A^2 \beta^2 \omega^4(t)$$



при всех  $r \in [0, a]$ ,

$$g_t^2(r, t) \leq \frac{64\nu^2}{\pi^2 a^8} (Q'(t))^2 + \frac{4}{\pi^2 a^4} (Q''(t))^2 + a^4 A^2 \beta^2 \omega^2(t) (\omega'(t))^2. \quad (33)$$

Из (33) получим достаточные условия сходимости интегралов (29), (31):

$$\begin{aligned} |\omega^2(t)| &= e^{-\delta t} h_2(t), & |(\omega'(t))^2| &= e^{-\delta t} h_3(t), \\ |Q^{(j)}(t)| &= e^{-2\delta t} h_{4+j}(t), & j &= 0, 1, 2, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\int_0^\infty h_k(t) dt < \infty, \quad k = 2, \dots, 6. \quad (35)$$

Пусть  $\omega^s, Q^s$  — постоянные, входящие в стационарное решение  $w^s(r), f^s$  в (11). Разности  $V(r, t) = w(r, t) - w^s(r), F(t) = f(t) - f^s$  в силу линейности задачи являются решением той же задачи с заменой  $\omega^2(t)$  на  $\omega^2(t) - (\omega^s)^2, Q(t)$  на  $Q(t) - Q^s$  и начальных данных  $w_0(r)$  на  $w_0(r) - w^s(r)$ . Поэтому при (см. (34))

$$\begin{aligned} |\omega^2(t) - (\omega^s)^2| &= e^{-\delta t} h_2(t), & |(\omega'(t))^2| &= e^{-\delta t} h_3(t), \\ |Q(t) - Q^s| &= e^{-2\delta t} h_4(t), & |Q'(t)| &= e^{-2\delta t} h_5(t), & |Q''(t)| &= e^{-2\delta t} h_6(t) \end{aligned} \quad (36)$$

имеют место, согласно (27), (28), (36), оценки

$$|w(r, t) - w^s(r)| \leq C_1 e^{-\delta t}, \quad r \in [0, a], \quad |f(t) - f^s| \leq C_2 e^{-\delta t}, \quad t > 0, \quad (37)$$

здесь  $C_1, C_2$  — положительные постоянные. Таким образом, при условиях (36) стационарное решение основной обратной задачи является экспоненциально устойчивым.

Поскольку функции  $T(r, t)$  (при известной  $w(r, t)$ ),  $v(r, t)$  есть решения классических начально-краевых задач, то для них имеют место оценки

$$|T(r, t) - T^s(r)| \leq C_3 e^{-\delta t}, \quad |v(r, t)| \leq C_4 e^{-\delta t}, \quad (38)$$

где  $C_3, C_4$  — положительные постоянные.

Неравенства (38) можно получить из явных представлений функций  $T(r, t), v(r, t)$  в виде рядов Фурье по функциям Бесселя.

#### 4. РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ С ПОМОЩЬЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Пусть  $\hat{u}(r, p)$  есть преобразование Лапласа функции  $u(r, t)$ :

$$\hat{u}(r, p) = \int_0^\infty e^{-pt} u(r, t) dt. \quad (39)$$

Область его применимости и свойства изложены в различных монографиях (см., например, [16]).

Основой является задача о нахождении изображений  $\hat{w}(r, p), \hat{f}(p)$ :

$$\begin{aligned} \hat{w}_{rr} + \frac{1}{r} \hat{w}_r - \frac{p}{\nu} \hat{w} &= \frac{1}{\nu} \left[ \hat{f}(p) + \frac{1}{2} A \beta r^2 \hat{\omega}^2(p) - w_0(r) \right], \quad 0 < r < a, \\ \hat{w}(a, p) &= 0, \quad |\hat{w}(0, p)| < \infty, \\ \int_0^a r \hat{w}(r, p) dr &= \frac{\hat{Q}(p)}{2\pi}. \end{aligned} \quad (40)$$

Решение этой обратной задачи имеет вид

$$\begin{aligned} \widehat{w}(r, p) = & \frac{\widehat{f}(p)}{p} \left[ \frac{I_0(x_2)}{I_0(x_1)} - 1 \right] + \frac{A\beta\widehat{\omega}^2(p)}{2p} \left[ \left( a^2 + \frac{4\nu}{p} \right) \frac{I_0(x_2)}{I_0(x_1)} - r^2 - \frac{4\nu}{p} \right] \\ & + \frac{1}{\sqrt{p\nu}} \left\{ \int_0^r y [I_0(x_3)K_0(x_2) - I_0(x_2)K_0(x_3)] w_0(y) dy \right. \\ & \left. - \frac{I_0(x_2)}{I_0(x_1)} \int_0^a y [I_0(x_3)K_0(x_1) - I_0(x_1)K_0(x_3)] w_0(y) dy \right\}, \quad 0 \leq r \leq a. \quad (41) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{f}(p) = & \frac{1}{x_1 \left[ 2 \frac{I_1(x_1)}{I_0(x_1)} - x_1 \right]} \left\{ A\beta\widehat{\omega}^2(p) a^2 \left[ \frac{1}{4} x_1^2 - x_1^{-1} (x_1^2 + 4) \frac{I_1(x_1)}{I_0(x_1)} + 2 \right] \right. \\ & + 2\sqrt{\frac{p}{\nu}} \left\{ \int_0^a r \int_0^r y [I_0(x_3)K_0(x_2) - I_0(x_2)K_0(x_3)] w_0(y) dy dr \right. \\ & \left. \left. - a\sqrt{\frac{\nu}{p}} \frac{I_1(x_1)}{I_0(x_1)} \int_0^a y [I_0(x_3)K_0(x_1) - I_0(x_1)K_0(x_3)] w_0(y) dy \right\} + \frac{p^2 \widehat{Q}(p)}{\pi\nu} \right\}. \quad (42) \end{aligned}$$

В (41), (42) введены обозначения  $x_1 = \sqrt{\frac{p}{\nu}} a$ ,  $x_2 = \sqrt{\frac{p}{\nu}} r$ ,  $x_3 = \sqrt{\frac{p}{\nu}} y$ .

Для изображения  $\widehat{T}(r, p)$  имеем краевую задачу

$$\begin{aligned} \widehat{T}_{rr} + \frac{1}{r} \widehat{T}_r - \frac{p}{\chi} \widehat{T} = & -\frac{1}{\chi} [T_0(r) + A\widehat{w}(r, p)], \\ \widehat{T}(a, p) = & 0, \quad |\widehat{T}(0, p)| < \infty. \end{aligned} \quad (43)$$

В правой части уравнения (43) функция  $\widehat{w}(r, p)$  считается известной. Ясно, что

$$\begin{aligned} \widehat{T}(r, p) = & \frac{1}{\sqrt{p\chi}} \left\{ \int_0^r y [I_0(x_6)K_0(x_5) - I_0(x_5)K_0(x_6)] G(y, p) dy \right. \\ & \left. - \frac{I_0(x_5)}{I_0(x_4)} \int_0^a y [I_0(x_6)K_0(x_4) - I_0(x_4)K_0(x_6)] G(y, p) dy \right\}, \quad (44) \end{aligned}$$

где

$$G(y, p) = T_0(r) + A\widehat{w}(r, p), \quad x_4 = \sqrt{\frac{p}{\chi}} a, \quad x_5 = \sqrt{\frac{p}{\chi}} r, \quad x_6 = \sqrt{\frac{p}{\chi}} y. \quad (45)$$

Функция  $\widehat{v}(r, p)$  есть решение краевой задачи

$$\widehat{v}_{rr} + \frac{1}{r} \widehat{v}_r - \left( \frac{p}{\nu} + \frac{1}{r^2} \right) \widehat{v} = \frac{1}{\nu} [(p\widehat{\omega}(p) - \omega(0))r - v_0(r)] \equiv -\frac{1}{\nu} G_1(r, p), \quad 0 \leq r \leq a, \quad (46)$$

$$\widehat{v}(a, p) = 0, \quad |\widehat{v}(0, p)| < \infty.$$

Значит,

$$\hat{v}(r, p) = \frac{1}{\sqrt{p\nu}} \left\{ \int_0^r y [I_1(x_3)K_1(x_2) - I_1(x_2)K_1(x_3)] G_1(y, p) dy - \frac{I_1(x_2)}{I_1(x_1)} \int_0^a y [I_1(x_3)K_1(x_1) - I_1(x_1)K_1(x_3)] G_1(y, p) dy \right\}. \quad (47)$$

В формулах (41), (42), (44), (47)  $I_0(z)$ ,  $K_0(z)$ ,  $I_1(z)$ ,  $K_1(z)$  — функция Бесселя 2-го рода. При выводе этих формул было учтено равенство при  $n = 1, 2$ :  $I_n(z)K'_n(z) - K_n(z)I'_n(z) = -z^{-1}$ .

Предположим, что существуют пределы  $\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = Q^s$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = \omega^s$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega^2(t) = (\omega^s)^2$  и определены преобразования Лапласа  $\hat{Q}(p)$ ,  $\hat{Q}_t(p)$ ,  $\hat{\omega}(p)$ ,  $\hat{\omega}^2(p)$ . Тогда (см. [16])

$$\lim_{p \rightarrow 0} pQ(p) = Q^s, \quad \lim_{p \rightarrow 0} p\hat{\omega}(p) = \omega^s, \quad \lim_{p \rightarrow 0} p\hat{\omega}^2(p) = (\omega^s)^2.$$

При этих предположениях можно доказать, пользуясь явными формулами (41), (42), (44), (47), что

$$\lim_{p \rightarrow 0} p\hat{f}(p) = f^s, \quad \lim_{p \rightarrow 0} p\hat{w}(r, p) = w^s(r), \quad \lim_{p \rightarrow 0} p\hat{T}(r, p) = T^s(r), \quad \lim_{p \rightarrow 0} p\hat{v}(r, p) = v^s = 0, \quad (48)$$

где  $f^s$ ,  $w^s(r)$ ,  $T^s(r)$ ,  $v^s(r)$  суть стационарное решение (11). Доказательство предельных равенств (48) является довольно длинным и здесь полностью не приводится. Отметим, что для их вывода требуется учесть разложения при  $x \rightarrow 0$ :

$$I_0(x) = 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} + O(x^5), \quad I_1(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^3}{16} + \frac{x^5}{384} + O(x^6).$$

Приведём краткий вывод предельного равенства  $\lim_{p \rightarrow 0} p\hat{f}(p) = f^s$ . Для этого используем формулу (42). В ней дважды встречается выражение  $a^2 I_1(x_1) [x_1 I_0(x_1)]^{-1}$ . С учётом указанных разложений для  $I_0(x)$ ,  $I_1(x)$  при  $x \rightarrow 0$  имеем  $\frac{a^2}{x_1} \frac{I_1(x_1)}{I_0(x_1)} \sim \frac{a^2}{2} \left( 1 - \frac{x_1^2}{8} + \frac{x_1^4}{48} \right)$ . Значит,

$$\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{x_1} \frac{I_1(x_1)}{I_0(x_1)} \sim -\frac{a^4 x_1^2}{48} \left( 1 - \frac{x_1^2}{2} \right) = -\frac{pa^6}{48\nu} \left( 1 - \frac{pa}{\nu} \right), \quad p \rightarrow 0.$$

Поэтому вклад от первого слагаемого в фигурных скобках (42) в  $p\hat{f}(p)$  при  $p \rightarrow 0$  даётся выражением  $-a^2 A \beta \hat{\omega}^2(p) / 6$ . Легко видеть, что выражение во внутренней фигурной скобке, умноженное на  $\sqrt{\nu^{-1}p}$ , стремится к нулю при  $p \rightarrow 0$ , так как  $t^\alpha \ln t \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow 0$  и любом  $\alpha > 0$ . Что касается последнего слагаемого, то его вклад равен  $-16p\hat{q}(s)/a^4$ . Следовательно,

$$\lim_{p \rightarrow 0} p\hat{f}(p) = -\frac{a^2 A \beta (\omega^s)^2}{6} - \frac{16\nu q^s}{a^4} = f^s,$$

что совпадает с (11). Аналогично устанавливаются и другие предельные равенства в (48).

Таким образом, доказана, согласно свойствам преобразования Лапласа,

**Теорема 2.** Если  $w_0(r) \in C^1[0, a]$ ,  $T_0(r) \in C[0, a]$ ,  $v_0(r) \in C[0, a]$ ,  $Q(t) \in C^1[0, \infty)$ ,  $\omega(t) \in C^1[0, \infty)$ , а также функции  $Q(t)$ ,  $\omega(t)$ ,  $\omega^2(t)$  имеют при  $t \rightarrow \infty$  предельные значения  $Q^s$ ,  $\omega^s$ ,  $(\omega^s)^2$ , то решение нестационарной задачи (3)–(6) с ростом времени выходит на стационарный режим  $w^s(r)$ ,  $f^s$ ,  $T^s(r)$ ,  $v^s(r) = 0$  из (11).

Интересно также найти начальное значение  $f(0)$ . Умножим уравнение для  $w(r, t)$  на  $r$  и проинтегрируем от нуля до  $a$ . Получим

$$f(t) = -\frac{1}{\pi a^2} Q_t(t) + \frac{2\nu}{a} w_r(a, t) - \frac{1}{4} A\beta\omega^2(t)a^2,$$

так что

$$f(0) = -\frac{1}{\pi a^2} Q_t(0) + \frac{2\nu}{a} w_{0r}(a) - \frac{1}{4} A\beta\omega^2(0)a^2.$$

Заметим, что формулы (41), (42), (44), (47) имеют место и для входных данных  $Q(t)$ ,  $\omega(t)$ , имеющих разрывы 1-го рода (см. [16]), в то время как априорные оценки получены при большей гладкости этих функций (см. теорему 1).

## 5. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЁТОВ

Для вычисления оригинала функции  $u(r, t)$  по его изображению (39) можно воспользоваться комплексным интегралом

$$u(r, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt} \hat{u}(r, p) dp, \quad (49)$$

где  $s$  есть абсцисса в полуплоскости абсолютной сходимости интеграла (39). Численное обращение преобразования Лапласа выполняется при помощи квадратурной формулы наивысшей точности, построенной для интеграла Римана — Меллина (49) (подробности см. в [17, 18]). Эти формулы и используются в данной статье при вычислении полей  $w(r, t)$ ,  $f(t)$  по их изображениям (41), (42).

Мы ограничимся конвективными движениями, возникающими из состояния покоя, так что  $w_0(r) = 0$ ,  $\omega(0) = 0$ ,  $Q(0) = 0$ . Рассмотрим в качестве рабочей среды трансформаторное масло. Физические параметры данной жидкости таковы:  $\nu = 18,49 \cdot 10^{-2} \text{ см}^2/\text{с}$ ,  $\chi = 12,1 \cdot 10^{-2} \text{ см}^2/\text{с}$ ,  $\beta = 0,7 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}$ . Приведём наиболее интересные и характерные расчёты в размерных переменных для  $w(r, t)$  и  $f(t)$ , когда входные данные распределены по следующим законам:  $\omega^2(t) = a_1(1 - e^{-a_2 t} \cos(a_3 t))$  и  $Q(t) = b_1(1 - e^{-b_2 t} \cos(b_3 t))$ , где коэффициенты  $a_1$ ,  $b_1$  отвечают за амплитуды, а  $a_3$ ,  $b_3$  отвечают за частоты колебаний. В случае, когда  $a_1 \neq 0$ ,  $b_1 \neq 0$  и  $a_2 > 0$ ,  $b_2 > 0$ , согласно теореме 2, будет наблюдаться сходимость функций  $f$  и  $w$  к стационарному режиму с ростом времени  $t$ . А когда  $a_2 \leq 0$  и  $b_2 \leq 0$ , пределы функций  $\omega^2(t)$  и  $Q(t)$  при  $t \rightarrow \infty$  не существуют и решения не стремятся к стационарному режиму.

На рис. 1, а приведены профили скорости  $w^s(\xi)$ , для которых заданы значения  $R = 125,1514$  ( $a = 1 \text{ см}$ ,  $(\omega^s)^2 = 10 \text{ с}^{-2}$ ) и  $Q^s$ . Для кривых 1, 2 секундный расход  $Q^s > \pi\chi a R/96$  и возвратного течения нет. Кривые 3, 4 соответствуют неравенству (12) и вблизи твёрдой стенки наблюдаются возвратные течения. Также стоит отметить, что, например, при  $Q^s = 0,01 \text{ см}^3/\text{с}$  для данной жидкой среды  $f^s = -0,4714 \text{ см}/\text{с}^2$ . Рис. 1, б построен для случая, когда  $\omega^2(t) = 10(1 - e^{-0,01t} \cos(\pi t))$ ,  $Q(t) = 0,01(1 - e^{-0,01t} \cos(\pi t))$ . Здесь функция  $f(t)$  (кривая 2) выходит на стационарный режим  $f^s = -0,4714 \text{ см}/\text{с}^2$  (прямая 1), так для  $t = 4,15 \text{ с}$  имеем, что  $|f(4,15) - f^s| \approx 10^{-4}$ . При построении рис. 1, в входные данные, функции  $\omega^2(t)$  и  $Q(t)$ , также удовлетворяют условиям теоремы 2:

$$\omega^2(t) = 10(1 - e^{-0,01t} \cos(\pi t)), \quad Q(t) = 2(1 - e^{-0,01t} \cos(\pi t/10)).$$

Как видно из рис. 1, в, функция  $w$  выходит на стационарный режим (кривая 1). Действительно, для кривых 1 и 5 в момент времени  $t = 50 \text{ с}$  имеем  $\max_{r \in [0,1]} |w(r, 50) - w^s(r)| \approx 8 \cdot 10^{-3}$ . При этом стоит отметить, что на рис. 1, в близ твёрдой стенки отсутствует возвратное течение.

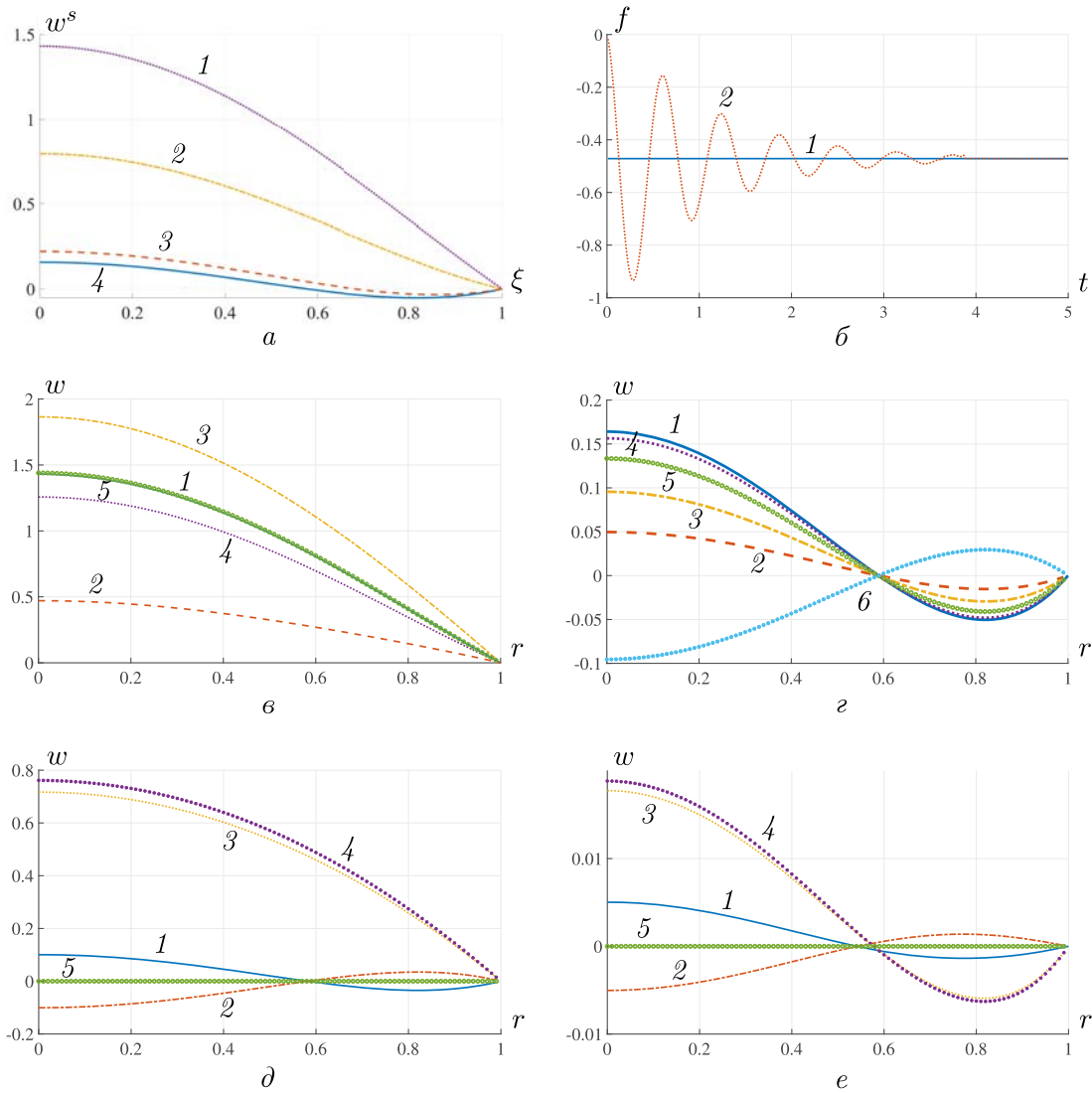


Рис. 1. Поведение функций  $w(t)$  и  $f(t)$  при различных значениях  $\omega^2(t)$  и  $Q(t)$ :

а) стационарный случай:  $Q^s = 2 \text{ см}^3/\text{с}$  (кривая 1),  $Q^s = 1 \text{ см}^3/\text{с}$  (кривая 2),  
 $Q^s = 0,1 \text{ см}^3/\text{с}$  (кривая 3),  $Q^s = 0 \text{ см}^3/\text{с}$  (кривая 4);

б) стационарное решение (прямая 1);

$\omega^2(t) = 10(1 - e^{-0,01t} \cos(\pi t))$ ,  $Q(t) = 0,01(1 - e^{-0,01t} \cos(\pi t))$  (кривая 2);

в)  $\omega^2(t) = 10(1 - e^{-0,01t} \cos(\pi t))$ ,  $Q(t) = 2(1 - e^{-0,01t} \cos(\pi t/10))$ :

стационарное решение (кривая 1),  $t = 2 \text{ с}$  (кривая 2),

$t = 10 \text{ с}$  (кривая 3),  $t = 20 \text{ с}$  (кривая 4),  $t = 50 \text{ с}$  (кривая 5);

з)  $\omega^2(t) = 10(1 - \cos(\pi t/100))$ ,  $Q(t) = 0,01(1 - \cos(\pi t/100))$ :

стационарное решение (кривая 1),  $t = 10 \text{ с}$  (кривая 2),  $t = 20 \text{ с}$  (кривая 3),

$t = 60 \text{ с}$  (кривая 4),  $t = 70 \text{ с}$  (кривая 5),  $t = 120 \text{ с}$  (кривая 6);

д)  $\omega(t) = y_1(t)$ ,  $Q(t) = y_2(t)$ , где  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  задаются формулами (50):

$t = 2 \text{ с}$  (кривая 1),  $t = 8 \text{ с}$  (кривая 2),  $t = 12 \text{ с}$  (кривая 3),

$t = 18 \text{ с}$  (кривая 4),  $t = 25 \text{ с}$  (кривая 5);

е)  $Q(t) = y_1(t)$ ,  $\omega^2(t) = y_2(t)$ , где  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  задаются формулами (50):

$t = 2 \text{ с}$  (кривая 1),  $t = 8 \text{ с}$  (кривая 2),  $t = 12 \text{ с}$  (кривая 3),

$t = 18 \text{ с}$  (кривая 4),  $t = 25 \text{ с}$  (кривая 5)

Если входные данные не удовлетворяют условиям теоремы 2, например распределены по

законам

$$\omega^2(t) = 10(1 - \cos(0,01\pi t)), \quad Q(t) = 0,01(1 - \cos(0,01\pi t)),$$

то тогда, как показано на рис. 1, *з*, функция  $w$  не сходится к стационарному режиму (кривая 1). При этом стоит отметить, что близ твёрдой стенки возникает возвратное течение (кривые 1–5). Кроме того, если во всех рассмотренных случаях  $Q(t) = 0$ , то близ твёрдой стенки всегда будет возникать возвратное течение. Таким образом, рис. 1, *б*, *в*, *з* иллюстрируют согласованность численных результатов с аналитическими.

Также было установлено, что при увеличении амплитуд колебаний  $a_1$  и  $b_1$  для  $\omega^2(t)$  и  $Q(t)$  значения функций  $w(r, t)$  и  $f(t)$  также возрастают. Далее, построены рис. 1, *д*, *е*, которые описывают эволюцию  $w$ , когда секундный расход (рис. 1, *д*) и угловая скорость вращения цилиндра (рис. 1, *е*) меняются скачком. При этом  $w$  не сходится к стационарному режиму. Расчёты для рис. 1, *д* приведены для следующих значений входных данных:  $\omega(t) = y_1(t)$ ,  $Q(t) = y_2(t)$ , где  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  задаются формулами

$$y_1(t) = 0, \quad y_2(t) = \begin{cases} \sin(\pi t/2), & t \in [0, 10), \\ e^{0,01t}, & t \in [10, 20), \\ 0, & t \geq 20. \end{cases} \quad (50)$$

Для построения рис. 1, *е* секундный расход и угловая скорость вращения цилиндра задавались следующим образом:  $Q(t) = y_1(t)$ ,  $\omega^2(t) = y_2(t)$ . Стоит отметить, что при  $t \geq 20$  угловая скорость вращения цилиндра и секундный расход одновременно равны нулю. В этом случае  $w = 0$  (рис. 1, *д*, *е*, прямая 5), т. е. жидкость будет находиться в состоянии покоя.

Таким образом, задавая расход  $Q(t)$  и угловую скорость  $\omega(t)$ , можно управлять тепловой конвекцией в трубе.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследована обратная начально-краевая задача о тепловой конвекции жидкости во вращающейся цилиндрической трубе, получены следующие результаты:

- для стационарного решения установлено условие, при котором возникает возвратное движение;
- получены априорные оценки решений поставленной задачи в равномерной метрике;
- даны достаточные условия на входные данные, а именно, на секундный расход и угловую скорость, при которых решение с ростом времени выходит на стационарный режим по экспоненциальному закону;
- в изображениях по Лапласу решение найдено в виде квадратур;
- получены количественные характеристики конвекции с помощью численного обращения преобразования Лапласа, а именно, построены графики осевой компоненты вектора скорости и градиента давления при различных входных данных. Показано, что если функции секундного расхода и угловой скорости удовлетворяют условиям теоремы 2, то функции  $w$  и  $f$  с ростом времени  $t$  выходят на стационарный режим.

Таким образом, задавая расход и угловую скорость как функции времени, можно управлять тепловой конвекцией в трубе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Barcilon V., Pedlosky J.* On the steady motions produced by a stable stratification in a rapidly rotating fluid // *J. Fluid Mech.* 1967. V. 29. P. 673.
2. *Homsy G.M., Hudson J.L.* Centrifugal convection and its effect on the asymptotic stability of a bounded rotating fluid heated from below // *J. Fluid Mech.* 1971. V. 48. P. 605.

3. *Hart J.E.* On the influence of centrifugal buoyancy on rotating convection // *J. Fluid Mech.* 2000. V. 403. P. 133.
4. *Busse F.H.* On the influence of centrifugal buoyancy on rotating convection // *J. Fluid Mech.* 1970. V. 44. P. 441.
5. *Herrmann J., Busse F.H.* Convection in a rotating cylindrical annulus. Part 4. Modulation and transition to chaos at low Prandtl numbers // *J. Fluid Mech.* 1997. V. 350. P. 209.
6. *Bagheri E., Bing-Chen Wang.* Direct numerical simulation of turbulent heat transfer in concentric annular pipe flows // *Phys. Fluids.* 2021. V. 33, N 5. P. 055131.
7. *Vjatkin A., Siraev R, Kozlov V.* Theoretical and experimental study of thermal convection in rotating horizontal annulus // *Microgravity Science and Technology.* 2020. V. 32, N 6. P. 1–13.
8. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972.
9. *Andreev V.K., Gaponenko Y.A., Goncharova O.N., Pukhnachev V.V.* Mathematical Models of Convection. Berlin; Boston: Walter De Gruyter, 2020.
10. *Яворская И.М., Беляев Ю.М.* Конвективные течения во вращающихся полостях. Москва: ВИНТИ, 1982. Т. 17. (Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа).
11. *Lappa M.* Rotating Thermal Flows in Natural and Industrial Processes. Chichester: Wiley & Sons, 2012.
12. *Вяткин А.А., Иванова А.А., Козлов В.Г.* Конвективная устойчивость неизотермической жидкости во вращающемся горизонтальном коаксиальном зазоре // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа.* 2010. № 1. С. 12–21.
13. *Вяткин А.А., Иванова А.А., Козлов В.Г., Сабиров Р.Р.* Конвекция тепловыделяющей жидкости во вращающемся горизонтальном цилиндре // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа.* 2014. № 1. С. 21–30.
14. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
15. *Андреев В.К.* On the Friedrichs inequality for composite domains // *J. Sib. Federal Univ. Mathematics and Physics.* 2009. Т. 2, № 2. С. 146–157.
16. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1972.
17. *Крылов В.И., Скобля Н.С.* Методы приближённого преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа. М.: Наука, 1974.
18. *Крылов В.И., Скобля Н.С.* Справочная книга по численному обращению преобразования Лапласа. Минск: Наука и техника, 1968.

UDC 532.5.013.4

## THE HEAT CONVECTION IN A ROTATING TUBE

© 2022 V. K. Andreev<sup>1,2a</sup>, I. V. Vakhrameev<sup>2b</sup>, E. P. Magdenko<sup>1,2c</sup>

<sup>1</sup>*Institute of Computational Modeling SB RAS,  
Akademgorodok 50/44, Krasnoyarsk 660036, Russia,*  
<sup>2</sup>*Institute of Mathematics and Fundamental Informatics  
Siberian Federal University,  
pr. Svobodny 79, Krasnoyarsk 660041, Russia*

E-mails: <sup>a</sup>andr@icm.krasn.ru, <sup>b</sup>vahrameev@mail.ru,  
<sup>c</sup>magdenko\_evgeniy@icm.krasn.ru

Received 17.11.2021, revised 30.12.2021, accepted 13.01.2022

**Abstract.** The unsteady boundary value fluid motion problem in the rotating cylindrical tube is investigated. There are no mass forces, since it is assumed that the angular velocity of the cylinder rotation is high enough. The Oberbeck–Boussinesq equations are used to describe the fluid motion. From the mathematical point of view, the problem is inverse with respect to the pressure gradients along the cylinder axis. Based on the priori estimates, conditions are obtained under which the stationary inverse problem solution is exponentially stable. In Laplace images, the solution is found in the form of quadratures. Sufficient conditions are given for the non-stationary problem solution to reach the stationary mode with increasing time.

**Keywords:** convection, inverse problem, priori estimates, asymptotic behavior, Laplace transform.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.201

## REFERENCES

1. Barcion V., Pedlosky J. On the steady motions produced by a stable stratification in a rapidly rotating fluid. *J. Fluid Mech.*, 1967, Vol. 29, pp. 673.
2. Homsy G.M., Hudson J.L. Centrifugal convection and its effect on the asymptotic stability of a bounded rotating fluid heated from below. *J. Fluid Mech.*, 1971, Vol. 48, pp. 605.
3. Hart J.E. On the influence of centrifugal buoyancy on rotating convection. *J. Fluid Mech.*, 2000, Vol. 403, pp. 133.
4. Busse F.H. On the influence of centrifugal buoyancy on rotating convection. *J. Fluid Mech.*, 1970, Vol. 44, pp. 441.
5. Herrmann J., Busse F.H. Convection in a rotating cylindrical annulus. Part 4. Modulation and transition to chaos at low Prandtl numbers. *J. Fluid Mech.*, 1997, Vol. 350, pp. 209.
6. Bagheri E., Bing-Chen Wang. Direct numerical simulation of turbulent heat transfer in concentric annular pipe flows. *Phys. Fluids*, 2021, Vol. 33, No. 5.
7. Vjatkin A., Siraev R., Kozlov V. Theoretical and experimental study of thermal convection in rotating horizontal annulus. *Microgravity Science and Technology*, 2020, Vol. 32, No. 6, pp. 1–13.
8. Gershuni G.Z., Zhukhovitsky E.M. Konvektivnaya ustoychivost' neszhimaemoi zhidkosti [Convective stability of an incompressible fluid]. Moscow: Nauka, 1972 (in Russian).



9. Andreev V.K., Gaponenko Y.A., Goncharova O.N., Pukhnachev V.V. *Mathematical Models of Convection*. Berlin; Boston: Walter De Gruyter, 2020.
10. Yavorskaya I.M., Belyaev Yu.M. *Konvektivnye techeniya vo vrashchayushchikhsya polostyakh* [Convective flows in rotating cavities]. Moscow: VINITI, 1982. Vol. 17. (Results of science and technology. Ser. Mechanics of liquid and gas) (in Russian).
11. Lappa M. *Rotating Thermal Flows in Natural and Industrial Processes*. Chichester: Wiley & Sons, 2012.
12. Vyatkin A.A., Ivanova A.A., Kozlov V.G., Sabirov R.R. *Konvektivnaya ustoychivost' neizotermicheskoi zhidkosti vo vrashchayushchemsya gorizonta'nom koaksial'nom zazore* [Convective stability of a non-isothermal fluid in a rotating horizontal coaxial gap]. *Izv. RAS. Mechanics of Liquid and Gas*, 2010, No. 1, pp. 12–21 (in Russian).
13. Vyatkin A.A., Ivanova A.A., Kozlov V.G., Sabirov R.R. *Convection of heat-generating fluid in a rotating horizontal cylinder* [Konvektsiya teplovydelyayushchei zhidkosti vo vrashchayushchemsya gorizonta'nom tsilindre]. *Izv. RAS. Mechanics of Liquid and Gas*, 2014, No. 1, pp. 21–30 (in Russian).
14. Ovsyannikov L. V. *Gruppovoi analiz differentsial'nykh uravnenii* [Group analysis of differential equations]. Moscow: Nauka, 1978 (in Russian).
15. Andreev V.K. *On the Friedrichs inequality for composite domains*. *J. Sib. Federal Univ. Mathematics and Physics*, 2009, Vol. 2, No. 2, pp. 146–157.
16. Lavrentiev M.A., Shabat B.V. *Metody teorii funktsii kompleksnogo peremennogo* [The functions theory method of a complex variable]. Moscow: Nauka, 1972 (in Russian).
17. Krylov V.I., Skoblya N.S. *Metody priblizhennogo preobrazovaniya Fur'e i obrashcheniya preobrazovaniya Laplasa* [Methods for the approximate Fourier transform and the Laplace transform inversion]. Moscow: Nauka, 1974 (in Russian).
18. Krylov V.I., Skoblya N.S. *Spravochnaya kniga po chislennomu obrashcheniyu preobrazovaniya Laplasa* [Reference book on the Laplace transform numerical inversion]. Minsk: Nauka and Tekhnika, 1968 (in Russian).