СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

Журнал основан в 1998 году
Выходит 4 раза в год

Том 25, № 2(90)

Апрель – июнь, 2022 г.

СОДЕРЖАНИЕ

НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ. 2022. Т. 25, № 2. С. 21–31

УДК 816

ПОСТРОЕНИЕ МИНИМАЛЬНОГО БАЗИСА ИНВАРИАНТОВ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ АЛГЕБРЫ (2×2)-МАТРИЦ

© 2022 **С. А. Васюткин**[1,2a], **А. П. Чупахин**[1,2b]

[1] *Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 1, г. Новосибирск 630090, Россия,*

[2] *Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, просп. Акад. Лаврентьева, 15, г. Новосибирск 630090, Россия*

E-mails: [a]s.vasyutkin@g.nsu.ru, [b]alexander190513@gmail.com

Поступила в редакцию 01.11.2021 г.; после доработки 01.11.2021 г.; принята к публикации 13.01.2022 г.

Строится базис инвариантов для набора матриц второго порядка, состоящего из исходной матрицы и её производных. Показано, что наличие производной накладывает связи на элементы этого набора и сокращает количество элементов базиса по сравнению с чисто алгебраическим случаем. Доказываются формулы для вычисления алгебраических инвариантов такого набора. Формулируется обобщение формул Фрике в терминах следов произведения матриц этого набора.

Ключевые слова: минимальный базис инвариантов, формулы Фрике, алгебраические инварианты, аффинные инварианты, дифференциальные инварианты, оператор инвариантного дифференцирования.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.202

Современное изложение классической теории инвариантов групп преобразований [1] имеется в работах [2–4]. Теория дифференциальных инвариантов, основы которой были заложены А. Трессе [5] и развиты в [6, 7], находит применение в механике континуума [8] при построении решений дифференциальных уравнений.

Введение структуры дифференциальной алгебры на множестве матриц, элементы которых являются функциями, ведёт к различным геометрическим и физическим приложениям [9]. Новые аспекты появляются при этом в классической задаче описания инвариантов преобразования подобия матриц. Первой является задача о связи собственных значений матрицы и её производных, рассмотренная в [10]. Следующей по сложности является задача о построении базиса инвариантов набора матриц, составленного из исходной матрицы и её производных до некоторого порядка. Данная работа посвящена исследованию этой задачи для случая (2×2)-матриц. Построен базис инвариантов и показано, что введение дифференцирования сокращает, вообще говоря, число алгебраических инвариантов.

Преобразование подобия матриц $T_g\colon a \to gag^{-1}$ разбивает их на классы эквивалентности, различающиеся наборами инвариантов. Инварианты имеют различные представления: собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы a, следы степеней a и т. д. Если матрица $a = a(t)$, $t \in D \subset \mathbb{R}$, является функцией параметра t, то преобразование подобия T_g может быть продолжено в смысле Ли [6] на производные матрицы $a_1 = \dfrac{da}{dt}, a_2 = \dfrac{d^2a}{dt^2}, \ldots$. Известно, что собственные значения матрицы a_1 не совпадают с производными собственных значений $\dfrac{d\lambda_1}{dt}, \ldots, \dfrac{d\lambda_n}{dt}$

Работа выполнена при финансовой поддержке Программ фундаментальных научных исследований СО РАН (проект 2.3.1.2.10, код FWGG-2021-0009).

матрицы a. Связь между этими величинами рассматривается в работе [10], но эти связи не носят инвариантного характера. В работе [11] предложено решение задачи, основанное на построении оператора инвариантного дифференцирования [6, 12, 13], для группы преобразований подобия. Оператор инвариантного дифференцирования — это дифференцирование, коммутирующее с преобразованием группы. Обычное дифференцирование не удовлетворяет этому свойству. Предложенный в [11] оператор инвариантного дифференцирования позволяет вычислить собственные значения матриц производных $a_1, a_2, \ldots$ как инварианты продолженного преобразования подобия. В работах [14, 15] этот подход применяется для интегрирования матричного уравнения Риккати. Представляется естественной связь понятия оператора инвариантного дифференцирования с калибровочными преобразованиями и характеристическими классами [9].

В данной работе этот подход применяется к построению базиса инвариантов для набора (2×2)-матриц $a_0, a_1 = \dfrac{da_0}{dt}, a_2 = \dfrac{d^2a_0}{dt^2}, \ldots$, состоящего из исходной матрицы и её производных. Наличие производной накладывает связи между элементами набора и в конечном счёте сокращает число элементов базиса по сравнению с чисто алгебраическим случаем.

Имеется много работ, посвящённых изложению классической теории инвариантов. Поскольку работа преследует получение конкретных формул, то для наших целей наиболее подходящим является монография [16]. Некоторые факты из неё мы приводим в первой половине статьи для того, чтобы она имела замкнутый для читателя вид. Сизигии для набора матриц приводятся во многих работах, но не все связывают их с именем Фрике. Мы благодарим Александра Медных, ознакомившего нас с работами [17, 18]. Вторая половина работы посвящена построению базиса для дифференциальной алгебры матриц и явных формул для него, основанным на подходе работы [11].

1. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ [16]

Под $\{a\}$ понимается система $(n \times n)$ матриц a с произвольными элементами a_{ij}, которые могут принимать любые комплексные значения или являться гладкими функциями параметра $t \in D \subset \mathbb{R}$. Будем рассматривать алгебраические инварианты, т. е. инварианты преобразования подобия $T_g \colon a \to gag^{-1}$. Под полиномом от матриц будем понимать полином от элементов этих матриц. Все полиномы рассматриваются над произвольным числовым полем $\mathbb{F}$.

Полином $f(\{a\})$ называется аффинным инвариантом системы $\{a\}$, если $f(\{gag^{-1}\}) = f(\{a\})$ при любых значениях элементов матриц системы $\{a\}$ и любых невырожденных матрицах g.

Под целым рациональным базисом аффинных инвариантов системы $\{a\}$ понимается такая совокупность аффинных инвариантов, через которые все остальные аффинные инварианты выражаются полиномиально. Если при удалении любого из инвариантов целый рациональный базис перестаёт быть таковым, будем называть его минимальным.

Полиномиальные соотношения между инвариантами будем называть сизигиями, а если инвариант выражается полиномиально через инварианты меньших степеней, то будем называть этот инвариант приводимым.

2. ОБ АФФИННЫХ ИНВАРИАНТАХ СИСТЕМЫ (2×2)-МАТРИЦ

Приведём общую теорему, полезную для дальнейших рассуждений [16]

Теорема 1. *Следы всевозможных элементов мультипликативной полугруппы, порождённой матрицами некоторой системы $\{a\}$ переменных $(n \times n)$-матриц a, образуют целый рациональный базис аффинных инвариантов системы $\{a\}$.*

Эта теорема позволяет далее рассматривать лишь следы матричных полиномов.

Будем работать далее с квадратными матрицами второго порядка. Имеют место следующие соотношения между следами произведений (2×2)-матриц:

$$2\,\mathrm{tr}\,abcd = \mathrm{tr}\,ab\ \mathrm{tr}\,cd + \mathrm{tr}\,ad\ \mathrm{tr}\,bc - \mathrm{tr}\,ac\ \mathrm{tr}\,bd + [\mathrm{tr}\,a\,(\mathrm{tr}\,bcd - \mathrm{tr}\,b\ \mathrm{tr}\,cd)] + \mathrm{tr}\,a\ \mathrm{tr}\,b\ \mathrm{tr}\,c\ \mathrm{tr}\,d, \quad (1)$$

$$\mathrm{tr}\,abc + \mathrm{tr}\,bac = [\mathrm{tr}\,a\ \mathrm{tr}\,bc] - \mathrm{tr}\,a\ \mathrm{tr}\,b\ \mathrm{tr}\,c, \quad (2)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\,abc\ \mathrm{tr}\,bac = {}& \frac{1}{2}[(\mathrm{tr}\,ab)^2(\mathrm{tr}\,c)^2 - (\mathrm{tr}\,ab)^2\,\mathrm{tr}\,c^2] + \mathrm{tr}\,ab\ \mathrm{tr}\,ac\ \mathrm{tr}\,bc + \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,a^2\,\mathrm{tr}\,b^2\,\mathrm{tr}\,c^2 \\ & + \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,a\ \mathrm{tr}\,c\ \mathrm{tr}\,ac(\mathrm{tr}\,b^2 - (\mathrm{tr}\,b)^2) + \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,b\ \mathrm{tr}\,c\ \mathrm{tr}\,bc(\mathrm{tr}\,a^2 - (\mathrm{tr}\,a)^2) + \frac{1}{4}(\mathrm{tr}\,c)^2((\mathrm{tr}\,a)^2(\mathrm{tr}\,b)^2 \\ & - \mathrm{tr}\,a^2\,\mathrm{tr}\,b^2) - \frac{1}{4}(\mathrm{tr}\,a)^2(\mathrm{tr}\,b^2\,\mathrm{tr}\,c^2 + (\mathrm{tr}\,b)^2\,\mathrm{tr}\,c^2) + \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,a\ \mathrm{tr}\,c^2(\mathrm{tr}\,ab)^2 - \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,a(\mathrm{tr}\,c)^2(\mathrm{tr}\,ab)^2, \quad (3)\end{aligned}$$

в которых квадратные скобки означают сумму всех выражений, получающихся из записанного в скобках выражения с помощью циклических перестановок. Формулы (1) и (2) приведены в [16], а формулу (3) можно получить, например, как следствие формул из этой же статьи. Отметим также наличие следующей полезной формулы:

$$ab + ba = (\mathrm{tr}\,ab)I - (\mathrm{tr}\,a)(\mathrm{tr}\,b)I + a\,\mathrm{tr}\,b + b\,\mathrm{tr}\,a. \quad (4)$$

Она получается, если из уравнения Гамильтона — Кэли для матрицы $(a+b)$ вычесть уравнения Гамильтона — Кэли для a и b. Из (4) следует

Утверждение 1. *Для любых* (2×2)-*матриц выполнено*

$$\begin{aligned}2abc = {}& (\mathrm{tr}\,abc)I + (\mathrm{tr}\,a)(\mathrm{tr}\,b)(\mathrm{tr}\,c)I - (\mathrm{tr}\,ab)(\mathrm{tr}\,c)I - (\mathrm{tr}\,a)(\mathrm{tr}\,bc)I \\ & + a\,\mathrm{tr}\,bc - b\,\mathrm{tr}\,ac + c\,\mathrm{tr}\,ab - a(\mathrm{tr}\,b)(\mathrm{tr}\,c) - c(\mathrm{tr}\,a)(\mathrm{tr}\,b) + ab\,\mathrm{tr}\,c + ac\,\mathrm{tr}\,b + bc\,\mathrm{tr}\,a.\end{aligned}$$

Доказательство. Запишем тождество $abc = [a(bc)]$ и применим к правой части формулу (4), меняя местами a и bc:

$$abc = -bca + \mathrm{tr}\,abcI - (\mathrm{tr}\,a)(\mathrm{tr}\,bc)I + a\,\mathrm{tr}\,bc + bc\,\mathrm{tr}\,a.$$

Применим теперь формулу (4) к $-b[ca]$, меняя местами c и a:

$$abc = bac - b\,\mathrm{tr}\,ac + b\,\mathrm{tr}\,a\,\mathrm{tr}\,c - ba\,\mathrm{tr}\,c - bc\,\mathrm{tr}\,a + \mathrm{tr}\,abcI - (\mathrm{tr}\,a)(\mathrm{tr}\,bc)I + a\,\mathrm{tr}\,bc + bc\,\mathrm{tr}\,a.$$

Применяем формулу (4) к $[ba]c$, меняя местами b и a:

$$\begin{aligned}abc = {}& -abc + c\,\mathrm{tr}\,ab - c\,\mathrm{tr}\,a\,\mathrm{tr}\,b + ac\,\mathrm{tr}\,b + bc\,\mathrm{tr}\,a - b\,\mathrm{tr}\,ac \\ & + b\,\mathrm{tr}\,a\,\mathrm{tr}\,c - ba\,\mathrm{tr}\,c - bc\,\mathrm{tr}\,a + \mathrm{tr}\,abcI - (\mathrm{tr}\,a)(\mathrm{tr}\,bc)I + a\,\mathrm{tr}\,bc + bc\,\mathrm{tr}\,a.\end{aligned}$$

Пользуясь формулой (4), меняем местами b и a в мономе $-ba\,\mathrm{tr}\,c$ и окончательно получаем

$$\begin{aligned}2abc = {}& (\mathrm{tr}\,abc)I + (\mathrm{tr}\,a)(\mathrm{tr}\,b)(\mathrm{tr}\,c)I - (\mathrm{tr}\,ab)(\mathrm{tr}\,c)I - (\mathrm{tr}\,a)(\mathrm{tr}\,bc)I \\ & + a\,\mathrm{tr}\,bc - b\,\mathrm{tr}\,ac + c\,\mathrm{tr}\,ab - a(\mathrm{tr}\,b)(\mathrm{tr}\,c) - c(\mathrm{tr}\,a)(\mathrm{tr}\,b) + ab\,\mathrm{tr}\,c + ac\,\mathrm{tr}\,b + bc\,\mathrm{tr}\,a.\end{aligned}$$

Утверждение 1 доказано. $\square$

Утверждение 2. *Если* (2×2)*-матрицы* $a_1, a_2, \dots, a_n$, $n \geqslant 3$, *есть элементы системы* $\{a\}$, *то:*

1) *любое произведение, сконструированное из этих матриц или их обратных, может быть записано как линейная комбинация матриц* I, a_1, $a_2, \dots, a_n$, $a_{i_1}a_{i_2}$, $1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n$, *коэффициенты которой — полиномы от* 2^{n-1} *переменных* $\operatorname{tr} a_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $\operatorname{tr} a_{i_1}a_{i_2}$, $1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n$, $\operatorname{tr} a_{i_1}a_{i_2}ai_3$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 \leqslant n$;

2) *след такого произведения выражается в виде полинома с рациональными коэффициентами от* $n(n^2+5)/6$ *следов, определённых выше.*

Замечание 1. Важно отметить, что случай произведения матриц вкладывается в рациональный базис аффинных инвариантов.

Пусть правые части формул (2) и (3) есть полиномы

$$p(\operatorname{tr} a, \operatorname{tr} b, \operatorname{tr} c, \operatorname{tr} ab, \operatorname{tr} ac, \operatorname{tr} bc) \quad \text{и} \quad q(\operatorname{tr} a, \operatorname{tr} b, \operatorname{tr} c, \operatorname{tr} a^2, \operatorname{tr} b^2, \operatorname{tr} c^2, \operatorname{tr} ab, \operatorname{tr} ac, \operatorname{tr} bc)$$

соответственно, получим обобщение леммы Фрике, приведённой в [17].

Утверждение 3. *Имеют место следующие формулы называемые первым и вторым тождеством Фрике:*

$$\operatorname{tr} abc + \operatorname{tr} bac = p(\operatorname{tr} a, \operatorname{tr} b, \operatorname{tr} c, \operatorname{tr} ab, \operatorname{tr} ac, \operatorname{tr} bc),$$
$$\operatorname{tr} abc \, \operatorname{tr} bac = q(\operatorname{tr} a, \operatorname{tr} b, \operatorname{tr} c, \operatorname{tr} a^2, \operatorname{tr} b^2, \operatorname{tr} c^2, \operatorname{tr} ab, \operatorname{tr} ac, \operatorname{tr} bc).$$

Следствие. Следы $\operatorname{tr} abc$ и $\operatorname{tr} bac$ являются корнями следующего квадратного уравнения:

$$z^2 - pz + q = 0.$$

Определим полином $W(p, q, z) = z^2 - pz + q$, коэффициенты которого зависят от десяти переменных, указанных в лемме в разд. 3. Следствие означает, что переменные $\operatorname{tr} a$, $\operatorname{tr} b$, $\operatorname{tr} c$, $\operatorname{tr} a^2$, $\operatorname{tr} b^2$, $\operatorname{tr} c^2$, $\operatorname{tr} ab$, $\operatorname{tr} ac$, $\operatorname{tr} bc$, $z = \operatorname{tr} abc$ зависимы. Действительно, набор полиномов P с рациональными коэффициентами такой, что для любой тройки элементов $\{a\}$ выполнено

$$P((\operatorname{tr} a, \operatorname{tr} b, \operatorname{tr} c, \operatorname{tr} a^2, \operatorname{tr} b^2, \operatorname{tr} c^2, \operatorname{tr} ab, \operatorname{tr} ac, \operatorname{tr} bc, \operatorname{tr} abc) = 0,$$

есть идеал, содержащийся в W. Можно показать, что этот идеал порождён W. Таким образом, полином, существование которого утверждается во втором пункте утверждения 2, не единственен, когда $n > 2$. В случае $n = 3$ этот полином определён с точностью до умножения на W.

Из соотношения (1) и теоремы 1 следует приводимость всех аффинных инвариантов системы (2×2)-матриц, степень которых выше трёх. Учитывая равенство $\operatorname{tr} ab = \operatorname{tr} ba$ и формулу (2), можем заключить, что среди следов $\operatorname{tr} abc$, $\operatorname{tr} bca$, $\operatorname{tr} cab$, $\operatorname{tr} bac$, $\operatorname{tr} acb$, $\operatorname{tr} cba$ любые пять из них приводимы. Из теоремы Гамильтона — Кэли или формулы (2) следует приводимость инварианта $\operatorname{tr} a^2c$. Учитывая всё вышесказанное, можем сформулировать теорему.

Теорема 2. *Пусть* $\{a_\tau\}$ *— произвольная система* (2×2)*-матриц, где* τ *пробегает набор натуральных чисел* $\{0, \dots, n\}$. *Тогда полиномы*

$$\operatorname{tr} a_i, \quad \operatorname{tr} a_i^2, \quad \operatorname{tr} a_i a_j, \quad i < j, \quad \operatorname{tr} a_i a_j a_k, \quad i < j < k, \tag{5}$$

$i, j, k \in \{0, \dots, n\}$, *образуют минимальный целый рациональный базис аффинных инвариантов системы* (2×2)*-матриц* $\{a_\tau\}$.

Минимальность проверяется непосредственно с помощью построения соответствующих примеров [16].

Важно обратить внимание на бесследовый случай матриц a_τ. Приведём каждую матрицу a_τ системы $\{a_\tau\}$ к бесследовой форме преобразованием

$$\overline{a}_\tau = a_\tau - \frac{1}{2}\operatorname{tr} a_\tau\, I, \tag{6}$$

где I — единичная (2×2)-матрица, а τ пробегает значения от 0 до n. Такое приведение значительно упрощает вычисления, но не влияет на основные результаты о базисе. Будем считать, что преобразование (6) уже сделано, так что $\operatorname{tr} a_\tau = 0$ для любого $\tau = 0,\dots,n$. Тогда описанные выше результаты принимают более компактный вид. Выполнены соотношения

$$2\operatorname{tr} abcd = \operatorname{tr} ab\,\operatorname{tr} cd + \operatorname{tr} ad\,\operatorname{tr} bc - \operatorname{tr} ac\,\operatorname{tr} bd,$$

$$\operatorname{tr} abc + \operatorname{tr} bac = 0,$$

$$\operatorname{tr} abc\,\operatorname{tr} bac = -\frac{1}{2}[(\operatorname{tr} ab)^2\operatorname{tr} c^2] + \operatorname{tr} ab\,\operatorname{tr} ac\,\operatorname{tr} bc + \frac{1}{2}\operatorname{tr} a^2\operatorname{tr} b^2\operatorname{tr} c^2,$$

где квадратные скобки означают сумму всех выражений, получающихся из записанного в скобках выражения с помощью циклических перестановок, а a, b, c, d есть любые элементы системы $\{a_\tau\}$. Следы $\operatorname{tr} abc$ и $\operatorname{tr} bac$ являются корнями квадратного уравнения $z^2 + q(a,b,c) = 0$. Полиномы $\operatorname{tr} a_i^2$, $\operatorname{tr} a_i a_j$, $i<j$; $\operatorname{tr} a_i a_j a_k$, $i<j<k$, $i,j,k \in \{0,\dots,n\}$, образуют минимальный целый рациональный базис аффинных инвариантов системы (2×2)-матриц $\{a_\tau\}$.

3. ЦЕЛЫЙ РАЦИОНАЛЬНЫЙ БАЗИС ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ АЛГЕБРЫ (2×2)-МАТРИЦ

Пусть теперь (2×2)-матрица a_0 гладким образом зависит от параметра $t \in D \subset \mathbb{R}$, так что определены производные

$$a_1 = \frac{da_0}{dt}, \quad a_2 = \frac{d^2 a_0}{dt^2}, \quad \dots, \quad a_n = \frac{d^n a_0}{dt^n}$$

как матрицы, составленные из производных элементов матрицы a_0. Систему матриц $\{a_\tau\}$ будем понимать как множество, состоящее из матриц a_τ, $\tau = 0,1,\dots,n$, нижний индекс которых обозначает порядок производной от матрицы a_0. Согласно теореме 2 минимальный целый рациональный базис аффинных инвариантов системы (2×2)-матриц $\{a_\tau\}$ состоит из следующих инвариантов $\operatorname{tr} a_i$, $\operatorname{tr} a_i^2$, $\operatorname{tr} a_i a_j$, $i<j$; $\operatorname{tr} a_i a_j a_k$, $i<j<k$, где $i,j,k \in \{0,\dots,n\}$. Однако с введением дифференцирования появляются новые дифференциальные соотношения и, как следствие, базис (5) перестаёт быть минимальным.

Необходимо описать дополнительные соотношения, связывающие базисные элементы (5), исключить из них приводимые инварианты и выписать минимальный рациональный базис для системы $\{a_\tau\}$ с дифференциальными связями $a_{i+1} = \dfrac{da_i}{dt}$, $i = 0,1,\dots,n-1$. Отметим вначале важные факты об операторе ∇ инвариантного дифференцирования [11], который действует по формуле $\nabla a = \dfrac{da}{dt} + [\omega_g, a]$, где $\omega_g = g^{-1}\dfrac{dg}{dt}$.

Во-первых, оператор ∇ явно демонстрирует перестановочность операции дифференцирования и взятия следа $\dfrac{d}{dt}\operatorname{tr} a = \operatorname{tr}\nabla a = \operatorname{tr}\dfrac{da}{dt}$, так как коммутатор имеет нулевой след. Во-вторых, производная $\dfrac{d}{dt}$ функции f эквивалентна действию оператора ∇ на функцию f, так как $\left(\dfrac{df}{dt}\right) I = \nabla f I$, где I — единичная матрица. Поэтому с этого момента будем обозначать производную следа матрицы $\dfrac{d(\operatorname{tr} a)}{dt}$ с помощью оператора инвариантного дифференцирования $\nabla \operatorname{tr} a$.

Лемма. *Если элементы системы* $\{a_\tau\}$ *имеют дифференциальные связи* $a_{s+1} = \nabla a_s$, $s = 0, 1, \ldots, n-1$, *то:*

1) *инварианты* $\operatorname{tr} a_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *выражаются через* $\operatorname{tr} a_0$;

2) *инварианты* $\operatorname{tr} a_i a_{i+k}$, *выражаются через* $\operatorname{tr} a_i^2$, $k = 1, \ldots, n$;

3) *инварианты* $\operatorname{tr} a_i a_j a_{k+1}$, $i < j < k$, $i, j, k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, *выражаются через элементы базиса* (5).

Доказательство. 1) Следует из перестановочности операции взятия следа и дифференцирования. Достаточно взять след от левой и правой частей равенства $a_i = \nabla^i a_0$.

2) Формула для первой производной элемента $\operatorname{tr} a_i^2$ следует из линейности операции взятия следа и правила Лейбница $\dfrac{1}{2}\nabla \operatorname{tr}\, a_i^2 = \operatorname{tr} a_i a_{i+1}$. Докажем теперь формулу для k-й производной элемента $\operatorname{tr} a_i^2$:

$$\frac{1}{2}\nabla^k \operatorname{tr} a_i^2 = \operatorname{tr} a_i a_{i+k} + \sum_{n=2}^{k} \nabla^{k-n} \operatorname{tr} a_{i+1} a_{i+n-1}, \quad k > 1. \tag{7}$$

База индукции при $k = 2$ следует из линейности следа и правила Лейбница, а шаг индукции понятен из следующих равенств:

$$\frac{1}{2}\nabla^{k+1} \operatorname{tr} a_i^2 = \nabla\left(\frac{1}{2}\nabla^k \operatorname{tr} a_i^2\right) = \nabla\left(\operatorname{tr} a_i a_{i+k} + \sum_{n=2}^{k} \nabla^{k-n} \operatorname{tr} a_{i+1} a_{i+n-1}\right)$$
$$= \operatorname{tr} a_i a_{i+k+1} + \sum_{n=2}^{k} \nabla^{k+1-n} \operatorname{tr} a_{i+1} a_{i+n-1} + \operatorname{tr} a_{i+1} a_{i+k} = \operatorname{tr} a_i a_{i+k+1} + \sum_{n=2}^{k+1} \nabla^{k+1-n} \operatorname{tr} a_{i+1} a_{i+n-1}.$$

Согласно формуле (7), выражение для $\operatorname{tr} a_i a_{i+k}$ выглядит следующим образом:

$$\frac{1}{2}\nabla^k \operatorname{tr} a_i^2 = \operatorname{tr} a_i a_{i+k} + \sum_{n=2}^{k} \nabla^{k-n} \operatorname{tr} a_{i+1} a_{i+n-1}.$$

Однако в данном выражении имеются элементы $\operatorname{tr} a_{i+1} a_{i+n-1}$, $n = 2, \ldots, k$, приводимость которых нам пока не известна. Применим к ним формулу (7):

$$\frac{1}{2}\nabla^{n-1} \operatorname{tr} a_{i+1}^2 = \operatorname{tr} a_{i+1} a_{i+n-1} + \sum_{m=2}^{n-1} \nabla^{k-m} \operatorname{tr} a_{i+2} a_{i+m-1}, \quad n = 2, \ldots, k.$$

Продолжая индуктивно данный процесс в каждом из случаев, придём к элементу $\operatorname{tr} a_{i+l} a_{i+l+1}$, который, в свою очередь, равен $\dfrac{1}{2}\nabla \operatorname{tr} a_{i+l}^2$, что и означает полную приводимость инварианта $\operatorname{tr} a_i a_{i+k}$.

3) Продифференцировав равенство

$$\operatorname{tr} a_i a_j a_k = \operatorname{tr} a_i a_j a_k, \quad i < j < k, \quad i, j, k \in \{0, \ldots, n-1\},$$

получаем

$$\nabla \operatorname{tr} a_i a_j a_k = \operatorname{tr} a_{i+1} a_j a_k + \operatorname{tr} a_i a_{j+1} a_k + \operatorname{tr} a_i a_j a_{k+1} \tag{8}$$

— выражение для $\operatorname{tr} a_i a_j a_{k+1}$. Отметим, что при $j = i + 1$ и/или $k = j + 1$ могут возникнуть инварианты $\operatorname{tr} a_{i+1}^2 a_k$ и/или инварианты $\operatorname{tr} a_i a_{j+1}^2$, однако они приводимы, и после подстановки соответствующих выражений для них снова получаем искомое утверждение леммы. □

Замечание 2. Важно, что в формулировке третьего утверждения леммы 2 имеют место строгие неравенства. Это означает, что, используя формулу (8), мы не можем получать инварианты типа $\operatorname{tr} a_i a_j a_{j+1}$, $i = 0, \dots, n-1$. Это связано с тем, что, дифференцируя равенство $\operatorname{tr} a_i a_j a_j = \operatorname{tr} a_i a_j a_j$, получаем

$$\nabla \operatorname{tr} a_i a_j a_j = \operatorname{tr} a_{i+1} a_j^2 + \operatorname{tr} a_i a_{j+1} a_j + \operatorname{tr} a_i a_j a_{j+1}.$$

Для демонстрации формул приведём таблицу.

Инварианты базиса (5) системы,
состоящей из производных матрицы a_0

0	1	2	3
$\operatorname{tr} a_0$	$\operatorname{tr} a_1 = \nabla \operatorname{tr} a_0$	$\operatorname{tr} a_2 = \nabla \operatorname{tr} a_1$	$\operatorname{tr} a_3 = \nabla \operatorname{tr} a_2$
$\operatorname{tr} a_0^2$	$\operatorname{tr} a_0 a_1 = \frac{1}{2} \nabla \operatorname{tr} a_0^2$	$\operatorname{tr} a_0 a_2 = \frac{1}{2} \nabla^2 \operatorname{tr} a_0^2 - \operatorname{tr} a_1^2$	$\operatorname{tr} a_0 a_3 = \frac{1}{2} \nabla^3 \operatorname{tr} a_0^2 - \nabla \operatorname{tr} a_1^2 - \frac{1}{2} \nabla \operatorname{tr} a_1^2$
	$\operatorname{tr} a_1^2$	$\operatorname{tr} a_1 a_2 = \frac{1}{2} \nabla \operatorname{tr} a_1^2$	$\operatorname{tr} a_1 a_3 = \frac{1}{2} \nabla^2 \operatorname{tr} a_1^2 - \operatorname{tr} a_2^2$
		$\operatorname{tr} a_2^2$	$\operatorname{tr} a_2 a_3 = \frac{1}{2} \nabla \operatorname{tr} a_2^2$
			$\operatorname{tr} a_3^2$
		$\operatorname{tr} a_0 a_1 a_2$	$\operatorname{tr} a_0 a_1 a_3 = \nabla \operatorname{tr} a_0 a_1 a_2 - \operatorname{tr} a_1^2 a_2 - \operatorname{tr} a_0 a_2^2$
			$\operatorname{tr} a_0 a_2 a_3$
			$\operatorname{tr} a_1 a_2 a_3$

В первой строке указан наибольший порядок производной матрицы, входящей в инвариант, во всех остальных клетках указаны базисные инварианты. Наличие выражения для инварианта через инварианты меньших степеней означает его приводимость. Дифференцированием, двигаясь слева направо, можем получать инварианты большего порядка. Аналогично строится продолжение данной таблицы и на большие порядки производной.

Наличие леммы 2 позволяет сформулировать теорему о минимальном рациональном базисе для системы матриц с дифференциальными соотношениями.

Теорема 3. *Пусть* $\{a_\tau\}$ *— система* (2×2)*-матриц, элементы которой являются производными гладкой* (2×2)*-матрицы* a_0*, т. е. связаны соотношениями* $a_{s+1} = \nabla a_s$*, где* τ *пробегает набор натуральных чисел* $\{0, \dots, n\}$, $s = 0, \dots, n-1$. *Тогда полиномы* $\operatorname{tr} a_0$, $\operatorname{tr} a_i^2$, $\operatorname{tr} a_j a_k a_{k+1}$, $j < k$, $i = 0, \dots, n$, $j, k \in \{0, \dots, n-1\}$, *образуют минимальный целый рациональный базис аффинных инвариантов системы* (2×2)*-матриц* $\{a_\tau\}$.

Доказательство. Используя первое и второе утверждение леммы 2, исключим из базиса (5) инварианты $\operatorname{tr} a_i$, $i = 1, \dots, n$, и $\operatorname{tr} a_i a_j$, $i, j \in \{0, \dots, n\}$, соответственно. Используя формулу (8), последовательно получаем элементы $\operatorname{tr} a_i a_j a_{k+1}$, $i < j < k$, $i, j, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, также исключаем их из базиса (5). Таким образом, из леммы 2 и замечания 1 непосредственно вытекает вид базиса теоремы 3. Минимальность следует из того, что дифференцированием получить оставшиеся элементы невозможно. □

Для иллюстрации приведём явный вид формул, описанных выше, используя пример из [11].

4. ЯВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Пусть матрица $g(t)$ является матрицей подобия, приводящей $a = a_0$ к жордановой форме: $a = g\Lambda g^{-1}$. Тогда из [11] следует что, матрица $a_1 = \dfrac{da}{dt}$ выглядит следующим образом:

$$a_1 = \frac{da}{dt} = g\left(\frac{d\Lambda}{dt} + [\omega_g, \Lambda]\right)g^{-1} = g\nabla\Lambda g^{-1}.$$

Матрицы $a_1 = \dfrac{da}{dt}$ и $\nabla\Lambda$ подобны и, следовательно, имеют совпадающие алгебраические инварианты и собственные значения. Аналогично, $a_2 = \dfrac{d^2a}{dt^2}$ вычисляется по формуле

$$a_2 = \frac{d^2a}{dt^2} = g\left(\frac{d^2\Lambda}{dt} + 2\left[\omega_g, \frac{d\Lambda}{dt}\right] + \left[\frac{d\omega_g}{tn}, \Lambda\right] + [\omega_g, [\omega_g, \Lambda]]\right)g^{-1} = g(\nabla^2\Lambda)g^{-1},$$

из которой следует совпадение алгебраических инвариантов и собственных значений матриц $a_2 = \dfrac{da^2}{dt^2}$ и $\nabla^2\Lambda$. Алгебраические инварианты и собственные значения любого полинома $f(a, a_1, a_2)$ совпадают с соответствующими величинами полинома $f(\Lambda, \nabla\lambda, \nabla^2\Lambda)$. Пусть Λ имеет вид $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, где $\lambda_1 \neq \lambda_2$, а $\omega_g = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ \omega_3 & -\omega_1 \end{pmatrix}$. Тогда согласно [11] имеем

$$\nabla\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1' & -(\lambda_1 - \lambda_2)\omega_2 \\ (\lambda_1 - \lambda_2)\omega_3 & \lambda_2' \end{bmatrix},$$

$$\nabla^2\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1'' + 2\omega_2\omega_3(\lambda_1 - \lambda_2) & -2\omega_2\big(\lambda_1' - \lambda_2'\big) - (\lambda_1 - \lambda_2)\big(2\omega_1\omega_2 + \omega_2'\big) \\ 2\omega_3\big(\lambda_1' - \lambda_2'\big) - (\lambda_1 - \lambda_2)\big(2\omega_1\omega_3 - \omega_3'\big) & \lambda_2'' - 2\omega_2\omega_3(\lambda_1 - \lambda_2) \end{pmatrix}.$$

Можем вычислить аффинные инварианты минимального рационального базиса (5):

$$\operatorname{tr} a = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \operatorname{tr} a_1 = \lambda_1' + \lambda_2', \quad \operatorname{tr} a_3 = \lambda_1'' + \lambda_2'',$$
$$\operatorname{tr} a^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2,$$
$$\operatorname{tr} a_1^2 = (\lambda_1')^2 + (\lambda_2')^2 - 2(\lambda_1 - \lambda_2)^2\omega_2\omega_3,$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tr} a_2^2 = {} & \big(\lambda_1'' + 2\omega_2\omega_3(\lambda_1 - \lambda_2)\big)^2 + \big(\lambda_2'' - 2\omega_2\omega_3(\lambda_1 - \lambda_2)\big)^2 \\ & + 2\big(-2\omega_2\big(\lambda_1' - \lambda_2'\big) - (\lambda_1 - \lambda_2)\big(2\omega_1\omega_2 + \omega_2'\big)\big)\big(2\omega_3\big(\lambda_1' - \lambda_2'\big) - (\lambda_1 - \lambda_2)\big(2\omega_1\omega_3 - \omega_3'\big)\big),\end{aligned}$$

$$\operatorname{tr} aa_1 = \lambda_1\lambda_1' + \lambda_2\lambda_2',$$
$$\operatorname{tr} aa_2 = \lambda_1\lambda_1'' + \lambda_2\lambda_2'' + 2(\lambda_1 - \lambda_2)^2\omega_2\omega_3,$$
$$\operatorname{tr} a_1a_2 = \lambda_1'\lambda_1'' + \lambda_2'\lambda_2'' - (\lambda_1 - \lambda_2)^2\big(\omega_2'\omega_3 - \omega_2\omega_3'\big) - 2(\lambda_1 - \lambda_2)\big(\lambda_1' - \lambda_2'\big)\omega_2\omega_3,$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tr} aa_1a_2 = {} & \lambda_1\lambda_1'\lambda_1'' + \lambda_2\lambda_2'\lambda_2'' + 2(\lambda_1 - \lambda_2)^3\omega_1\omega_2\omega_3 \\ & - (\lambda_1 - \lambda_2)^2\big(\lambda_1\omega_2\omega_3' + \lambda_2\omega_2'\omega_3\big) + 2(\lambda_1 - \lambda_2)\big(\lambda_1\lambda_2' - \lambda_1'\lambda_2\big)\omega_2\omega_3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tr} a_2a_1a = {} & \lambda_1\lambda_1'\lambda_1'' + \lambda_2\lambda_2'\lambda_2'' - 2(\lambda_1 - \lambda_2)^3\omega_1\omega_2\omega_3 - \\ & - (\lambda_1 - \lambda_2)^2\big(\lambda_1\omega_2'\omega_3 + \lambda_2\omega_2\omega_3'\big) + 2(\lambda_1 - \lambda_2)\big(\lambda_1\lambda_2' - \lambda_1'\lambda_2\big)\omega_2\omega_3.\end{aligned}$$

Проанализируем полученные выражения. Видно, что $\operatorname{tr} a_1$ и $\operatorname{tr} a_2$ являются первой и второй производной $\operatorname{tr} a$ соответственно, что согласуется с утверждением леммы. Можем видеть, что следы попарных произведений также имеют выражение через $\operatorname{tr} a^2$, $\operatorname{tr} a_1^2$ в соответствии с формулой (7). Следы квадратов матриц получить невозможно, так как ни в одном из инвариантов нет членов $\lambda_1^2 + \lambda_2^2$, $\left(\lambda_1'\right)^2 + \left(\lambda_2'\right)^2$, $\left(\lambda_1''\right)^2 + \left(\lambda_2''\right)^2$ и ни в одном из инвариантов нет множителей $\lambda_1\lambda_2$, $\lambda_1'\lambda_2'$, $\lambda_1''\lambda_2''$, за исключением самих следов квадратов матриц. Получение тройных произведений $\operatorname{tr} aa_1a_2$, $\operatorname{tr} a_2a_1a$ также невозможно в силу отсутствия в инвариантах, кроме них самих, каких-либо тройных произведений собственных значений. Подобная ситуация имеет место и при увеличении порядка производной матрицы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Weyl H.* The Classical Groups: Their Invariants and Representations. Princeton: Univ. Press, 1939.
2. *Размыслов Ю.П.* Тождества со следом полных матричных алгебр над полем характеристики нуль // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1974. Т. 38, № 4, С. 723–756.
3. *Procesi C.* The invariant theory of $n \times n$ matrices // Adv. Math. 1976. V. 19, N 3. P. 306–381.
4. *Olver P.J.* Classical Invariant Theory. London: Cambridge Univ. Press, 1999.
5. *Tresse A.* Sur les invariants differentiels des groupes continus de transformaticns // Acta. Math. 1894. N 18. P. 1–88.
6. *Ovsjannikov L.V.* Group Analysis of Differential Equations. N. Y.: Academic Press, 1982.
7. *Olver P.J.* Equivalence, Invariants and Symmetry. London: Cambridge Univ. Press, 1995.
8. *Godunov S.K., Romenskii E.I.* Elements of Continuum Mechanics and Conservation Laws. Boston: Springer-Verl., 2003.
9. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. Методы и приложения. М.: Наука, 1979.
10. *Lancaster P.* On eigenvalues of matrices dependent on a parameter // Numer. Math. 1964. V. 6. P. 377–387.
11. *Васюткин С.А., Чупахин А.П.* Дифференцирование подобных матриц // Мат. заметки. 2021. Т. 109, № 2. С. 302–306.
12. *Olver P.J.* Applications of Lie groups to differential equations // Graduate Texts in Mathematics. 1993. V. 107, N 2.
13. *Chupakhin A.P.* Differential invariants: theorem of commutativity // Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulation. 2004. V. 9. P. 25–33.
14. *Нещадим М.В., Чупахин А.П.* Об интегрировании одного матричного уравнения Риккати // Сиб. журн. индустр. математики. 2020. Т. 23, № 4. С. 101–113.
15. *Нещадим М.В., Чупахин А.П.* Метод коммутаторов для интегрирования матричного уравнения Риккати // Сиб. журн. индустр. математики. 2021. Т. 24, № 1. С. 78–88.
16. *Сибирский С.К.* Алгебраические инварианты системы матриц // Сиб. мат. журн. 1968. Т. 9, № 1. С. 152–164.
17. *Goldman W.M.* An exposition of results of Fricke and Vogt: Preprint; http://arxiv.org/abs/math/0402103
18. *Peyriere J.* On an Article by W. Magnus on the Fricke Characters of Free Groups // J. Algebra. 2020. V. 228. P. 659–673.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 816

CONSTRUCTING A MINIMAL BASIS OF INVARIANTS FOR DIFFERENTIAL ALGEBRA (2×2) MATRIX

S. A. Vasyutkin[1,2a], **A. P. Chupakhin**[1,2b]

[1] *Novosibirsk State University, ul. Pirogova 1, Novosibirsk 630090, Russia,*
[2] *Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS,*
pr. Akad. Lavrentyeva 15, Novosibirsk 630090, Russia

E-mails: [a]s.vasyutkin@g.nsu.ru, [b]alexander190513@gmail.com

Received 01.11.2021, revised 01.11.2021, accepted 13.01.2022

Abstract. A basis of invariants is constructed for a set of second-order matrices consisting of the original matrix and its derivatives. It is shown that the presence of a derivative imposes connections on the elements of this set and reduces the number of elements of the basis, compared with the purely algebraic case. Formulas for calculating algebraic invariants of such a set are proved. A generalization of Fricke's formulas is formulated in terms of traces of the product of matrices of this set.

Keywords: minimal basis of invariants, Fricke formulas, algebraic invariants, affine invariants, differential invariants, invariant differentiation operator.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.202

REFERENCES

1. Weyl H. The Classical Groups: Their Invariants and Representations. Princeton Univ. Press, 1939.
2. Razmyslov Ju.P. Tozhdestva so sledom polnykh matrichnykh algebr nad polem kharakteristiki nul' [Trace identities of full matrix algebras over a field of characteristic zero]. *Izv. Math. USSR*, 1974, Vol. 8, No. 4, pp. 727 (in Russian).
3. Procesi C. The invariant theory of $n \times n$ matrices. *Adv. Mathematics*, 1976. Vol. 19, No. 3, pp. 306–381.
4. Olver P.J. Classical Invariant Theory. London: Cambridge Univ. Press, 1999.
5. Tresse A. Sur les invariants differentiels des groupes continus de transformaticns. *Acta. Math.*, 1894, No. 18, pp. 1–88.
6. Ovsjannikov L.V. Group Analysis of Differential Equations. N. Y.: Academic Press, 1982.
7. Olver P.J. Equivalence, Invariants and Symmetry. London: Cambridge Univ. Press, 1995.
8. Godunov S.K., Romenskii E.I. Elements of Continuum Mechanics and Conservation Laws. Boston: Springer-Verl., 2003.
9. Dubrovin B.A., Fomenko A.T., Novikov S.P. Modern Geometry — Methods and Applications. N. Y.: Springer-Verl., 1984.
10. Lancaster P. On eigenvalues of matrices dependent on a parameter. *Numer. Math.*, 1964, Vol. 6, pp. 377–387.
11. Vasyutkin S.A., Chupakhin A.P. Differentiation of similar matrices. *Math. Notes*, 2021, Vol. 109, No. 2, pp. 302–306.
12. Olver P.J. Applications of Lie Groups to Differential Equations. *Graduate Texts in Mathematics*, 1993, Vol. 107, No. 2, pp. 312–315.

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2022, Vol. 16, No. 2.

13. Chupakhin A.P. Differential invariants: theorem of commutativity. *Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulation*, 2004, Vol. 9, pp. 25–33.
14. Neshchadim M.V., Chupakhin A.P. On integration of a matrix Riccati equation. *J. Appl. Indust. Mathematics*, 2020, Vol. 14, No. 4, pp. 732–742.
15. Neshchadim M.V., Chupakhin A.P. Method of commutators for integration of a matrix Riccati equation. *J. Appl. Indust. Mathematics*, 2021, Vol. 15, No. 1, pp. 78–86.
16. Sibirskii K.S. Algebraic invariants for a set of matrices. *Sib. Math. J.*, 1968, Vol. 99, No. 1, pp. 115–124.
17. Goldman W.M. An Exposition of Results of Fricke and Vogt. Preprint; http://arxiv.org/abs/math/0402103.
18. Peyriere J. On an Article by W. Magnus on the Fricke Characters of Free Groups. *J. Algebra*, 2020, Vol. 228, pp. 659–673.