СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

Журнал основан в 1998 году
Выходит 4 раза в год

Том 25, № 2(90)

Апрель – июнь, 2022 г.

СОДЕРЖАНИЕ

НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ. 2022. Т. 25, № 2. С. 46–57

УДК 519.86

МАКСИМИЗАЦИЯ ВАЛОВОГО ДОХОДА ДЛЯ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ПОТРЕБЛЕНИЕМ, ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫМ ТРУДОВЫМ РЕСУРСАМ

© 2022 $\boxed{\text{В. В. Наумов}}$, И. И. Шамаев[1a], С. В. Местников[2b], Н. П. Лазарев[2c]

[1] *Государственное бюджетное нетиповое общеобразовательное учреждение Республики Саха (Якутия) Республиканский лицей-интернат, ул. Ойунского, 37, г. Якутск 677001, Россия,*
[2] *Северо-Восточный федеральный университет, ул. Кулаковского, 48, г. Якутск 677000, Россия*

E-mails: [a]rcollege@gov14.ru, [b]mestsv@mail.ru, [c]nyurgun@ngs.ru

Поступила в редакцию 06.11.2021 г.; после доработки 20.12.2021 г.;
принята к публикации 13.01.2022 г.

Рассматривается задача управления макроэкономической системой с линейно-однородной производственной функцией с учётом уравнения баланса. Валовый доход текущего года делится на инвестиции и потребление, при этом объём совокупного потребления пропорционален трудовым ресурсам. Критерием для оптимального управления предлагается суммарная величина валового дохода за заданный интервал времени. В качестве аппарата исследования применён принцип максимума, благодаря которому задача оптимального управления сведена к вариационной задаче с неголономной связью. Её решение выражено через квадратуру задачи Коши для одного уравнения с разделяющимися переменными. Найдены значения коэффициентов пропорциональности потребления, налоговых и амортизационных отчислений, обеспечивающие неубывание основных фондов. В виде примера рассматривается система с производственной функцией Кобба — Дугласа.

Ключевые слова: экономическая модель, вариационная задача, производственная функция, оптимальное управление.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.204

ВВЕДЕНИЕ

Изучение экономических моделей является одним из актуальных направлений прикладной математики. Вопросы научно обоснованного прогноза экономического состояния предприятий, регионов, государств, а также достижение ими стабильных и достаточно высоких темпов экономического роста относятся к важнейшим проблемам математической экономики. Среди наиболее известных динамических макроэкономических моделей можно выделить модели Солоу, Ромера, Нельсона — Фелпса, Гломма — Равикумара, Мэнкью — Ромера — Уэйла. Обзор этих конструкций и обсуждение проблем формализации учёта человеческого капитала в моделях экономического роста были даны в [1–3]. В обзорной работе [4] приведены результаты исследования представленных в научных статьях моделей экономического роста для российской экономики, систематизированы существующие подходы, выделены основные факторы и измерители результата экономического роста.

Разделы 1, 2 настоящей работы выполнены при поддержке Минобрнауки РФ (проект FSRG-2020-0006), раздел 3 выполнен при поддержке Минобрнауки РФ (Соглашение от 02.02.2022 г., проект 075-02-2022-881).

В исследуемой модели рассматривается закрытая экономика и производится только один продукт, используемый как для потребления, так и для инвестиций. Кроме того, учитывается динамика производства и потребления с учётом налогов и амортизации. Экзогенно (вне модели) задаются нормы амортизации, налогов, потребления и государственных расходов. В модели Рамсея — Касса — Купманса [5] целевая функция для оптимизации — это суммарное потребление, задаваемое функцией полезности, на одного работника, живущего неограниченно долгое время с учётом дисконтирования значений этой функции. В отличие от этого в предложенной модели целью является оптимизация суммарного выпуска продукции за конечное время без учёта дисконтирования. Если в классических моделях темп роста трудовых ресурсов задаётся постоянным (например, в модели Ромера), а фактором, влияющим на производительность трудовых ресурсов, является отдельно взятый параметр научно-технического прогресса, действующий как сомножитель к количеству работников, то в настоящей работе количественное значение трудовых ресурсов является эндогенным (вычисляемым по модели) параметром. Таким образом, рассматривается оптимизационная модель, описывающая динамику капитала и трудовых ресурсов и отличающаяся от классических моделей Солоу, Рамсея — Касса — Купманса, Эрроу — Ромера тем, что совокупное потребление пропорционально трудовым ресурсам, задаётся с помощью коэффициента пропорциональности потребления и не используется коэффициент темпа роста трудовых ресурсов [6]. Основная гипотеза рассматриваемой ниже модели: совокупное потребление пропорционально трудовым ресурсам или, в частности, количеству работников системы.

В ходе решения поставленных задач для новой модели макроэкономического равновесия применены методы вариационного и интегрального исчисления. В качестве основного результата предложен метод решения задачи оптимального управления, в которой максимизируется функционал, описывающий валовый доход. Кроме того, для частного случая модели, когда производственная функция задана функцией Кобба — Дугласа, приведены аналитические выражения для значений коэффициента пропорциональности потребления, налоговых и амортизационных отчислений, обеспечивающих неубывание основных фондов.

1. СИСТЕМА С ЛИНЕЙНО-ОДНОРОДНОЙ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИЕЙ

Рассматривается закрытая экономическая система без экспорта и импорта. Все показатели агрегированы, модель макроэкономическая. Совокупный объём выпущенной продукции экономической системы (валовый доход) в момент времени t обозначим через $Y = Y(t)$, $t \geqslant 0$. Он описывается с помощью производственной функции $Y(t) = F(K(t), L(t))$, где $L(t)$ — уровень трудовых ресурсов, $K(t)$ — уровень основных производственных фондов в момент времени t. Расходы (совокупный спрос) экономической системы определяются как сумма потребления и инвестиций $C(t)+I(t)$, где $C(t)$ и $I(t)$ — совокупные потребление и инвестиции в момент времени t. Особенность предложенного подхода состоит в том, что потребление пропорционально не выпуску $Y(t)$, как в классических моделях, а пропорционально количеству работников системы (в более общем случае уровню трудовых ресурсов) $L(t)$ с экзогенно заданным параметром $\omega > 0$, который далее для простоты будем называть коэффициентом пропорциональности потребления за единицу времени. С учётом введённого коэффициента $C(t) = \omega L(t)$. Тогда условие баланса (равновесия выпуска и расходов) без учёта налогов и государственных расходов в денежном эквиваленте запишется в виде уравнения

$$Y(t) = \omega L(t) + I(t). \tag{1}$$

Зададим ещё один экзогенный параметр μ — норму выбытия капитала (норму амортизации). Тогда уравнение (1) с учётом того, что совокупные инвестиции делятся на амортизацию

$\mu K(t)$ и чистые инвестиции $\Delta K(t)$ можно переписать в виде

$$Y(t) = \omega L(t) + \Delta K(t) + \mu K(t),$$
$$F(K(t), L(t)) = \omega L(t) + \Delta K(t) + \mu K(t).$$

Далее предположим, что налоговая нагрузка в экономической системе и государственные расходы пропорциональны валовому выпуску. Обозначим через β долю всех налоговых отчислений с учётом трансфертных платежей, а через α — коэффициент, с помощью которого определяются государственные расходы пропорционально валовому выпуску. Тогда уравнение (1) примет вид

$$Y(t) - \beta Y(t) = \omega L(t) + \Delta K(t) + \mu K(t) + \alpha Y(t)$$

или

$$\Delta K + \mu K + \omega L - \eta F(K, L) = 0, \tag{2}$$

где $\eta = 1 - \alpha - \beta$.

Предположим, что функция $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, заданная в положительном квадранте Q^+ плоскости (K, L), непрерывно дифференцируемая, линейно-однородная и обладает следующими свойствами:

$$\begin{gathered} F(K, L) = f(k)L, \quad k = K/L, \quad k \geqslant 0, \quad L > 0; \\ f \in C^2(R^+), \quad R^+ = \{x \in R \mid x > 0\}; \\ f(k), f'(k), -f''(k) > 0, \quad k \in R^+; \\ f(0) = 0; \quad \lim_{k\to\infty} \frac{f(k)}{k} = 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Широко используемая функция Кобба — Дугласа $F(K, L) = AK^pL^q$, где $A, p, q = \mathrm{const} > 0$, $p \in (0, 1)$, $q = 1 - p$, очевидно удовлетворяет условиям (3), причём

$$f(k) = Ak^p. \tag{4}$$

Уточним введённые обозначения: μ — амортизационный коэффициент, т. е. доля амортизационных отчислений за единицу времени по отношению к основным фондам; ω — коэффициентом пропорциональности потребления за единицу времени; β — доля всех отчислений за единицу времени, пропорциональных валовому доходу, каковыми являются основные налоговые отчисления, спонсорские расходы и т. п.

Перейдём от дискретного аналога модели, где за базовый промежуток времени был взят год, к непрерывному варианту. Рассмотрим небольшой промежуток времени Δt. За время Δt чистые инвестиции будут равны

$$\Delta K(t) = I(t)\Delta t - \mu K(t)\Delta t = (Y(t) - \omega L(t) - \mu K(t))\Delta t.$$

В общем случае предельным переходом при $\Delta t \to 0$ получим следующее уравнение баланса при $\alpha = 0$:

$$\dot{K} + \mu K + \omega L - \eta F(K, L) = 0, \tag{5}$$

здесь точкой обозначено дифференцирование по t. Поскольку основной вклад в значение β дают налоговые отчисления, далее η будем называть налоговыми коэффициентом.

В дифференциальном уравнении (5) реальные значения величин удовлетворяют очевидным ограничениям

$$K, L, \omega > 0; \quad \mu, \eta \in (0, 1). \tag{6}$$

Для простоты, рассматривая, например, достаточно малые промежутки времени, будем считать, что ω, μ, η — постоянные величины.

Задача об управлении макроэкономической системой в этой упрощённой модели состоит в поиске функций $K(t)$ и $L(t)$, удовлетворяющих уравнению (5) и некоторым начальным условиям $K(0) = K_0$, $L(0) = L_0$. Она согласно теореме о существовании и единственности решения задачи Коши для нормального дифференциального уравнения может быть решена для произвольной непрерывной функции $L(t)$, $L(0) = L_0$, коль скоро $F(K, L)$ удовлетворяет условию Липшица по K и непрерывна по L в некоторой окрестности начальной точки (K_0, L_0). Но не всякая выбранная функция $L(t)$ или точка (K_0, L_0) будут обеспечивать неубывание основных фондов $K(t)$, т. е. выполнение неравенства

$$\dot{K} \geqslant 0. \tag{7}$$

Ясно, что противоположное неравенство реально означает или распродажу производственных мощностей, или их потерю из-за невозможности обеспечить их ремонт — амортизационные отчисления, или и то и другое вместе, т. е. деградацию производства. Поэтому мы хотим подчеркнуть выполнение (7) в качестве одного из основных экономических принципов и назвать его принципом неубывания основных фондов. Для полноты заметим, что указанная деградация иногда может сопровождаться некоторым ростом валового дохода за счёт быстрого роста $L(t)$.

Сначала покажем схему исследование модели в случае применения классического подхода с заданным темпом роста численности работников. С помощью стандартных преобразований из уравнения (5), деля на $L > 0$, получим

$$\dot{K}/L + \mu k + \omega - \eta f(k) = 0,$$

где $\dot{K}/L = \dot{k} + k\frac{\dot{L}}{L}$.

Сделаем упрощающее предположение $\dot{k} + (m + \mu)k + \omega - \eta f(k) = 0$, которое можно исследовать по стандартной схеме модели Солоу.

Для нашего случая, когда темп роста численности работников не задаётся, введём функцию

$$g(k) \equiv \eta f(k) - \mu k - \omega, \quad k > 0. \tag{8}$$

Перепишем (5) и (7) в эквивалентной форме:

$$\dot{K} = g(k)L, \tag{9}$$

$$g(k) \geqslant 0. \tag{10}$$

Из (9) ясно, что знак $\dot{K}$ совпадает со знаком g и вдоль лучей $k = \text{const}$ плоскости (K, L), выходящих из начала координат, знак $\dot{K}$ не меняется. Поэтому, если уравнение

$$g(k) = 0, \quad k > 0, \tag{11}$$

имеет корни, то положительный квадрант Q^+ разбивается лучами, соответствующими этим корням, на секторы, в которых $\dot{K}$ имеет постоянный знак. При этом, как следует из (8), (6), (3), в секторах, прилегающих к координатным осям, неравенство (10) нарушается всегда. Следовательно, выполнение (10), а значит, и (7) возможно в том и только том случае, когда разрешимо уравнение (11). Из-за нарушения неравенства (10) при $k \to 0$ и $k \to \infty$ число корней уравнения (11) с учётом возможностей их кратности чётно. Так как функция f согласно (3) выпукла, то их число не превышает двух. Таким образом, если уравнение (11) разрешимо, то оно имеет ровно два корня $k_2 \geqslant k_1 > 0$ и Q^+ разбивается ими на три сектора:

1) $k < k_1$ — сектор малой фондооснащённости;
2) $k_1 < k < k_2$ — сектор нормальной фондооснащённости;
3) $k > k_2$ — сектор перегруженной фондооснащённости.

В первом и последнем секторах при любом управлении основные фонды убывают: $\dot{K} < 0$. На граничных лучах $k = k_1$ и $k = k_2$ среднего сектора $\dot{K} = 0$; внутри среднего сектора $(k_1 < k < k_2)$ любое управление рассматриваемой макроэкономической системой сопровождается ростом основных фондов: $\dot{K} > 0$. Если же уравнение (11) не имеет корней, то для всех $K, L > 0$ нарушается принцип неубывания основных фондов и такую макроэкономическую систему можно называть полностью диссипативной, тогда как все остальные системы — нормальными. Из (8) и (3) ясно, что любая полностью диссипативная система с заданной функцией f может быть превращена в нормальную некоторыми изменениями коэффициентов μ, ω, η и наоборот. Поэтому положительный октант пространства параметров (μ, ω, η) системы разбивается некоторой поверхностью Γ с уравнением

$$\Phi(\mu, \omega, \eta) = 0 \tag{12}$$

на области: N — нормальности и D — диссипативности. Будем считать, что в N функция $\Phi > 0$, а в D полагаем, что $\Phi < 0$.

Поскольку для каждой точки из D уравнение (11) не имеет корней, а в N имеет ровно два корня k_1 и k_2, то в точках Γ, и только в них, уравнение (11) имеет единственный двукратный корень k_0. Введя более подробное обозначение:

$$G(\mu, \omega, \eta, k) \equiv \eta f(k) - \mu k - \omega, \tag{13}$$

можно сказать, что принадлежность $(\mu, \omega, \eta) \in \Gamma$ эквивалентна существованию единственного корня k_0 уравнения

$$G(\mu, \omega, \eta, k) = 0, \quad k_0 > 0. \tag{14}$$

Из вида (13) функции G очевидно, что вместе с любой точкой $(\mu, \omega, \eta) \in \Gamma$ весь луч $(\lambda\mu, \lambda\omega, \lambda\eta)$ с $\lambda > 0$ также принадлежит Γ, т. е. Γ является конусом с вершиной в начале координат, образующие которого параметризованы величиной k_0. С другой стороны, (14) можно трактовать как уравнение семейства плоскостей в пространстве переменных (μ, ω, η) с параметром k_0. Следовательно, конус Γ должен быть огибающей семейства (14). Эта огибающая существует, ибо достаточные условия её существования выполнены: $G \in C^1$, $\dfrac{\partial G}{\partial \omega} = -1 \neq 0$. Её уравнение может быть найдено по известному рецепту: исключением k_0 из системы уравнений

$$\begin{gathered} G(\mu, \omega, \eta, k_0) \equiv \eta f(k_0) - \mu k_0 - \omega = 0, \\ \frac{\partial G(\mu, \omega, \eta, k_0)}{\partial k_0} \equiv \eta f'(k_0) - \mu = 0. \end{gathered} \tag{15}$$

Учитывая (8), можно показать, что полная диссипативность системы обязана строгой отрицательности функции $g(k)$, т. е. связана с малыми значениями η и большими μ, ω. Следовательно, D расположена по значениям η ниже конуса Γ, а выше него имеем область N.

Для системы Кобба — Дугласа из (4) и (15) легко получить следующий конкретный вид уравнения (12) конуса Γ:

$$A\eta \left(\frac{p}{\mu}\right)^p \left(\frac{q}{\omega}\right)^q - 1 = 0. \tag{16}$$

Следовательно, система Кобба — Дугласа полностью диссипативна, если

$$a \equiv A\eta \left(\frac{p}{\mu}\right)^p \left(\frac{q}{\omega}\right)^q < 1, \tag{17}$$

и нормальна, если

$$a \geqslant 1. \tag{18}$$

2. ПРЕДЕЛЬНО ДОПУСТИМЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ

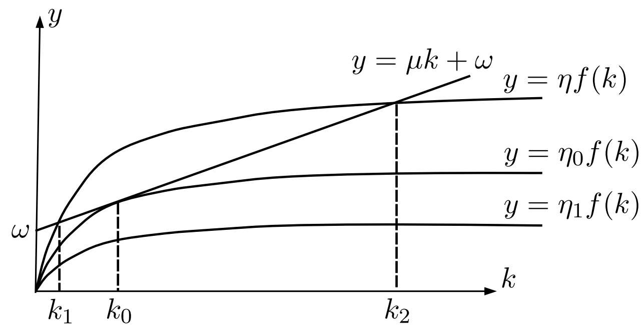
Хотя в предыдущем разделе в общем виде решена задача о допустимых значениях параметров (μ, ω, η) линейно-однородной системы с заданной функцией $f(k)$, гарантирующих нормальность системы, ниже приведём более наглядные решения трёх частных задач, имеющих практический интерес, в которых задаются какие-либо два параметра из набора (μ, ω, η), требуется определить значения оставшегося параметра, обеспечивающие нормальность системы.

2.1. Заданы μ, ω, найти η

Пусть значение η таково, что уравнение (11) имеет два разных корня k_1 и $k_2 > k_1$, т. е. $(\mu, \omega, \eta) \notin D \cup \Gamma$. Перепишем уравнение (11) в форме, удобной для графического решения:

$$\eta f(k) = \mu k + \omega. \tag{19}$$

На рисунке приведена обычная графическая иллюстрация решения (19).



Графическая иллюстрация решения (19)

Корни k_1 и k_2 находятся как абсциссы точек пересечения графиков функций $y = \eta f(k)$ и $y = \mu k + \omega$. Из (3) ясно, что при уменьшении η корни k_1 и k_2 сближаются, благодаря опусканию графика $y = \eta f(k)$ относительно фиксированной прямой $y = \mu k + \omega$. В пределе при некотором значении η_0 корни k_1 и k_2 сливаются в один двукратный корень $k_1 = k_2 = k_0$, и в этой точке прямая $y = \mu k + \omega$ касается графика функции $y = \eta_0 f(k)$. При дальнейшем уменьшении η графики уже не пересекаются: корней уравнения (19) нет. Таким образом, для всех $\eta \geqslant \eta_0$ точки $(\mu, \omega, \eta) \in N$, для всех $\eta < \eta_0$ точки $(\mu, \omega, \eta) \in D$, а сама точка $(\mu, \omega, \eta_0) \in \Gamma$, и значение η_0 можем назвать предельно допустимым значением налогового коэффициента. Её значение легко найти, решая систему

$$\begin{gathered} \eta_0 f(k_0) = \mu k_0 + \omega, \\ \eta_0 f'(k_0) = \mu. \end{gathered} \tag{20}$$

Первое из этих уравнений говорит, что k_0 — корень уравнения (19), второе является условиям касания. Учитывая (3), легко исключить η_0 из (20):

$$\mu[f(k_0) - k_0 f'(k_0)] = \omega f'(k_0). \tag{21}$$

Решив (21) относительно k_0, подставляем его значение во второе из уравнений (20): $\eta_0 = \dfrac{\mu}{f'(k_0)}$. Для системы Кобба — Дугласа уравнение (21) принимает вид $\mu q k_0^p = \omega p k_0^{-q}$. Следовательно,

$$k_0 = \frac{\omega p}{\mu q}, \quad \eta_0 = \frac{1}{A}\left(\frac{\mu}{p}\right)^p \left(\frac{\omega}{q}\right)^q.$$

При $\eta > \eta_0$, т. е. при выполнении (18), система Кобба — Дугласа является нормальной. Аналогично решаются и две оставшиеся задачи.

2.2. Заданы ω и η, найти μ

Решаем уравнение

$$\eta[f(k_0) - k_0 f'(k_0)] = \omega \tag{22}$$

относительно k_0, затем подставляем его значение в формулу

$$\mu_0 = \eta f'(k_0). \tag{23}$$

Для системы Кобба — Дугласа уравнение (22) принимает следующий конкретный вид:

$$A\eta q k_0^p = \omega. \tag{24}$$

Комбинируя (24) и (23), имеем $\mu_0 = p(A\eta)^{1/p}\left(\dfrac{q}{\omega}\right)^{q/p}$. При $\mu \leqslant \mu_0$, что эквивалентно выполнению (18) система Кобба — Дугласа нормальна.

2.3. Заданы μ, η, найти ω

Решаем уравнение

$$\eta f'(k_0) = \mu \tag{25}$$

относительно k_0. Найденное значение k_0 вставляем в формулу $\omega_0 = \eta[f(k_0) - k_0 f'(k_0)]$. Для примера системы Кобба — Дугласа уравнение (25) имеет вид: $A\eta p k_0^{-q} = \mu$ для всех $\omega \leqslant \omega_0 \equiv Aq(A\eta)^{1/q}(p/\mu)^{p/q}$, что эквивалентно условию (18). Система Кобба — Дугласа нормальна.

3. МАКСИМИЗАЦИЯ ВАЛОВОГО ДОХОДА

В качестве естественного критерия оптимального управления макроэкономической системой с производственной функцией $Y(t)$ в промежутке времени $t \in [0, T]$ напрашивается следующий критерий максимума валового дохода:

$$\int_0^T Y(t)dt = \int_0^T F(K(t), L(t))\, dt \to \max.$$

Искомыми функциями задачи оптимального управления системой являются $K(t)$ и $L(t)$ при $t \in [0, T]$ с некоторыми начальными условиями

$$K(0) = K_0 > 0, \quad L(0) = L_0 > 0 \tag{26}$$

и удовлетворяющие уравнению баланса (5). Чтобы иметь возможность применять подробно разработанную технику Эйлера — Лагранжа решения подобных задач, потребуем, чтобы искомые функции принадлежали классу $C^2[0, T]$. Тогда с учётом факта $\eta = \mathrm{const} > 0$ задача оптимального управления системой по принципу максимума валового дохода имеет вид

$$\begin{gathered} I_0(K, L) = \eta \int_0^T F(K, L)dt \to \max, \\ \dot{K} + \mu K + wL - \eta F(K, L) = 0, \\ K(0) = K_0, \quad L(0) = L_0, \\ K(t), L(t) \in C^2[0, T]. \end{gathered} \tag{27}$$

Как известно, если задача (27) разрешима, то все её решения содержатся среди решений следующей вариационной задачи с неголономной связью:

$$\begin{gathered}\delta I_0(K,L)=0,\\ \dot K+\mu K+wL-\eta F(K,L)=0,\\ K(0)=K_0,\quad L(0)=L_0,\\ K(t),L(t)\in C^2[0,T].\end{gathered}\tag{28}$$

В задаче (28) «верхний конец» свободен, т. е. значения $K(t)$ и $L(t)$ не заданы. Но если $\{K(t),L(t)\}$ — решение задачи (28), то, найдя по нему величины $K_1=K(T)$ и $L_1=L(T)$, мы можем поставить вариационную задачу с фиксированными концами:

$$\begin{gathered}\delta I_0(K,L)=0,\\ \dot K+\mu K+wL-\eta F(K,L)=0,\\ K(0)=K_0,\quad L(0)=L_0,\quad K(T)=K_1,\quad L(T)=L_1,\\ K(t),L(t)\in C^2[0,T].\end{gathered}\tag{29}$$

При этом решения задач (28) и (29) совпадают, а для решения (29) можно применять обычную технику неопределённых множителей Лагранжа для вариационной задачи с неголономными связями (см., например, [7]). Следуя этому рецепту, вводим дополнительную искомую функцию $x=x(t)$ — неопределённый множитель Лагранжа:

$$\Lambda^*(\dot K,K,L)=\eta F(K,L)+x(\dot K+\mu K+wL-\eta F(K,L)),$$

затем составляем систему уравнений Эйлера — Лагранжа:

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\frac{\partial\Lambda^*}{\partial\dot K}-\frac{\partial\Lambda^*}{\partial K}=0,\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial\Lambda^*}{\partial\dot L}-\frac{\partial\Lambda^*}{\partial L}=0,\\ \dot K+\mu K+wL-\eta F(K,L)=0.\end{gathered}\tag{30}$$

Известно, что решения задачи (29) удовлетворяют системе (30). Следовательно, решения задачи (27) содержатся среди решений системы (30).

Теперь применим эти общие рассуждения к системе с линейно-однородной производственной функцией со свойствами (3). Тогда система (30) принимает вид

$$\begin{gathered}\dot x-(1-x)\eta f'(k)-\mu x=0,\\ (1-x)\eta h(k)+wx=0,\\ \dot K+\mu K+wL-\eta F(K,L)=0,\end{gathered}\tag{31}$$

где $h(k)=f(k)-kf'(k)$. Во втором из уравнений (31) имеем неравенство $h\eta-\omega\neq0$, ибо в противном случае из этого же уравнения получается недопустимое значение $\omega=0$. Следовательно, это уравнение разрешается относительно x:

$$x=\frac{\eta h}{\eta h-\omega}.\tag{32}$$

Подставляя (32) в первое из уравнений (31) и учитывая начальное условие (26), для фондонасыщенности получаем следующую задачу Коши:

$$\begin{gathered}wkf''(k)\dot k=[\omega-\eta h(k)][wf'(k)-\mu h(k)],\\ k(0)=K_0/L_0.\end{gathered}\tag{33}$$

Задача (33) разрешима и притом однозначно. Если $k_0 = k_3$, где k_3 — корень уравнения $\omega - \eta h(k) = 0$, то решением (33) является постоянная функция $k(t) = k_3$. Однако это решение не может соответствовать экстремали задачи (28), так как противоречит второму из уравнений (31) при $\omega > 0$. Если $k_0 = k_4$, где k_4 — корень уравнения $wf'(k) - \mu h(k) = 0$, то решением (33) является опять постоянная $k_0 = k_4$. Если $k_0 \neq k_3, k_4$, то в уравнении (33) законно разделение переменных:

$$\frac{wkf''(k)dk}{(\omega - \eta h(k))(wf'(k) - \mu h(k))} = dt. \tag{34}$$

В этом случае решение задачи определено неявно квадратурой

$$\int\limits_{k_0}^{k(t)} \frac{wkf''(k)dk}{(\omega - \eta h(k))(wf'(k) - \mu h(k))} = t. \tag{35}$$

Далее перейдём к анализу третьего из уравнений (31), заменим L формулой

$$L = K/k. \tag{36}$$

Тогда в случае известного коэффициента $k(t) = k_4$ для K получаем линейное уравнение, и в итоге — задачу Коши

$$\begin{gathered} K(0) = K_0, \\ K' = \frac{g(k(t))K}{k(t)}. \end{gathered} \tag{37}$$

Решением этой задачи, соответствующей функции $k(t) = k_4$, является

$$K(t) = K_0 e^{\lambda t}, \quad \lambda = \frac{g(k_4)}{k_4}. \tag{38}$$

Подставляя (38) в (36) и учитывая (26), находим

$$L(t) = L_0 e^{\lambda t}, \tag{39}$$

$$Y(t) = Y_0 e^{\lambda t}, \quad Y_0 = F(K_0, L_0). \tag{40}$$

И траекторией является луч $k = k_4 L$.

Теперь рассмотрим случай, когда $k(t)$ определена квадратурой (35). Тогда решением (37) является

$$K(t) = K_0 \exp\left\{ \int\limits_0^t \frac{g(k(t))}{k(t)}\, dt \right\}.$$

Здесь интеграл легко вычисляется переходом к интегрированию по k с помощью (34):

$$\int\limits_0^t \frac{g(k(t))}{k(t)} dt = \omega \int\limits_{k_0}^{k(t)} \frac{g(k)f''(k)dk}{(\omega - \eta h(k))(wf'(k) - \mu h(k))} = \ln \frac{(\omega - \eta h(k))(wf'(k_0) - \mu h(k_0))}{(\omega - \eta h(k_0))(wf'(k) - \mu h(k))}.$$

Следовательно,

$$K = K_0 \frac{(\omega - \eta h(k))(wf'(k_0) - \mu h(k_0))}{(\omega - \eta h(k_0))(wf'(k) - \mu h(k))}, \quad k = k(t). \tag{41}$$

Соответствующие значение $L(t)$, $Y(t)$ можем найти по (36) и (3):

$$L(t) = \frac{K(t)}{k}, \quad Y(t) = \frac{f(k)}{k} K(t).$$

Уравнение траектории системы в этом случае получается элементарной подстановкой $k = K/L$ в (41):

$$K = K_0 \frac{(\omega - \eta h(K/L))(wf'(k_0) - \mu h(k_0))}{(\omega - \eta h(k_0))(wf'(K/L) - \mu h(K/L))}.$$

Решение системы (30) завершено.

Перейдём к проблеме отбора истинных решений (27) из числа решений (30). Решения (28) совпадают с безусловными экстремалями функционала

$$I(K, L) = \int\limits_0^T \Lambda^*(\dot{K}, K, L)\, dt$$

и автоматически удовлетворяют (30) и уравнению связи (5), максимумы I_0 и I совпадают. Кроме того, на всех траекториях, удовлетворяющих (5), значения этих функционалов совпадают.

Пусть $\{K(t), L(t)\}$, $t \in [0, T]$, — экстремаль (28). Рассмотрим произвольную гладкую траекторию сравнения $\{\bar{K}(t), \bar{L}(t)\}$, $t \in [0, T]$, удовлетворяющую концевым условиям задачи (28), из слабой окрестности экстремали:

$$\overline{K}(t) = K(t) + \varepsilon_1(t), \quad \bar{L}(t) = L(t) + \varepsilon_2(t),$$
$$\sup_{t \in [0,T]} \left(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + {\varepsilon'}_1^2 + {\varepsilon'}_2^2\right)^{1/2} < \varepsilon.$$

Тогда, пользуясь формулой Тейлора и экстремальностью $\{K, L\}$, легко получить оценку

$$\begin{gathered} I(\overline{K}, \bar{L}) - I(K, L) = \frac{1}{2} \int\limits_0^T \Omega\, dt + o(\varepsilon^2), \\ \Omega = \Omega(t) = (1 - x) \frac{f''(k)}{L} (\varepsilon_1 - k\varepsilon_2)^2. \end{gathered} \tag{42}$$

Здесь $\eta > 0$, $L > 0$, $-f''(k) > 0$. Следовательно, максимумы I_0 и I могут достигаться лишь на решениях (30) с $x < 1$, тогда как их минимумами могут быть лишь решения (30) с $x > 1$. Если $f \in C^\infty(R^+)$, то методом математической индукции легко получить дальнейшее уточнение оценки (42):

$$o(\varepsilon^2) = (\varepsilon_1 - k\varepsilon_2)^2 o(\varepsilon). \tag{43}$$

Учитывая совпадения экстремалей и максимумов I и I_0, а также (42) и (43), получаем более определённый вывод. Пусть $f \in C^\infty(R^+)$, $\{K, L\}$ — решение (31), $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число. Тогда если $\varepsilon_1 \equiv k\varepsilon_2$, то $I_0(\overline{K}, \bar{L}) = I_0(k, L)$; если же $\varepsilon_1 \neq k\varepsilon_2$, то при $x < 1$ имеем $I_0(\overline{K}, \bar{L}) < I_0(k, L)$, а при $x > 1$ справедливо неравенство $I_0(\overline{K}, \bar{L}) > I_0(K, L)$. Таким образом, решения задачи (27) суть решения (31) с $x < 1$, тогда как решения (31) с $x > 1$, наоборот, минимизируют функционал I_0 задачи (27), т. е. дают наихудшее управление системой. Заметим, что условие $x < 1$ с учётом (32) эквивалентно неравенству

$$\eta h(k) < \omega. \tag{44}$$

Здесь $h(k)$ — монотонно возрастающая функция, поскольку $h'(k) = -kf''(k) > 0$, причём $h(0) = 0$. Следовательно, существует единственный корень $k_3 > 0$ уравнения $\eta h(k_3) = \omega$. Этим корнем положительный квадрат Q^+ разбивается на два сектора: нижний сектор $k < k_3$, где выполняется (44), т. е. экстремали дают максимум I_0, и верхний сектор $k > k_3$, где выполняется неравенство, противоположное к (44), а экстремали дают минимум I_0.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Найдены значения коэффициентов пропорциональности потребления, налоговых и амортизационных отчислений, обеспечивающие неубывание основных фондов. Для частного случая производственной функции Кобба — Дугласа выписаны аналитические выражения для указанных коэффициентов. Исследована задача управления макроэкономической системой с линейно-однородной производственной функцией $F(K, L)$ с учётом уравнения баланса (5). Задача оптимального управления (27) сведена к вариационной задаче с неголономной связью (29). Её решение выражено через квадратуру задачи Коши для одного уравнения с разделяющимися переменными.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Комарова А.В., Павшок О.В.* Оценка вклада человеческого капитала в экономический рост регионов России (на основе модели Мэнкью — Ромера — Уэйла) // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Сер. Соц.-эконом. науки. 2007. Т. 7, № 3. С. 191–201.
2. *Корицкий А.В.* Человеческий капитал как фактор экономического роста регионов России. Новосибирск: изд. Сибирск. ун-та потреб. кооперации, 2010.
3. *Romer D.* Advanced Macroeconomics. N. Y.: McGraw-Hill, 2012.
4. *Бирюкова Е.А., Плетнев Д.А., Федоров В.Е., Бирюков Е.С.* Модели экономического роста для российской экономики // Вестн. Челябинск. гос. ун-та. 2018. № 12(422). С. 19–32.
5. *Acemogly D.* Introduction to Modern Economic Growth. Princeton: Princeton Univ. Press, 2008.
6. *Барро Р.Дж., Сала-и Мартин Х.* Экономический рост. М.: БИНОМ; Лаборатория знаний, 2010.
7. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 519.86

MAXIMIZING GROSS PRODUCT FOR THE MACROECONOMIC SYSTEM WITH CONSUMPTION PROPORTIONAL TO LABOR RESOURCES

V. V. Naumov, **I. I. Shamaev**[1a], **S. V. Mestnikov**[2b], **N. P. Lazarev**[2c]

[1] *Educational Institution of the Republic of Sakha (Yakutia), «Republican Lyceum Boarding School», ul. Oyunsky, 37, Yakutsk 677000, Russia,*
[2] *North-Eastern Federal University, ul. Kulakovsky, 48, Yakutsk 677000, Russia*

E-mails: [a]rcollege@gov14.ru, [b]mestsv@mail.ru, [c]nyurgun@ngs.ru

Received 06.11.2021, revised 20.12.2021, accepted 13.01.2022

Abstract. A new problem of managing a macroeconomic system with a linearly homogeneous production function is considered, taking into account the balance equation. A gross income of a year is divided into an investment and a consumption, while the volume of the total consumption is proportional to labor resources. A criterion for optimal control is the total value of gross income for a given time interval. As a research apparatus, the maximum principle is applied, due to which the optimal control problem is reduced to a variational problem with a nonholonomic constraint. Its solution is expressed in terms of the quadrature of the Cauchy problem for one equation with separable variables. The values of coefficients of proportionality of consumption, tax and depreciation deductions, ensuring the non-decline of fixed assets, are found. A system with a Cobb—Douglas production function is considered as an example.

Keywords: economic model, variational problem, production function, optimal control.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.204

REFERENCES

1. Komarova A.V., Pavshok O.V. Otsenka vklada chelovecheskogo kapitala v ekonomicheskii rost regionov Rossii (na osnove modeli Menk'yu — Romera — Ueila) [Assessment of the contribution of human capital to the economic growth of Russian regions (based on the model Mankyu — Romera — Weila)]. *Vestn. Novosib. gos. un-ta. Ser. Sots.-ekonom. nauki*, 2007, Vol. 7, No. 3, pp. 191–201 (in Russian).
2. Koritskii A.V. Chelovecheskii kapital kak faktor ekonomicheskogo rosta regionov Rossii [Human capital as a factor of economic growth of Russian regions]. Novosibirsk: Publ. Sibirsk. un-ta Potreb. Kooperatsii, 2010 (in Russian).
3. Romer D. Advanced Macroeconomics. N. Y.: McGraw-Hill, 2012.
4. Biryukova E.A., Pletnev D.A., Fedorov V.E., Biryukov E.S. Modeli ekonomicheskogo rosta dlya rossiiskoi ekonomiki [Economic growth models for the Russian economy]. *Vestn. Chelyabinsk. gos. un-ta*, 2018, No. 12(422), pp. 19–32 (in Russian).
5. Acemogly D. Introduction to Modern Economic Growth. Princeton: Princeton Univ. Press, 2008.
6. Barro R.Dzh., Sala-i Martin Kh. Ekonomicheskii rost [Economic growth]. Moscow: BINOM; Laboratoriya Znanii, 2010 (in Russian).
7. El'sgol'ts L.E. Differentsial'nye uravneniya i variatsionnoe ischislenie [Differential equations and calculus of variations]. Moscow: Nauka, 1969 (in Russian).

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2022, Vol. 16, No. 2.