

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор	В. Л. Береснев
Зам. главного редактора	А. Л. Карчевский
Отв. секретарь	В. А. Дедок

ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ

Г. В. Алексеев	С. Б. Медведев
Б. Д. Аннин	Р. Г. Новиков
В. С. Белоносов	Д. Е. Пальчунов
В. Н. Белых	П. И. Плотников
Ю. С. Волков	В. Г. Романов
В. П. Ильин	Е. М. Рудой
С. И. Кабанихин	В. М. Садовский
А. Н. Карапетянц	Д. И. Свириденко
М. В. Клибанов	А. С. Терсенов
С. С. Кутателадзе	В. С. Тимофеев
В. А. Левин	В. В. Шайдуров
Н. И. Макаренко	

Журнал основан в 1998 году
Выходит 4 раза в год

Том 25, № 2(90)

Апрель – июнь, 2022 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Андреев В. К., Вахрамеев И. В., Магденко Е. П. Тепловая конвекция во вращающейся трубе	5
Васюткин С. А., Чупахин А. П. Построение минимального базиса инвариантов для дифференциальной алгебры (2×2) -матриц	21
Воронин А. Ф. К методу факторизации матриц-функций в алгебре Винера порядка 2	32
Наумов В. В., Шамаев И. И., Местников С. В., Лазарев Н. П. Максимизация валового дохода для макроэкономической системы с потреблением, пропорциональным трудовым ресурсам	46
• Прокудин А. Н., Фирсов С. В. Упругопластические деформации во вращающемся полом цилиндра с жёстким внешним покрытием при условии максимальных приведённых напряжений	58
Романов В. Г., Бугуева Т. В. Обратная задача для нелинейного волнового уравнения	83
Сенашов С. И., Савостьянова И. Л. Использование законов сохранения для решения краевых задач системы Моисила — Теодореску	101
Фадеев С. А., Дедок В. А., Бондаренко А. Н. Полиномиальный алгоритм классификации решений задачи Томсона	110
Хасанов А. Б., Хасанов Т. Г. Интегрирование нелинейного уравнения Кортевега — де Фриза с нагруженным членом и источником	127

НОВОСИБИРСК

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

УДК 539.374

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ПОЛОМ ЦИЛИНДРЕ С ЖЁСТКИМ ВНЕШНИМ ПОКРЫТИЕМ ПРИ УСЛОВИИ МАКСИМАЛЬНЫХ ПРИВЕДЁННЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

© 2022 А. Н. Прокудин^{1а}, С. В. Фирсов^{1б}

¹*Институт машиноведения и металлургии,
Хабаровский федеральный исследовательский центр ДВО РАН,
ул. Металлургов, 1, г. Комсомольск-на-Амуре 681005, Россия*

E-mails: ^asunbeam_85@mail.ru, ^bfirsov.s.new@yandex.ru

Поступила в редакцию 24.05.2021 г.; после доработки 23.11.2021 г.;
принята к публикации 13.01.2022 г.

Рассматривается деформирование полого цилиндра с зафиксированными торцами и с жёстким внешним покрытием боковой поверхности за счёт центробежных сил, возникающих при его вращении вокруг центральной оси. Данная задача решается в классической постановке теории малых деформаций. Для установки связи между напряжениями и упругими деформациями используется закон Гука. Для описания пластических свойств материала, из которого состоит полый цилиндр, применяется теория пластического течения. В качестве условия пластичности взято условие максимальных приведённых напряжений. Изучались стадия нагружения, при которой скорость вращения монотонно увеличивалась, и стадия разгрузки, при которой скорость вращения монотонно уменьшалась до нуля. На данных стадиях деформируемая среда разбивается на области, соответствующие упругому и пластическому деформированию. Для данных областей приведены аналитические зависимости для нахождения перемещения, деформаций и напряжений в любой момент времени в зависимости от скорости вращения и положения границ данных областей. Это позволяет получить непрерывное распределение данных величин во всей области деформирования в любой момент времени при заданной скорости вращения. Приведён пример расчёта для заданного материала, наглядно проиллюстрированный графиками распределения напряжений и пластических деформаций на различных этапах развития пластического течения. Также приводится график движения границ областей пластического течения. Получена зависимость для скоростей вращения, при которых образуются области повторного пластического течения от значения максимальной скорости вращения, и скоростей, при которых образуются области пластического течения на стадии загрузки. Данная зависимость идентична представленной ранее для случая вращения полого цилиндра с жёстким внешним покрытием при условии пластичности Треска — Сен-Венана.

Ключевые слова: упругопластичность, вращение цилиндра, полый цилиндр с жёстким покрытием, повторное пластическое течение, условие максимальных приведённых напряжений

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.205

ВВЕДЕНИЕ

Расчёт упругопластических деформаций во вращающихся цилиндрах и дисках имеет большое теоретическое и прикладное значение. Первые публикации в этом направлении относятся ещё к началу 20-го века, и с тех пор интерес исследователей к этой теме не ослабевает. Упругопластический анализ позволяет более точно оценить прочность и ресурс как самой вращающейся детали, так и конструкции в целом. Более того, упругопластический анализ имеет большое значение для расчёта новой технологии ротационного автофретирования [1, 2].

Решение данного класса задач обычно проводится в рамках теории малых упругопластических деформаций (уравнения Прандтля — Рейса). Для расчёта цилиндров используется предположение о плоской или обобщённой плоской деформации, а для дисков — предположение о плоском напряжённом состоянии. Данные предположения позволяют значительно упростить рассматриваемую задачу, поскольку остаётся только одна ненулевая компонента перемещений. Следует отметить, что данные упрощения во многих случаях позволяют получить результаты, достаточно близкие к результатам расчёта задачи трёхмерного деформирования, что хорошо показано в работе [3]. Пластические деформации в цилиндрах (дисках) определяются с помощью подходящего условия пластичности (Треска, Мизеса и др.) и ассоциированного с ним закона пластического течения. Реже используется деформационная теория пластичности. Классическое условие пластичности Треска является кусочно-линейным, что во многих случаях позволяет получить точное решение краевых задач теории пластичности. При рассмотрении задачи ротационного автофретирования по причине появления повторного пластического течения на стадии разгрузки часто требуется рассматривать влияние эффекта Баушингера, которое было исследовано в работе [2].

Упругопластический анализ вращающегося сплошного цилиндра с закреплёнными концами приведён в [4–6]. Полый цилиндр с закреплёнными торцами и с различными типами граничных условий изучался в [7–10]. Вращающийся сплошной и полый цилиндр со свободными концами изучались в [11, 12]. Во всех указанных работах [4–12] использовалось условие пластичности Треска и предполагалось, что материал цилиндра ведёт себя как идеальное упругопластическое тело. Установлено, что в процессе пластического деформирования во вращающемся теле могут возникать сразу несколько пластических областей, соответствующих разным граням и рёбрам призмы Треска. Для обеспечения непрерывности полученного решения во всём теле необходимо использовать по три подходящих условия непрерывности на каждой границе между областями. Этот вопрос подробно рассмотрен в [5]. Также интересно отметить, что при определённых условиях в процессе разгрузки во вращающемся теле может возникнуть повторное пластическое течение. Это явление изучалось в работах [6, 8–10].

Условие пластичности Мизеса, как и условие Треска относится к классическим условиям пластичности и широко применяется для расчёта упругопластических деформаций. Однако в отличие от условия Треска условие Мизеса является нелинейным, и для решения краевых задач обычно необходимо использовать численные либо приближённо-аналитические методы. В работе [13] на основе итеративного метода Рунге — Кутты предложен алгоритм расчёта напряжённого состояния во вращающемся сплошном и полом диске из идеального упругопластического материала. Анализ перемещений и пластических деформаций в [13] не проводился. Деформационная теория пластичности и закон упрочнения Свифта использовались для упругопластического анализа вращающегося диска переменной высоты с жёстким включением [14], вращающегося сплошного диска эллиптического профиля [15], вращающегося сплошного и полого цилиндра [16]. Разгрузка и повторное пластическое течение во вращающемся цилиндре рассматривались в [17]. Вращающиеся диски с различными типами граничных условий также исследовались в рамках теории пластического течения и модели идеального упругопластического тела [18–22]. Сравнение показывает, что результаты, полученные с использованием условий Треска и Мизеса, имеют определённые отличия. Во-первых, при одинаковой скорости вращения условие Треска предсказывает большую область пластического течения в теле. Во-вторых, скорость полного перехода в состояние пластичности для условия Мизеса выше.

Настоящая работа посвящена упругопластическому анализу вращающегося полого цилиндра с жёстким покрытием на внешней граничной поверхности. Предполагается, что в цилиндре имеет место плоское деформированное состояние, а полные деформации цилиндра являются малыми. Материал цилиндра является идеальным упругопластическим, а его пластические свойства определяются условием максимальных приведённых напряжений [23–25] и ассоциированным с ним законом течения. Данное условие пластичности наряду с условия-

ми Треска и Мизеса относится к классическим. Как и условие Треска, условие максимальных приведённых напряжений является кусочно-линейным. В работах [29, 30] показано, что поверхность текучести для произвольного изотропного материала, пластические свойства которого не зависят от гидростатического напряжения, должна находиться между шестигранниками, соответствующими условию Треска и условию максимальных приведённых напряжений. На практике выбор среди указанных условий пластичности должен определяться механическими свойствами материала, а именно, отношением предела текучести на сдвиг к пределу текучести на растяжение (сжатие). Для условия Треска, как известно, это отношение равно $1/2$, а для условия максимальных приведённых напряжений $2/3$ (см. [31]). Поэтому для материалов, у которых отношение пределов текучести близко к $2/3$, условие максимальных приведённых напряжений является более предпочтительным по сравнению с условием Треска. Согласно результатам экспериментов [31, 32] к таким материалам относятся алюминий, титан, сплавы никеля и нержавеющей сталь, поскольку для них указанное отношение превышает $0,6$.

Условие максимальных приведённых напряжений сравнительно редко применяется для решения задач теории пластичности. Отметим результаты, наиболее близкие к настоящей работе. Данное условие пластичности использовалось для упругопластического анализа вращающегося кольцевого диска [26], вращающегося сплошного цилиндра [27] и вращающегося полого цилиндра с жёстким включением [28].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим полый цилиндр из идеального упругопластического материала. Введём цилиндрическую систему координат (r, φ, z) , ось z которой проходит через ось симметрии цилиндра. Внутренний и внешний радиусы цилиндра обозначим как a и b соответственно. Деформирование цилиндра вызвано центробежными силами, возникающими в результате его вращения вокруг оси симметрии с угловой скоростью $\omega(t)$. Угловым ускорением пренебрегаем. Предположим, что цилиндр находится в плоском деформированном состоянии и сохраняет осевую симметрию в процессе деформирования. Тогда единственным ненулевым перемещением в цилиндре является радиальное. Для удобства введём следующие безразмерные параметры и переменные:

$$\begin{aligned} \beta = \frac{r}{b}, \quad \delta = \frac{a}{b}, \quad u = E\sigma_0 \frac{u_r}{b}, \quad \tilde{d}_{ij} = \frac{E}{\sigma_0} d_{ij}, \quad \tilde{e}_{ij} = \frac{E}{\sigma_0} e_{ij}, \\ \tilde{p}_{ij} = \frac{E}{\sigma_0} p_{ij}, \quad \tilde{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_0}, \quad \Omega = \rho b^2 \sigma_0^{-1} \omega^2, \end{aligned} \quad (1)$$

где σ_0 — предел текучести, E — модуль Юнга, u_r — радиальное перемещение, d_{ij}, e_{ij}, p_{ij} — компоненты тензора полных, упругих и пластических деформаций соответственно, σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, ρ — плотность материала. Всё последующее содержание статьи записано с помощью введённых обозначений (1). Для краткости знак тильды в дальнейшем везде пропущен.

Полные деформации в цилиндре являются малыми и аддитивно разделяются на упругие и пластические составляющие:

$$\begin{aligned} d_{rr} &= e_{rr} + p_{rr} = \frac{\partial u}{\partial \beta}, \\ d_{\varphi\varphi} &= e_{\varphi\varphi} + p_{\varphi\varphi} = \frac{u}{\beta}, \\ d_{zz} &= e_{zz} + p_{zz} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Напряжения и упругие компоненты деформации связаны законом Гука:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)}((1-\nu)e_{rr} + \nu e_{\varphi\varphi} + \nu e_{zz}), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\nu e_{rr} + (1-\nu)e_{\varphi\varphi} + \nu e_{zz}), \\ \sigma_{zz} &= \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\nu e_{rr} + \nu e_{\varphi\varphi} + (1-\nu)e_{zz}),\end{aligned}\quad (3)$$

где ν — коэффициент Пуассона. Обратный закон Гука имеет вид

$$\begin{aligned}e_{rr} &= \sigma_{rr} - \nu(\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz}), \\ e_{\varphi\varphi} &= \sigma_{\varphi\varphi} - \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{zz}), \\ e_{zz} &= \sigma_{zz} - \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}).\end{aligned}\quad (4)$$

Уравнение равновесия в цилиндре запишем в виде

$$\sigma_{rr,\beta} + \beta^{-1}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) = -\Omega\beta. \quad (5)$$

Для задания поверхности нагружения используем условие максимальных приведённых напряжений [23–25]:

$$\begin{aligned}f &= \max(|\sigma_{rr} - \sigma|, |\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma|, |\sigma_{zz} - \sigma|) = \frac{2}{3}, \\ \sigma &= \frac{1}{3}(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz}).\end{aligned}\quad (6)$$

Поверхность в пространстве главных напряжений, соответствующую условию (6), далее будем называть призмой Ивлева [29].

Ассоциированный закон пластического течения имеет вид

$$dp_{ij} = d\lambda \frac{df}{d\sigma_{ij}}, \quad (7)$$

где f — функция поверхности текучести, $d\lambda$ — положительный коэффициент. Закон (7) справедлив только для граней поверхности текучести (6). Если же напряжённое состояние в пластической области соответствует ребру поверхности (6), образованному гранями f_1 и f_2 , то используется обобщение ассоциированного закона [23]:

$$dp_{ij} = d\lambda_1 \frac{df_1}{d\sigma_{ij}} + d\lambda_2 \frac{df_2}{d\sigma_{ij}}, \quad (8)$$

где f_1, f_2 — функции поверхности текучести, $d\lambda_1, d\lambda_2$ — положительные коэффициенты.

Использование законов (7), (8) вместе с условием (6) приводит к пластической несжимаемости. Отсюда следует, что объёмная деформация является чисто упругой. На основе этого и соотношений (2), (4) получим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{u}{\beta} = (1-2\nu)(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz}). \quad (9)$$

Граничные условия задачи имеют вид

$$\sigma_{rr}(\delta) = 0, \quad u(1) = 0. \quad (10)$$

2. РЕШЕНИЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Процесс деформирования состоит из двух стадий. Первая стадия — это нагрузка, при которой происходит рост значения параметра нагружения Ω , сопровождающийся сначала чисто упругим деформированием, переходящим после $\Omega = \Omega_1$ в упругопластическое, а затем в полностью пластическое деформирование. Вторая стадия — это разгрузка, заключающаяся в уменьшении параметра нагружения Ω после того, как он достигнет заданного максимально значения $\Omega = \Omega_{\max}$. На этой стадии также сначала происходит чисто упругое деформирование, однако, в отличие от стадии нагрузки, в цилиндре присутствуют пластические деформации, накопленные в процессе нагружения. Далее при определённых условиях в цилиндре может возникнуть повторное пластическое течение, которое постепенно распространяется на всю деформируемую среду. Рассмотрим эти стадии более подробно.

2.1. Упругое деформирование

Из соотношений (2), (3) и (5) можно получить решения для случая упругого деформирования:

$$u = c_1\beta + \frac{c_2}{\beta} - \frac{1(1+\nu)(1-2\nu)}{8(1-\nu)}\Omega\beta^3, \quad (11)$$

где c_1, c_2 — константы интегрирования. Зависимости для напряжений можно найти из (11) с помощью соотношений (2) и (3):

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)}c_1 - \frac{1}{1+\nu}\frac{c_2}{\beta^2} - \frac{1}{8}\frac{3-2\nu}{1-\nu}\Omega\beta^2, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)}c_1 + \frac{1}{1+\nu}\frac{c_2}{\beta^2} - \frac{1}{8}\frac{1+2\nu}{1-\nu}\Omega\beta^2, \\ \sigma_{zz} &= 2\frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)}c_1 - \frac{1}{2}\frac{\nu}{1-\nu}\Omega\beta^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Константы интегрирования определяются из граничных условий (10):

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{8}\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu}\frac{1-2\nu+(3-2\nu)\delta^4}{1-2\nu+\delta^2}\Omega, \\ c_2 &= \frac{1}{8}\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu}\frac{1-(3-2\nu)\delta^2}{1-2\nu+\delta^2}\delta^2\Omega. \end{aligned} \quad (13)$$

Полученное решение справедливо для значений параметра нагружения $\Omega < \Omega_1$. При заданных граничных условиях (10) выход на поверхность нагружения (6) может происходить как на внутренней $\beta = \delta$, так и на внешней $\beta = 1$ граничных поверхностях. Условие пластичности (6) на внутренней и внешней гранях запишется соответственно:

$$2\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 2, \quad (14)$$

$$2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz} = -2. \quad (15)$$

Подставив в условия (14) и (15) упругое решение (12) и (13), найдём значения параметра нагружения Ω_1^i и Ω_1^o , при которых пластическое течение начнётся на внутренней и внешней граничных поверхностях соответственно:

$$\begin{aligned} \Omega_1^i &= 8\frac{1-\nu}{(2-\nu)(1-2\nu)}\frac{1-2\nu+\delta^2}{(1-\delta^2)^2}, \\ \Omega_1^o &= 4\frac{1-\nu}{1-2\nu}\frac{1-2\nu+\delta^2}{(1-\delta^2)(1-2\nu+(3-2\nu)\delta^2)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Приравняв два полученных значения параметра нагрузки получим, что пластическое течение одновременно начнётся на двух граничных поверхностях при $\delta = \sqrt{\frac{3\nu}{8-5\nu}}$.

При δ меньше данного значения пластичность впервые начнётся на внутренней граничной поверхности, а при больших — на внешней. Также можно отметить, что при $\delta > \sqrt{3/11} \approx 0,522$ пластическое течение впервые будет зарождаться на внешней граничной поверхности при любых значениях $\nu \in (0; 0,5)$. Если же рассмотреть случаи при $\nu < 0$ (что соответствует ауксетикам), то получим, что $\Omega_1^i > \Omega_1^o$ в (16), иными словами, пластическое течение впервые будет зарождаться на внешней граничной поверхности $\beta = 1$. На рис. 1, а в пространстве параметров δ, ν показаны области в которых пластическое течение начинается на внутренней и внешней поверхностях цилиндра соответственно. Зависимости $\Omega_1^i(\delta)$ и $\Omega_1^o(\delta)$ для $\nu = 0,3$ изображены на рис. 1, б.

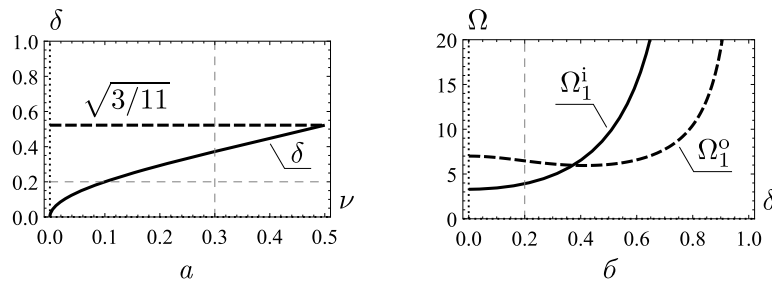


Рис. 1. Условие начала пластического течения: а) зависимость $\delta(\nu)$, при которой пластическое течение начнётся на внутренней (ниже графика) или на внешней граничной поверхности (выше графика); б) зависимости $\Omega_1^i(\delta)$ и $\Omega_1^o(\delta)$ для $\nu = 0,3$

2.2. Упругопластическое деформирование

Когда параметр нагружения достигает значения $\Omega = \Omega_1$, в среде зарождается область пластического деформирования. В зависимости от параметров цилиндра она может возникнуть, как на внутренней граничной поверхности $\beta = \delta$, так и на внешней $\beta = 1$. Первую область ($\delta \leq \beta \leq \beta_1$) обозначим римской цифрой I, а вторую ($\beta_2 \leq \beta \leq 1$) — цифрой II. В оставшейся части цилиндра протекает процесс чисто упругого деформирования.

При увеличении значения параметра нагружения Ω напряжения на внутренней граничной поверхности $\beta = \delta$ переходят на ребро призмы Ивлева:

$$2\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} - \sigma_{zz} = 2, \quad 2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz} = -2. \quad (17)$$

Данная область III будет лежать в пределах $\delta \leq \beta \leq \beta_3$, и соответственно область I будет лежать в пределах $\beta_3 < \beta \leq \beta_1$. В зависимости от параметров цилиндра области пластичности могут появляться в трёх разных последовательностях: I \rightarrow II \rightarrow III, II \rightarrow I \rightarrow III или I \rightarrow III \rightarrow II. Далее рассматривается третий случай: при $\Omega = \Omega_1$ образуется область I, при $\Omega = \Omega_2$ — область III, и при $\Omega = \Omega_3$ — область II.

При увеличении параметра нагружения до $\Omega = \Omega_4$ произойдёт схлопывание упругой области и на её месте ($\beta_1 \leq \beta \leq \beta_2$) образуется новая область пластического деформирования IV, соответствующая тому же ребру (17) призмы Ивлева, что и область III. Это приводит к тому, что при $\Omega = \Omega_5$ постепенно расширяющиеся области III и IV соединятся. Образованную в результате этого область обозначим римской цифрой III. После этого в деформируемой среде останутся только две пластических области: III ($\delta \leq \beta \leq \beta_2$) и II ($\beta_2 < \beta \leq 1$). Граница β_2 между этими областями будет стремиться к внешней граничной поверхности $\beta = 1$, но не достигнет её. Найдём решение определяющей системы уравнений в каждой из указанных областей.

Упругая область. Полученное ранее решение (11), (12) остаётся справедливым в упругой области, но константы интегрирования c_1, c_2 необходимо определять отдельно на каждом интервале значений параметра нагружения Ω .

Область I. Как ранее было сказано, условие пластичности (6) принимает вид (14). Из данного условия и ассоциированного закона течения (7) следует

$$p_{rr} = p_{zz}, \quad p_{\varphi\varphi} = -2p_{zz}. \quad (18)$$

Подставив выражения (18) в (2) и выполнив преобразования, найдём

$$d_{rr} = e_{rr} - e_{zz}, \quad d_{\varphi\varphi} = 2e_{zz} + e_{\varphi\varphi}.$$

Используя (4), из последних выражений получим систему, связывающую полные деформации и напряжения:

$$d_{rr} = (1 + \nu)(\sigma_{rr} - \sigma_{zz}), \quad d_{\varphi\varphi} = (1 - 2\nu)\sigma_{\varphi\varphi} - 3\nu\sigma_{rr} + (2 - \nu)\sigma_{zz}.$$

Выразим значения компонент тензора напряжений из последних соотношений и из условия пластичности (14):

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \frac{5 - 4\nu}{2 + 2\nu} \frac{d_{rr}}{1 - 2\nu} + \frac{1}{3} \frac{d_{\varphi\varphi}}{1 - 2\nu}, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \frac{d_{rr}}{1 - 2\nu} + \frac{1}{3} \frac{d_{\varphi\varphi}}{1 - 2\nu}, \\ \sigma_{zz} &= -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \frac{1 - 8\nu}{2 + 2\nu} \frac{d_{rr}}{1 - 2\nu} + \frac{1}{3} \frac{d_{\varphi\varphi}}{1 - 2\nu}. \end{aligned}$$

Подставим полученные выражения для напряжений в уравнение равновесия (5) и получим дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\beta^2 u_{,\beta\beta} + \beta u_{,\beta} - \frac{2 + 2\nu}{5 - 4\nu} u = 3(1 - 2\nu) \frac{2 + 2\nu}{5 - 4\nu} (\beta - \Omega\beta^3).$$

Введём обозначения для повторяющихся выражений:

$$\alpha^2 = \frac{2 + 2\nu}{5 - 4\nu}, \quad \gamma = \frac{1 - 8\nu}{2 + 2\nu}. \quad (19)$$

Решение приведённого дифференциального уравнения имеет вид

$$u = C_1\beta^{-\alpha} + C_2\beta^\alpha + (2 + 2\nu) \left(1 - 3 \frac{1 - 2\nu}{43 - 38\nu} \Omega\beta^2 \right) \beta. \quad (20)$$

Здесь и далее C_i — коэффициенты интегрирования для областей пластического течения. Из найденного решения получим выражения для напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{3} \frac{1 - \alpha^{-1}}{1 - 2\nu} C_1\beta^{-1-\alpha} + \frac{1}{3} \frac{1 + \alpha^{-1}}{1 - 2\nu} C_2\beta^{-1+\alpha} + \frac{2}{1 - 2\nu} - \frac{17 - 10\nu}{43 - 38\nu} \Omega\beta^2, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{3} \frac{1 - \alpha}{1 - 2\nu} C_1\beta^{-1-\alpha} + \frac{1}{3} \frac{1 + \alpha}{1 - 2\nu} C_2\beta^{-1+\alpha} + \frac{2}{1 - 2\nu} - 8 \frac{1 + \nu}{43 - 38\nu} \Omega\beta^2, \\ \sigma_{zz} &= \frac{1}{3} \frac{1 - \alpha\gamma}{1 - 2\nu} C_1\beta^{-1-\alpha} + \frac{1}{3} \frac{1 - \alpha\gamma}{1 - 2\nu} C_2\beta^{-1+\alpha} + \frac{4\nu}{1 - 2\nu} + \frac{1 - 26\nu}{43 - 38\nu} \Omega\beta^2. \end{aligned} \quad (21)$$

Область II. Условие пластичности (16) имеет вид (15), а процесс решения аналогичен области I. Перемещение имеет вид

$$u = C_3\beta^{-\alpha^{-1}} + C_4\beta^{\alpha^{-1}} - (2 + 2\nu) \left(1 + 3 \frac{1 - 2\nu}{13 - 22\nu} \Omega\beta^2 \right) \beta. \quad (22)$$

Зависимости для напряжений в этой области запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{1}{3} \frac{1 - \alpha^{-1}}{1 - 2\nu} C_3 \beta^{-1 - \alpha^{-1}} + \frac{1}{3} \frac{1 + \alpha^{-1}}{1 - 2\nu} C_4 \beta^{-1 + \alpha^{-1}} - \frac{2}{1 - 2\nu} - 8 \frac{1 + \nu}{13 - 22\nu} \Omega \beta^2, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{3} \frac{\alpha^{-2} - \alpha^{-1}}{1 - 2\nu} C_3 \beta^{-1 - \alpha^{-1}} + \frac{1}{3} \frac{\alpha^{-2} + \alpha^{-1}}{1 - 2\nu} C_4 \beta^{-1 + \alpha^{-1}} - \frac{2}{1 - 2\nu} - \frac{11 + 2\nu}{13 - 22\nu} \Omega \beta^2, \\ \sigma_{zz} &= -\frac{1}{3} \frac{\gamma + \alpha^{-1}}{1 - 2\nu} C_3 \beta^{-1 - \alpha^{-1}} - \frac{1}{3} \frac{\gamma - \alpha^{-1}}{1 - 2\nu} C_4 \beta^{-1 + \alpha^{-1}} - \frac{4\nu}{1 - 2\nu} - \frac{5 + 14\nu}{13 - 22\nu} \Omega \beta^2.\end{aligned}\quad (23)$$

Из решения (22) и (23) с помощью соотношений (2) и (4) можно найти пластические деформации:

$$\begin{aligned}p_{rr} = -2p_{\varphi\varphi} = -2p_{zz} &= -10 \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{13 + 22\nu} \Omega \beta^2 \\ &\quad - \frac{1}{3} (1 + 2\alpha^{-1}) C_3 \beta^{-1 - \alpha^{-1}} - \frac{1}{3} (1 - 2\alpha^{-1}) C_4 \beta^{-1 + \alpha^{-1}}.\end{aligned}\quad (24)$$

Области III и IV. Условие пластичности (6) в данных областях имеет вид (17). Выразим из него σ_{rr} и $\sigma_{\varphi\varphi}$ через σ_{zz} , подставим их в уравнение равновесия (5) и найдём σ_{zz} . В итоге получим

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= C_5 - \frac{2}{3} (1 - 2 \log \beta) - \frac{1}{2} \Omega \beta^2, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= C_5 + \frac{2}{3} (1 + 2 \log \beta) - \frac{1}{2} \Omega \beta^2, \\ \sigma_{zz} &= C_5 + \frac{4}{3} \log \beta - \frac{1}{2} \Omega \beta^2.\end{aligned}\quad (25)$$

Подставим (25) в уравнение (9) и найдём перемещение:

$$u = \frac{3}{2} (1 - 2\nu) C_5 \beta + C_6 \beta^{-1} - (1 - 2\nu) (1 - 2 \log \beta) \beta - \frac{3}{8} (1 - 2\nu) \Omega \beta^3.\quad (26)$$

Зная напряжения (25), с помощью обратного закона Гука (4) найдём упругие деформации. Подставив полученные зависимости и (26) в (2), вычислим значения компонент тензора пластических деформаций:

$$\begin{aligned}p_{rr} &= \frac{1}{2} (1 - 2\nu) C_5 - C_6 \beta^{-2} + \frac{1}{3} (5 - 4\nu + 2(1 - 2\nu) \log \beta) - \frac{5}{8} (1 - 2\nu) \Omega \beta^2, \\ p_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{2} (1 - 2\nu) C_5 + C_6 \beta^{-2} - \frac{1}{3} (5 - 4\nu - 2(1 - 2\nu) \log \beta) + \frac{1}{8} (1 - 2\nu) \Omega \beta^2, \\ p_{zz} &= -(1 - 2\nu) C_5 - \frac{4}{3} (1 - 2\nu) \log \beta + \frac{1}{2} \Omega \beta^2.\end{aligned}\quad (27)$$

Для области IV справедливы те же соотношения (25)–(27), за исключением констант интегрирования, которые обозначены как C_7 и C_8 .

2.3. Разгрузка

После достижения значения $\Omega = \Omega_{\max}$ параметр нагружения начинает уменьшаться. Процесс разгрузки сопровождается уменьшением и перераспределением напряжений в среде. Введём обозначения для пластических деформаций, накопленных на стадии нагружки:

$$\begin{aligned}\hat{p}_{rr} &= p_{rr}(\Omega_{\max}), \\ \hat{p}_{\varphi\varphi} &= p_{\varphi\varphi}(\Omega_{\max}), \\ \hat{p}_{zz} &= p_{zz}(\Omega_{\max}).\end{aligned}$$

Запишем уравнение равновесия (5) через перемещения и пластические деформации с помощью соотношений (2), (3):

$$\begin{aligned}\beta^2 u_{,\beta\beta} + \beta u_{,\beta} - u &= \hat{p}(\beta) - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} \Omega \beta^3, \\ \hat{p}(\beta) &= \frac{1-2\nu}{1-\nu} (\hat{p}_{rr} - \hat{p}_{\varphi\varphi}) \frac{1}{\beta} + \hat{p}_{rr,\beta} + \frac{\nu}{1-\nu} (\hat{p}_{\varphi\varphi,\beta} + \hat{p}_{zz,\beta}).\end{aligned}$$

В общем виде решение данного уравнения примет вид

$$u = d_1 \beta + d_2 \beta^{-1} + \frac{1}{2} \beta \int \hat{p} d\beta - \frac{1}{2} \beta^{-1} \int \beta^2 \hat{p} d\beta - \frac{1}{8} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} \Omega \beta^3.$$

В связи с тем, что при $\Omega = \Omega_{\max}$ в среде присутствовали две области пластического течения, то после начала уменьшения параметра нагружения в среде также будут две области упругого деформирования с различными накопленными пластическими деформациями. Получим значения перемещений для каждой из них. Область I будет соответствовать области III пластичности с пластическими деформациями (27):

$$u = d_1 \beta + d_2 \beta^{-1} - (1-2\nu)(1-2\log\beta)\beta - \frac{1}{8} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} \Omega \beta^3 - \frac{1}{4} \frac{(1-2\nu)^2}{1-\nu} \Omega_{\max} \beta^3, \quad (28)$$

а область II — области II пластичности с деформациями (24):

$$\begin{aligned}u &= d_3 \beta + d_4 \beta^{-1} + C_3 \beta^{-\alpha^{-1}} + C_4 \beta^{\alpha^{-1}} - \\ &\quad - \frac{1}{8} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} \Omega \beta^3 - \frac{35}{8} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)^2}{(1-\nu)(13+22\nu)} \Omega_{\max} \beta^3.\end{aligned} \quad (29)$$

Зная перемещения (28), (29) и пластические деформации (27), (24), напряжения можно найти из соотношений (2), (3).

2.4. Повторное пластическое течение

При уменьшении параметра нагружения Ω напряжения в среде повторно достигнут поверхности нагружения (6). В областях повторного пластического течения пластические деформации состоят из накопленных \hat{p}_{rr} , $\hat{p}_{\varphi\varphi}$, \hat{p}_{zz} и вторичных s_{rr} , $s_{\varphi\varphi}$, s_{zz} пластических деформаций:

$$p_{rr} = \hat{p}_{rr} + s_{rr}, \quad p_{\varphi\varphi} = \hat{p}_{\varphi\varphi} + s_{\varphi\varphi}, \quad p_{zz} = \hat{p}_{zz} + s_{zz}. \quad (30)$$

Повторное пластическое течение развивается аналогично пластическому течению на стадии нагружки. В начале область повторного пластического течения III зарождается на внутренней граничной поверхности $\beta = \delta$ при $\Omega = \Omega_6$ с упругопластической границей β_4 . Затем, при $\Omega = \Omega_7$, также на внутренней граничной поверхности произойдёт переход напряжённого состояния на ребро призмы Ивлева, в результате чего появится область V. Граничную

поверхность, разделяющую указанные пластические области, обозначим β_6 . После этого напряжения достигнут поверхности нагружения на внешней граничной поверхности $\beta = 1$ при $\Omega = \Omega_8$ и в указанном месте появится область повторного пластического течения IV с упруго-пластической границей β_5 . В дальнейшем упругопластическая граница β_5 достигнет границы раздела упругих областей β_2 при $\Omega = \Omega_9$ и соответственно область упругого деформирования II полностью заменится областью повторного пластического течения IV. Однако пластичность продолжит распространяться вглубь среды. Соответствующую ей область обозначим VI. При $\Omega = \Omega_{10}$ области III и VI соединятся и на границе их соприкосновения произойдёт переход на ребро призмы Ивлева, в связи с чем образуется новая область VII. Области V и VII будут соответствовать одному и тому же ребру призмы Ивлева. В связи с этим при $\Omega = \Omega_{11}$ они соединятся. В итоге в цилиндре останутся области V, VI и IV. Остановимся более подробно на получившихся областях.

Область III. В данной области условие пластичности принимает вид

$$2\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} - \sigma_{zz} = -2. \quad (31)$$

По аналогии с пластической областью I ассоциированный закон пластического течения (7) приводит к следующей зависимости между компонентами тензора вторичных пластических деформаций:

$$s_{rr} = s_{zz}, \quad s_{\varphi\varphi} = -2s_{zz}. \quad (32)$$

Используя данные зависимости и соотношения (30), компоненты тензора полных деформаций (2) запишем в виде

$$d_{rr} = e_{rr} - e_{zz} + \hat{p}_{rr} - \hat{p}_{zz}, \quad d_{\varphi\varphi} = e_{\varphi\varphi} + 2e_{zz} + \hat{p}_{\varphi\varphi} + 2\hat{p}_{zz}.$$

Производя дальнейшие вычисления аналогично области I, в итоге получим

$$u = D_1\beta^{-\alpha} + D_2\beta^\alpha + \frac{3}{2}(1-2\nu)C_5\beta + C_6\beta^{-1} - 6\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{43-38\nu}\Omega\beta^3 - \frac{81}{8}\frac{(1-2\nu)^2}{43-38\nu}\Omega_{\max}\beta^3 - (5+2\nu)\beta + 2(1-2\nu)\beta \log \beta. \quad (33)$$

Напряжения в области III имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{3}\frac{1-\alpha^{-1}}{1-2\nu}D_1\beta^{-1-\alpha} + \frac{1}{3}\frac{1+\alpha^{-1}}{1-2\nu}D_2\beta^{-1+\alpha} + C_5 \\ &\quad - \frac{17-10\nu}{43-38\nu}\Omega\beta^2 - \frac{9}{2}\frac{1-2\nu}{43-38\nu}\Omega_{\max}\beta^2 - \frac{2}{3}\frac{7-2\nu}{1-2\nu} + \frac{4}{3}\log \beta, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{3}\frac{1-\alpha}{1-2\nu}D_1\beta^{-1-\alpha} + \frac{1}{3}\frac{1+\alpha}{1-2\nu}D_2\beta^{-1+\alpha} + C_5 \\ &\quad - 8\frac{1+\nu}{43-38\nu}\Omega\beta^2 - \frac{27}{2}\frac{1-2\nu}{43-38\nu}\Omega_{\max}\beta^2 - \frac{2}{3}\frac{5+2\nu}{1-2\nu} + \frac{4}{3}\log \beta, \quad (34) \\ \sigma_{zz} &= \frac{1}{3}\frac{1+\alpha\gamma}{1-2\nu}D_1\beta^{-1-\alpha} + \frac{1}{3}\frac{1-\alpha\gamma}{1-2\nu}D_2\beta^{-1+\alpha} + C_5 \\ &\quad + \frac{1-26\nu}{43-38\nu}\Omega\beta^2 - \frac{45}{2}\frac{1-2\nu}{43-38\nu}\Omega_{\max}\beta^2 - \frac{8\nu}{1-2\nu} + \frac{4}{3}\log \beta. \end{aligned}$$

Области IV и VI. Напряжения в данных областях соответствуют грани призмы Ивлева:

$$2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz} = 2. \quad (35)$$

По аналогии с областью III получим общее соотношение для перемещения

$$u = D_3\beta^{-\alpha^{-1}} + D_4\beta^{\alpha^{-1}} - 6\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{13+22\nu}\Omega\beta^3 + \frac{1}{2}\alpha\beta^{-\alpha^{-1}} \int \hat{p}^{IV}\beta^{1+\alpha^{-1}} d\beta - \frac{1}{2}\alpha\beta^{\alpha^{-1}} \int \hat{p}^{IV}\beta^{1-\alpha^{-1}} d\beta \quad (36)$$

и напряжений

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{3}\frac{1-\alpha^{-1}}{1-2\nu}D_3\beta^{-1-\alpha^{-1}} + \frac{1}{3}\frac{1+\alpha^{-1}}{1-2\nu}D_4\beta^{-1+\alpha^{-1}} - 8\frac{1+\nu}{13+22\nu}\Omega\beta^2 + \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\frac{\hat{p}_{rr} + \hat{p}_{\varphi\varphi} + \hat{p}_{zz}}{1-2\nu} - \frac{1}{6}\frac{1+\alpha}{1-2\nu}\beta^{-1+\alpha^{-1}} \int \hat{p}^{IV}\beta^{1-\alpha^{-1}} d\beta - \frac{1}{6}\frac{1-\alpha}{1-2\nu}\beta^{-1-\alpha^{-1}} \int \hat{p}^{IV}\beta^{1+\alpha^{-1}} d\beta,$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{1}{3}\frac{\alpha^{-2} - \alpha^{-1}}{1-2\nu}D_3\beta^{-1-\alpha^{-1}} + \frac{1}{3}\frac{\alpha^{-2} + \alpha^{-1}}{1-2\nu}D_4\beta^{-1+\alpha^{-1}} - \frac{11+2\nu}{13+22\nu}\Omega\beta^2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\frac{\hat{p}_{rr} + \alpha^{-2}\hat{p}_{\varphi\varphi} - \gamma\hat{p}_{zz}}{1-2\nu} - \frac{1}{6}\frac{1+\alpha^{-1}}{1-2\nu}\beta^{-1+\alpha^{-1}} \int \hat{p}^{IV}\beta^{1-\alpha^{-1}} d\beta - \frac{1}{6}\frac{1-\alpha^{-1}}{1-2\nu}\beta^{-1-\alpha^{-1}} \int \hat{p}^{IV}\beta^{1+\alpha^{-1}} d\beta, \quad (37)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{1}{3}\frac{\gamma - \alpha^{-1}}{1-2\nu}D_3\beta^{-1-\alpha^{-1}} + \frac{1}{3}\frac{\gamma + \alpha^{-1}}{1-2\nu}D_4\beta^{-1+\alpha^{-1}} - \frac{5+14\nu}{13+22\nu}\Omega\beta^2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\frac{\hat{p}_{rr} - \gamma\hat{p}_{\varphi\varphi} + \alpha^{-2}\hat{p}_{zz}}{1-2\nu} - \frac{1}{6}\frac{1-\alpha\gamma}{1-2\nu}\beta^{-1+\alpha^{-1}} \int \hat{p}^{IV}\beta^{1-\alpha^{-1}} d\beta - \frac{1}{6}\frac{1+\alpha\gamma}{1-2\nu}\beta^{-1-\alpha^{-1}} \int \hat{p}^{IV}\beta^{1+\alpha^{-1}} d\beta,$$

где

$$\hat{p}^{IV} = \frac{3}{2}\frac{1-2\nu}{1+\nu}(2+2\nu+\hat{p}_{\varphi\varphi}-\hat{p}_{zz}) - \hat{p}_{rr,\beta} - \hat{p}_{\varphi\varphi,\beta} - \hat{p}_{zz,\beta}.$$

Чтобы получить итоговые соотношения для области IV, необходимо подставить накопленные пластические деформации (24), а для области VI — деформации (27). Зная перемещения, напряжения и накопленные пластические деформации, из соотношений (2) и (4) получим итоговые пластические деформации для области IV:

$$p_{rr} = -2p_{\varphi\varphi} = -2p_{zz} = -10\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{13+22\nu}\Omega\beta^2 - \frac{1}{3}(1+2\alpha^{-1})D_3\beta^{-1-\alpha^{-1}} - \frac{1}{3}(1-2\alpha^{-1})D_4\beta^{-1+\alpha^{-1}} \quad (38)$$

и для области VI:

$$p_{rr} = \hat{p}_{rr} - 2p, \quad p_{\varphi\varphi} = \hat{p}_{\varphi\varphi} + p, \quad p_{zz} = \hat{p}_{zz} + p, \\ p = \frac{1}{6}(1+2\alpha^{-1})D_7\beta^{-1-\alpha^{-1}} + \frac{1}{6}(1-2\alpha^{-1})D_8\beta^{-1+\alpha^{-1}} + 5\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{13+22\nu}\Omega\beta^2. \quad (39)$$

Области V и VII. В данных областях условие пластичности примет вид

$$2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz} = 2, \quad 2\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} - \sigma_{zz} = -2. \quad (40)$$

По аналогии с областью III пластического течения получим напряжения

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= D_5 + \frac{2}{3}(1 - 2 \log \beta) - \frac{1}{2}\Omega\beta^2, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= D_5 - \frac{2}{3}(1 + 2 \log \beta) - \frac{1}{2}\Omega\beta^2, \\ \sigma_{zz} &= D_5 - \frac{4}{3} \log \beta - \frac{1}{2}\Omega\beta^2,\end{aligned}\quad (41)$$

перемещение

$$u = \frac{3}{2}(1 - 2\nu)D_5\beta + D_6\beta^{-1} - \frac{3}{8}(1 - 2\nu)\Omega\beta^3 + (1 - 2\nu)(1 - 2 \log \beta)\beta \quad (42)$$

и пластические деформации

$$\begin{aligned}p_{rr} &= \frac{1}{2}(1 - 2\nu)D_5 - D_6\beta^{-2} - \frac{5}{8}(1 - 2\nu)\Omega\beta^2 - \frac{1}{3}(5 - 4\nu + (2 - 4\nu) \log \beta), \\ p_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{2}(1 - 2\nu)D_5 + D_6\beta^{-2} + \frac{1}{8}(1 - 2\nu)\Omega\beta^2 + \frac{1}{3}(5 - 4\nu - (2 - 4\nu) \log \beta), \\ p_{zz} &= -(1 - 2\nu)D_5 + \frac{1}{2}(1 - 2\nu)\Omega\beta^2 + \frac{4}{3}(1 - 2\nu) \log \beta.\end{aligned}\quad (43)$$

Для области V будем использовать константы интегрирования D_5 и D_6 , в то время как для области VII константы обозначим как D_9 и D_{10} .

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТОВ

Для дальнейших расчётов принимались следующие значения параметров:

$$\delta = 0,2; \quad \nu = 0,3; \quad \Omega_{\max} = 25. \quad (44)$$

При данных параметрах из (16) следует, что пластическое течение начнётся на внутренней граничной поверхности $\beta = \delta$ при значении параметра нагружения $\Omega_1 \approx 3,9318$.

Таким образом, среда разделяется на области упругого и пластического деформирования. То есть для описания напряжённо-деформированного состояния будем использовать соотношения (11), (12) для упругой области и (20), (21) — для области пластичности I. Они содержат четыре неизвестных коэффициента интегрирования c_1 , c_2 , C_1 , C_2 . Для их определения воспользуемся условиями на границах деформируемой среды (10) и условиями непрерывности перемещения и радиальной компоненты тензора напряжений на упругопластической границе β_1 . Также помимо четырёх констант интегрирования неизвестным является положение упругопластической границы β_1 . Для её нахождения воспользуемся условием пластического течения (14). Итоговая система уравнений примет вид

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^I(\delta) &= 0, \quad u^{\text{el}}(1) = 0; \\ u^I &= u^{\text{el}}, \quad \sigma_{rr}^I = \sigma_{rr}^{\text{el}}, \quad 2\sigma_{\varphi\varphi}^{\text{el}} - \sigma_{rr}^{\text{el}} - \sigma_{zz}^{\text{el}} = 2 \quad \text{при} \quad \beta = \beta_1,\end{aligned}\quad (45)$$

где верхний индекс обозначает, к какой области относятся данные перемещение и напряжения.

Как уже говорилось ранее, следующей областью пластичности будет область III. Для нахождения значения параметра нагружения Ω_2 , при котором она образуется, воспользуемся условием пластичности (17):

$$2\sigma_{rr}^I - \sigma_{\varphi\varphi}^I - \sigma_{zz}^I = -2 \quad \text{при} \quad \beta = \delta. \quad (46)$$

Решая полученную систему (45), (46), найдём значения

$$\Omega_2 \approx 5,8002; \quad \beta_1 \approx 0,2614. \quad (47)$$

При дальнейшем увеличении параметра нагружения в среде присутствуют две области пластичности и одна область упругого деформирования. Соответственно неизвестными являются шесть констант интегрирования и две границы пластических областей β_1, β_3 . Для их определения составим систему:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{\text{III}}(\delta) &= 0, \quad u^{\text{el}}(1) = 0; \\ u^{\text{III}} &= u^{\text{I}}, \quad \sigma_{rr}^{\text{III}} = \sigma_{rr}^{\text{I}}, \quad 2\sigma_{rr}^{\text{I}} - \sigma_{\varphi\varphi}^{\text{I}} - \sigma_{zz}^{\text{I}} = -2 \quad \text{при} \quad \beta = \beta_3; \\ u^{\text{I}} &= u^{\text{el}}, \quad \sigma_{rr}^{\text{I}} = \sigma_{rr}^{\text{el}}, \quad 2\sigma_{\varphi\varphi}^{\text{el}} - \sigma_{rr}^{\text{el}} - \sigma_{zz}^{\text{el}} = 2 \quad \text{при} \quad \beta = \beta_1. \end{aligned} \quad (48)$$

При $\Omega = \Omega_3$ в среде появляется пластическая область II. Для определения Ω_3 к системе (48) добавим условие пластичности (15):

$$2\sigma_{rr}^{\text{el}} - \sigma_{\varphi\varphi}^{\text{el}} - \sigma_{zz}^{\text{el}} = -2 \quad \text{при} \quad \beta = 1. \quad (49)$$

Из полученной системы найдём

$$\Omega_3 \approx 6,4147; \quad \beta_3 \approx 0,2121; \quad \beta_1 \approx 0,2848. \quad (50)$$

При $\Omega > \Omega_3$ получим четыре области и соответственно восемь констант интегрирования и три границы. Соответственно система (48) переписется в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{\text{III}}(\delta) &= 0, \quad u^{\text{II}}(1) = 0; \\ u^{\text{III}} &= u^{\text{I}}, \quad \sigma_{rr}^{\text{III}} = \sigma_{rr}^{\text{I}}, \quad 2\sigma_{rr}^{\text{I}} - \sigma_{\varphi\varphi}^{\text{I}} - \sigma_{zz}^{\text{I}} = -2 \quad \text{при} \quad \beta = \beta_3; \\ u^{\text{I}} &= u^{\text{el}}, \quad \sigma_{rr}^{\text{I}} = \sigma_{rr}^{\text{el}}, \quad 2\sigma_{\varphi\varphi}^{\text{el}} - \sigma_{rr}^{\text{el}} - \sigma_{zz}^{\text{el}} = 2 \quad \text{при} \quad \beta = \beta_1; \\ u^{\text{el}} &= u^{\text{II}}, \quad \sigma_{rr}^{\text{el}} = \sigma_{rr}^{\text{II}}, \quad 2\sigma_{\varphi\varphi}^{\text{el}} - \sigma_{rr}^{\text{el}} - \sigma_{zz}^{\text{el}} = -2 \quad \text{при} \quad \beta = \beta_2. \end{aligned} \quad (51)$$

Так как при $\Omega = \Omega_4$ области I и II соединяются между собой и область упругого деформирования исчезает, а также выполняется равенство $\beta_1 = \beta_2$, значения коэффициентов интегрирования, найденные из системы (51), становятся недействительными в связи с делением на нуль. Соответственно для нахождения значения Ω_4 составим вспомогательную систему уравнений

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{\text{III}}(\delta) &= 0, \quad u^{\text{II}}(1) = 0; \\ u^{\text{III}} &= u^{\text{I}}, \quad \sigma_{rr}^{\text{III}} = \sigma_{rr}^{\text{I}}, \quad 2\sigma_{rr}^{\text{I}} - \sigma_{\varphi\varphi}^{\text{I}} - \sigma_{zz}^{\text{I}} = -2 \quad \text{при} \quad \beta = \beta_3; \\ u^{\text{I}} &= u^{\text{II}}, \quad \sigma_{rr}^{\text{I}} = \sigma_{rr}^{\text{II}}, \quad \sigma_{rr}^{\text{I}} + \sigma_{\varphi\varphi}^{\text{I}} = 2\sigma_{zz}^{\text{I}} \quad \text{при} \quad \beta = \beta_1 = \beta_2. \end{aligned} \quad (52)$$

В связи с тем что на граничной поверхности $\beta = \beta_1 = \beta_2$ в момент исчезновения области упругого деформирования ещё не успели накопиться пластические деформации, в качестве дополнительного условия для нахождения значения Ω_4 используем условие $p_{rr}^{\text{I}}(\beta_1) = 0$. Из составленной системы получим

$$\Omega_4 \approx 10,8678; \quad \beta_3 \approx 0,3927; \quad \beta_1 = \beta_2 \approx 0,6746. \quad (53)$$

При $\Omega > \Omega_4$ место упругой области займёт область IV. Соответственно третья и четвёртая строчки в системе (51) переписутся в виде

$$\begin{aligned} u^{\text{I}} &= u^{\text{IV}}, \quad \sigma_{rr}^{\text{I}} = \sigma_{rr}^{\text{IV}}, \quad 2\sigma_{rr}^{\text{I}} - \sigma_{\varphi\varphi}^{\text{I}} - \sigma_{zz}^{\text{I}} = -2 \quad \text{при} \quad \beta = \beta_1; \\ u^{\text{IV}} &= u^{\text{II}}, \quad \sigma_{rr}^{\text{IV}} = \sigma_{rr}^{\text{II}}, \quad 2\sigma_{\varphi\varphi}^{\text{II}} - \sigma_{rr}^{\text{II}} - \sigma_{zz}^{\text{II}} = 2 \quad \text{при} \quad \beta = \beta_2. \end{aligned} \quad (54)$$

С увеличением нагрузки размер области I будет постепенно уменьшаться и при нагрузке $\Omega = \Omega_5$ область I исчезнет и области III и IV соединятся между собой. Так как напряжения в этих областях принадлежат одному ребру призмы Ивлева, то в итоге эти области сольются в одну. Получившуюся в итоге область обозначим областью III. Система уравнений (51), (54) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{\text{III}}(\delta) = 0, \quad u^{\text{II}}(1) = 0; \\ u^{\text{III}} = u^{\text{II}}, \quad \sigma_{rr}^{\text{III}} = \sigma_{rr}^{\text{II}}, \quad 2\sigma_{\varphi\varphi}^{\text{II}} - \sigma_{rr}^{\text{II}} - \sigma_{zz}^{\text{II}} = 2 \quad \text{при} \quad \beta = \beta_2. \end{aligned} \quad (55)$$

Для нахождения значения Ω_5 также воспользуемся условием на значение пластических деформаций. Для этого воспользуемся соотношениями (18) между значением компонент тензора пластических деформаций, справедливых для области I, которые сведутся к уравнению

$$24C_6 - 36(1 - 2\nu)C_5\beta_1^2 + 27(1 - 2\nu)\Omega\beta_1^4 - 8(5 - 4\nu + 6(1 - 2\nu)\log\beta_1)\beta_1^2 = 0.$$

Из данного уравнения и системы уравнений (55) найдём значения

$$\Omega_5 \approx 11,5756; \quad \beta_1 = \beta_3 \approx 0,5361; \quad \beta_2 \approx 0,7217. \quad (56)$$

С дальнейшим увеличением параметра нагрузки Ω граничная поверхность $\beta = \beta_2$ будет стремиться к внешней граничной поверхности $\beta = 1$, но не достигнет её. При $\Omega = \Omega_{\max}$ из системы уравнений (55) получим

$$\Omega_{\max} = 25; \quad \beta_2 \approx 0,9231. \quad (57)$$

На рис. 2 представлены распределения компонент тензора напряжений в деформируемой среде при указанных ранее значениях параметра нагружения Ω .

Следует отметить, что при достижении максимальной скорости вращения компоненты тензора напряжений принимают значения, десятикратно превосходящие по модулю значение предела текучести. Иными словами, гидростатическое давление в данный момент принимает очень большие значения. Изучение влияния такого давления на процесс протекания пластического течения представляет отдельный интерес. Однако использованная в данной работе модель пластического течения (6) данное влияние не учитывает. Также неизменными полагаются упругие модули материала.

По достижению максимального значения параметр нагружения начинает монотонно уменьшаться. Это приводит к упругому деформированию. В связи с двумя ранее присутствующими областями пластического течения среда также разобьётся на две области упругого деформирования. Соответственно получим четыре неизвестные константы интегрирования. Для их нахождения составим систему

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{\text{I}}(\delta) = 0, \quad u^{\text{II}}(1) = 0; \\ u^{\text{I}} = u^{\text{II}}, \quad \sigma_{rr}^{\text{I}} = \sigma_{rr}^{\text{II}} \quad \text{при} \quad \beta = \beta_2. \end{aligned} \quad (58)$$

При дальнейшем уменьшении значения параметра нагружения может зародиться область пластического течения как на внутренней граничной поверхности с условием (31), так и на внешней с условием (35). Из данных соотношений получим следующие значения параметра нагружения, при которых начнётся пластическое течение:

$$\begin{aligned} \Omega_6^i = \Omega_{\max} - 16 \frac{1 - \nu}{(2 - \nu)(1 - 2\nu)} \frac{1 - 2\nu + \delta^2}{(1 - \delta^2)^2} = \Omega_{\max} - 2\Omega_1^i, \\ \Omega_6^o = \Omega_{\max} - 8 \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu} \frac{1 - 2\nu + \delta^2}{(1 - \delta^2)(1 - 2\nu + (3 - 2\nu)\delta^2)} = \Omega_{\max} - 2\Omega_1^o. \end{aligned} \quad (59)$$

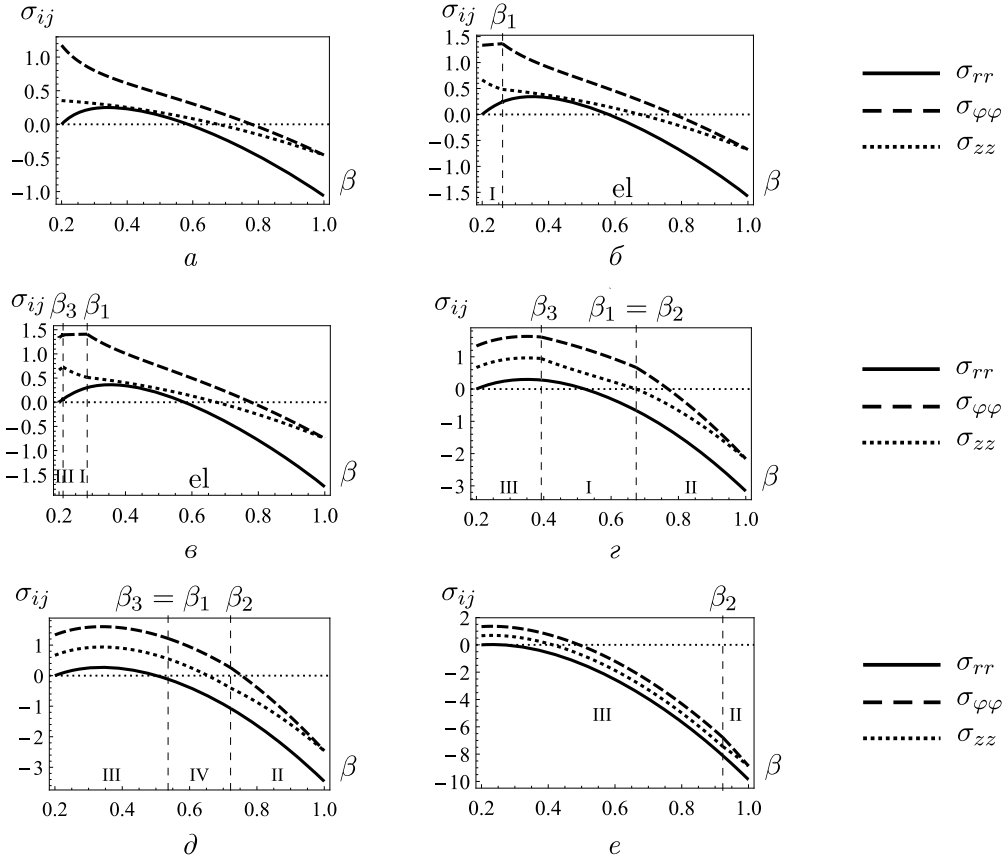


Рис. 2. Распределение напряжений в среде при различных значениях параметра нагружения Ω : а) Ω_1 ; б) Ω_2 ; в) Ω_3 ; г) Ω_4 ; д) Ω_5 ; е) Ω_{\max}

Сравнив полученные формулы (59) с (16) формулами, можно заметить, что соотношения, ранее найденные при решении данной задачи в рамках пластического течения с потенциалом Треска — Сен-Венана [8], также выполняются и при использовании условия Ишлинского — Ивлева.

Как было ранее сказано, первым выполнится условие на внутренней граничной поверхности. Параметр нагружения примет значение $\Omega_6 \approx 17,1364$. При уменьшении значения параметра нагружения в среде будет присутствовать уже три области. Соответственно получится шесть параметров интегрирования $d_1, d_2, d_3, d_4, D_1, D_2$ и одна упругопластическая граница β_3 . Для их определения систему (58) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{\text{III}}(\delta) = 0, \quad u^{\text{II}}(1) = 0; \\ u^{\text{III}} = u^{\text{I}}, \quad \sigma_{rr}^{\text{III}} = \sigma_{rr}^{\text{I}}, \quad 2\sigma_{\varphi\varphi}^{\text{I}} - \sigma_{rr}^{\text{I}} - \sigma_{zz}^{\text{I}} = -2 \quad \text{при } \beta = \beta_4; \\ u^{\text{I}} = u^{\text{II}}, \quad \sigma_{rr}^{\text{I}} = \sigma_{rr}^{\text{II}} \quad \text{при } \beta = \beta_2. \end{aligned} \quad (60)$$

При дальнейшем уменьшении значения параметра нагружения вплоть до значения $\Omega = \Omega_7$ на внутренней граничной поверхности происходит выход на ребро призмы Ивлева. Для нахождения значения Ω_7 к системе уравнений (60) добавим условие (40):

$$2\sigma_{rr}^{\text{III}} - \sigma_{\varphi\varphi}^{\text{III}} - \sigma_{zz}^{\text{III}} = 2 \quad \text{при } \beta = \delta.$$

Решив полученную систему уравнений, найдём

$$\Omega_7 \approx 13,3995; \quad \beta_4 \approx 0,2614. \quad (61)$$

При уменьшении значения параметра нагружения в среде присутствуют четыре области деформирования. Для описания текущего состояния среды в системе (60) заменим одно граничное условие и добавим дополнительные уравнения на новой граничной поверхности:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^V(\delta) &= 0; \\ u^V &= u^{\text{III}}, \quad \sigma_{rr}^V = \sigma_{rr}^{\text{III}}, \quad 2\sigma_{rr}^{\text{III}} - \sigma_{\varphi\varphi}^{\text{III}} - \sigma_{zz}^{\text{III}} = 2 \quad \text{при} \quad \beta = \beta_6. \end{aligned} \quad (62)$$

Следующей зарождается область IV повторного пластического течения. Для нахождения значения параметра нагружения Ω_8 , при котором она образуется, к системе (60), (62) добавим дополнительное условие (35):

$$2\sigma_{rr}^{\text{II}} - \sigma_{\varphi\varphi}^{\text{II}} - \sigma_{zz}^{\text{II}} = 2 \quad \text{при} \quad \beta = 1.$$

Решив получившуюся систему уравнений, найдём

$$\Omega_8 \approx 12,1705; \quad \beta_4 \approx 0,2848; \quad \beta_6 \approx 0,2121. \quad (63)$$

Система уравнений, описывающая следующий этап деформирования, запишется в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^V(\delta) &= 0, \quad u^{\text{IV}}(1) = 0; \\ u^V &= u^{\text{III}}, \quad \sigma_{rr}^V = \sigma_{rr}^{\text{III}}, \quad 2\sigma_{rr}^{\text{III}} - \sigma_{\varphi\varphi}^{\text{III}} - \sigma_{zz}^{\text{III}} = 2 \quad \text{при} \quad \beta = \beta_6; \\ u^{\text{III}} &= u^{\text{I}}, \quad \sigma_{rr}^{\text{III}} = \sigma_{rr}^{\text{I}}, \quad 2\sigma_{\varphi\varphi}^{\text{I}} - \sigma_{rr}^{\text{I}} - \sigma_{zz}^{\text{I}} = -2 \quad \text{при} \quad \beta = \beta_4; \\ u^{\text{I}} &= u^{\text{II}}, \quad \sigma_{rr}^{\text{I}} = \sigma_{rr}^{\text{II}} \quad \text{при} \quad \beta = \beta_2; \\ u^{\text{II}} &= u^{\text{IV}}, \quad \sigma_{rr}^{\text{II}} = \sigma_{rr}^{\text{IV}}, \quad 2\sigma_{rr}^{\text{II}} - \sigma_{\varphi\varphi}^{\text{II}} - \sigma_{zz}^{\text{II}} = 2 \quad \text{при} \quad \beta = \beta_5. \end{aligned} \quad (64)$$

Так как область IV увеличивается с уменьшением параметра нагружения, то при $\Omega = \Omega_9$ граничная поверхность данной области β_5 достигнет граничной поверхности $\beta = \beta_2$ и область упругого деформирования II исчезнет из рассмотрения. Для нахождения данного значения параметра нагружения перепишем последние две строчки системы (64):

$$u^{\text{I}} = u^{\text{IV}}, \quad \sigma_{rr}^{\text{I}} = \sigma_{rr}^{\text{IV}}, \quad 2\sigma_{rr}^{\text{I}} - \sigma_{\varphi\varphi}^{\text{I}} - \sigma_{zz}^{\text{I}} = 2 \quad \text{при} \quad \beta = \beta_2 = \beta_5.$$

Решая систему (64), с учётом внесённых изменений получим

$$\Omega_9 \approx 9,9157; \quad \beta_4 \approx 0,3368; \quad \beta_6 \approx 0,2386; \quad \beta_5 = \beta_2 \approx 0,9231. \quad (65)$$

После преодоления граничной поверхностью $\beta = \beta_5$ значения β_2 в деформируемой среде больше не будет области II и появится новая область VI, являющаяся продолжением области IV. Для описания данного состояния деформируемой среды последние две строчки системы (64) примут вид

$$\begin{aligned} u^{\text{I}} &= u^{\text{VI}}, \quad \sigma_{rr}^{\text{I}} = \sigma_{rr}^{\text{VI}}, \quad 2\sigma_{rr}^{\text{I}} - \sigma_{\varphi\varphi}^{\text{I}} - \sigma_{zz}^{\text{I}} = 2 \quad \text{при} \quad \beta = \beta_5; \\ u^{\text{VI}} &= u^{\text{IV}}, \quad \sigma_{rr}^{\text{VI}} = \sigma_{rr}^{\text{IV}} \quad \text{при} \quad \beta = \beta_2. \end{aligned} \quad (66)$$

При достижении параметром нагружения значения Ω_{10} из среды исчезнет упругая область I, так как граничные поверхности $\beta = \beta_4$ и $\beta = \beta_6$ сравняются между собой. Система уравнений, описывающая данное состояние среды, может быть получена из системы (64), (66) путём объединения третьей и четвёртой строчек:

$$u^{\text{III}} = u^{\text{VI}}, \quad \sigma_{rr}^{\text{III}} = \sigma_{rr}^{\text{VI}}, \quad 2\sigma_{\varphi\varphi}^{\text{VI}} - \sigma_{rr}^{\text{VI}} - \sigma_{zz}^{\text{VI}} = -2 \quad \text{при} \quad \beta = \beta_4 = \beta_5.$$

Так как в области упругого деформирования I не было накоплено вторичных пластических деформаций, то в качестве дополнительного условия к полученной системе можно ввести равенство пластических деформаций на границе: $p_{rr}^{\text{III}} = p_{rr}^{\text{VI}}$. В итоге получим

$$\Omega_{10} \approx 3,2645; \quad \beta_4 = \beta_5 \approx 0,6746; \quad \beta_6 \approx 0,3927. \quad (67)$$

Так как области III и VI принадлежат разным граням призмы Ивлева, то на месте контакта данных областей напряжения выйдут на ребро призмы Ивлева и с уменьшением значения параметра нагружения зародится новая область повторного пластического течения VII. Система уравнений запишется в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{\text{V}}(\delta) &= 0, \quad u^{\text{IV}}(1) = 0; \\ u^{\text{V}} &= u^{\text{III}}, \quad \sigma_{rr}^{\text{V}} = \sigma_{rr}^{\text{III}}, \quad 2\sigma_{rr}^{\text{III}} - \sigma_{\varphi\varphi}^{\text{III}} - \sigma_{zz}^{\text{III}} = 2 \quad \text{при } \beta = \beta_6; \\ u^{\text{III}} &= u^{\text{VII}}, \quad \sigma_{rr}^{\text{III}} = \sigma_{rr}^{\text{VII}}, \quad 2\sigma_{rr}^{\text{III}} - \sigma_{\varphi\varphi}^{\text{III}} - \sigma_{zz}^{\text{III}} = 2 \quad \text{при } \beta = \beta_4; \\ u^{\text{VII}} &= u^{\text{VI}}, \quad \sigma_{rr}^{\text{VII}} = \sigma_{rr}^{\text{VI}}, \quad 2\sigma_{rr}^{\text{VI}} - \sigma_{\varphi\varphi}^{\text{VI}} - \sigma_{zz}^{\text{VI}} = -2 \quad \text{при } \beta = \beta_5; \\ u^{\text{VI}} &= u^{\text{IV}}, \quad \sigma_{rr}^{\text{VI}} = \sigma_{rr}^{\text{IV}} \quad \text{при } \beta = \beta_2. \end{aligned} \quad (68)$$

Так как области V и VII соответствуют одному и тому же ребру призмы Ивлева, то при $\Omega = \Omega_{11}$ они соединятся между собой. Получившуюся на их месте область обозначим как область V. Соответственно система уравнений запишется в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{\text{V}}(\delta) &= 0, \quad u^{\text{IV}}(1) = 0; \\ u^{\text{V}} &= u^{\text{VI}}, \quad \sigma_{rr}^{\text{V}} = \sigma_{rr}^{\text{VI}}, \quad 2\sigma_{rr}^{\text{VI}} - \sigma_{\varphi\varphi}^{\text{VI}} - \sigma_{zz}^{\text{VI}} = -2 \quad \text{при } \beta = \beta_5; \\ u^{\text{VI}} &= u^{\text{IV}}, \quad \sigma_{rr}^{\text{VI}} = \sigma_{rr}^{\text{IV}} \quad \text{при } \beta = \beta_2. \end{aligned} \quad (69)$$

Для нахождения значения Ω_{11} наложим условие на пластические деформации. Исходя из соотношений, справедливых для вторичных пластических деформаций в исчезнувшей области (32), получим, что на месте соединения областей V и VII в момент их объединения должно выполняться соотношение

$$p_{rr}^{\text{V}} - p_{zz}^{\text{V}} = \hat{p}_{rr}^{\text{III}} - \hat{p}_{zz}^{\text{III}}.$$

Подставив значения пластических деформаций (27), (43), получим уравнение

$$\begin{aligned} 24(D_6 - C_6) - 36(1 - 2\nu)(D_5 - C_5)\beta^2 \\ - 27(1 - 2\nu)(\Omega_{\text{max}} - \Omega)\beta^4 + 16(5 - 4\nu + 6(1 - 2\nu)\log\beta)\beta^2 = 0. \end{aligned}$$

Решив данное уравнение (учтя что корень данного уравнения должен быть единственным и положительным), совместно с системой (69) получим

$$\Omega_{11} \approx 1,8487; \quad \beta_4 = \beta_6 \approx 0,5361; \quad \beta_5 \approx 0,7217. \quad (70)$$

При $\Omega = 0$ решение системы (69) примет вид

$$\Omega_{12} = 0; \quad \beta_5 \approx 0,7685. \quad (71)$$

На рис. 3 представлены распределения напряжений в среде на стадии разгрузки при приведённых ранее значениях параметра нагружения. Остаточные напряжения, пластические деформации и движения границ областей представлены на рис. 4. Как видно из рис. 4, в пластические деформации в цилиндре могут достигать значительных величин. Переходя от безразмерных деформаций (1) к реальным, получим, что при максимальной скорости вращения деформации в цилиндре могут составлять несколько процентов, что выходит за границы

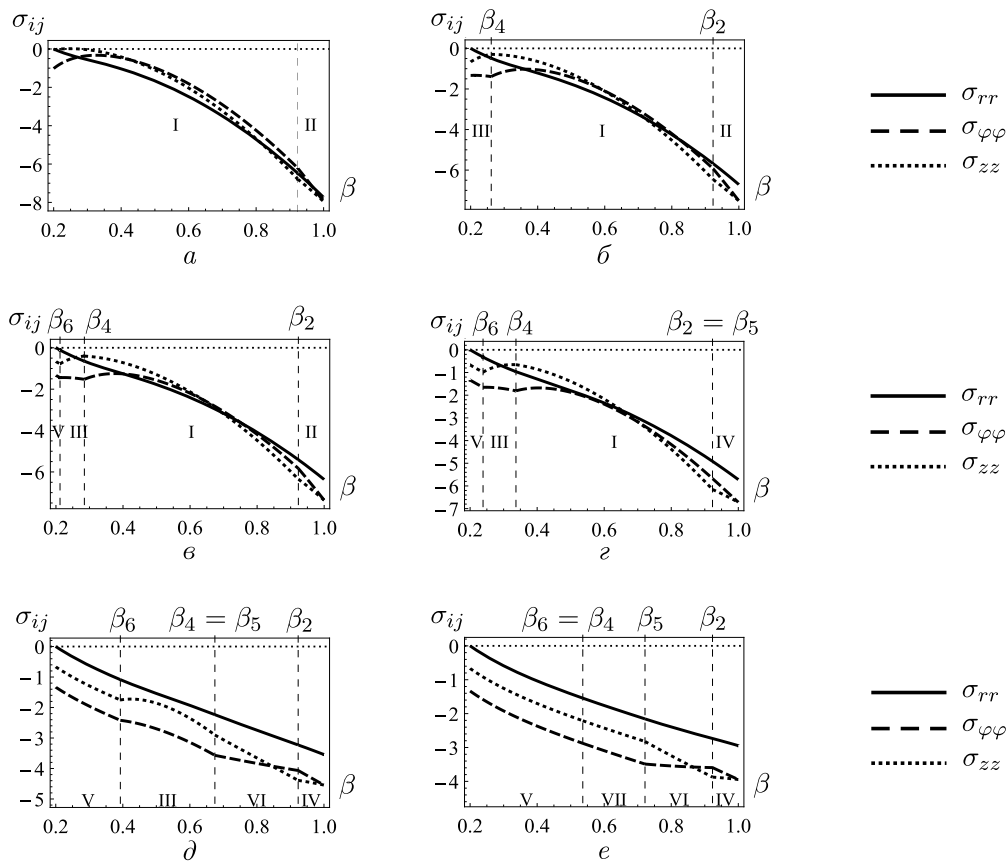


Рис. 3. Распределение напряжений в среде при различных значениях параметра нагружения Ω : а) Ω_6 ; б) Ω_7 ; в) Ω_8 ; г) Ω_9 ; д) Ω_{10} ; е) Ω_{11}

применимости теории малых деформаций. Отсюда можно сделать вывод, что результаты расчётов, полученные для высоких скоростей вращения, содержат определённую погрешность. Получение более реалистичного решения рассматриваемой задачи возможно только в рамках теории конечных деформаций.

Стоит отметить, что хоть и не удалось получить аналитические выражения для определения всех значений параметра нагружения, при которых происходят образования или исчезновение областей в среде, но исходя из тех, которые удалось получить, и численных значений оставшихся, при использовании потенциала Ишлинского — Ивлева выполняется та же закономерность, что и для потенциала Греска — Сен-Венана [8], а именно,

$$\Omega_i^r = \Omega_{\max} - 2\Omega_i^l, \tag{72}$$

где Ω_i^l — значения параметра нагружения на стадии нагрузки: $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4, \Omega_5$, а Ω_i^r — соответствующие значения на стадии разгрузки: $\Omega_6, \Omega_7, \Omega_8, \Omega_{10}, \Omega_{11}$.

Это позволяет прогнозировать, какие области повторного пластического течения образуются в среде в процессе снятия нагрузки, предварительно определив максимальное значение параметра нагружения Ω_{\max} и рассчитав значения параметра нагружения, при котором появляются области первичного пластического течения Ω_i^l .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача вращения полого цилиндра с жёстким внешним покрытием в рамках теории малых деформаций. Получены соотношения, позволяющие определить распределение

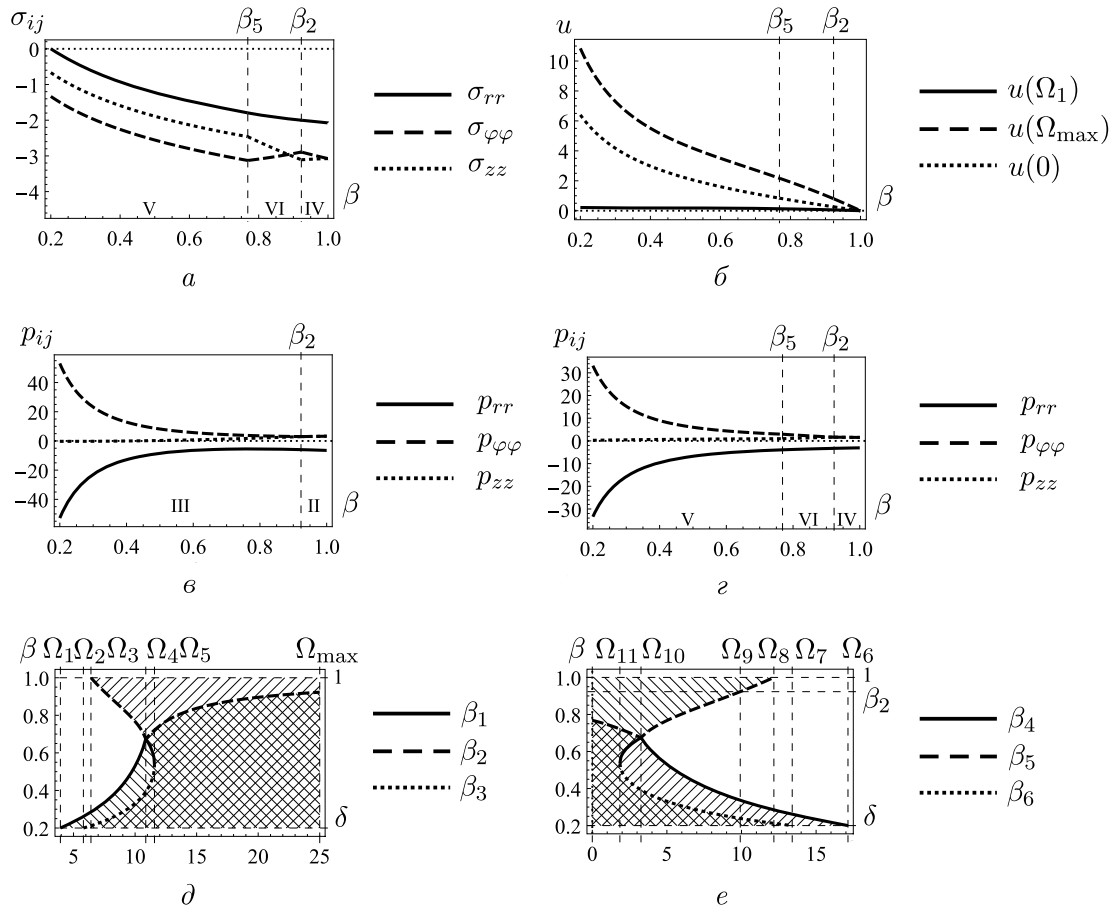


Рис. 4. Графики:

остаточных напряжений (а); перемещений при различных значениях Ω (б); максимальных пластических деформаций (в); остаточных пластических деформаций (г); развития областей пластического течения на стадии нагрузки (д); развития областей пластического течения на стадии разгрузки (е)

перемещений, деформаций и напряжений в цилиндре как при росте угловой скорости $\omega(t)$, так и при её уменьшении. Найдены аналитические соотношения для нахождения значения угловой скорости, при которой в полем цилиндре начинается пластическое течение (16), а также повторное пластическое течение (59). Последнее соотношение позволяет найти такую максимально допустимую скорость вращения, при которой после остановки не будет наблюдаться повторного пластического течения. Согласно данному соотношению (59) максимальная скорость вращения ω_{\max} для таких целей должна быть такова, чтобы максимальное значение параметра нагружения Ω_{\max} не превышало двухкратного значения параметра нагружения, при котором впервые появляется пластическое течение Ω_1 . Учитывая введённое обезразмеривание (1), для угловых скоростей получим: $\omega_{\max}^2 < 2\omega_1^2$.

Если в качестве пластического потенциала использовать условие Треска — Сен-Венана [8], то для текущих параметров полого цилиндра получим следующие значения параметра нагружения:

- образование области пластического течения на поверхности полости: $\Omega_1^t \approx 3,342014$;
- образование области пластического течения на боковой поверхности: $\Omega_2^t \approx 6,336568$;
- распространение пластического течения по всему полему цилиндру: $\Omega_3^t \approx 8,513944$;
- максимальная скорость вращения: $\Omega_{\max} = 25$;
- образование области повторного пластического течения на поверхности полости при

уменьшении скорости вращения: $\Omega_4^t \approx 18,315972$;

— образование области повторного пластического течения на боковой поверхности: $\Omega_5^t \approx 12,326864$;

— распространение повторного пластического течения по всему полуму цилиндру: $\Omega_6^t \approx 7,972112$;

В нашем случае соответствующие значения параметра нагружения будут равны:

$$\begin{aligned} \Omega_1^i &\approx 3,931781; & \Omega_2^i &\approx 6,414733; & \Omega_3^i &\approx 10,867762; & \Omega_{\max} &= 25; \\ \Omega_4^i &\approx 17,136438; & \Omega_5^i &\approx 12,1705; & \Omega_6^i &\approx 3,2645. \end{aligned}$$

Как можно видеть из представленных значений, при использовании условия максимальных приведённых напряжений пластическое течение появляется в среде немного позже как на стадии нагрузки, так и на стадии разгрузки. Особо сильно заметна разница в значениях параметра нагружения, при котором пластическое течение распространится по всему полуму цилиндру.

Ещё одним отличием между двумя подходами является сложность проведения самих расчётов. Несмотря на то, что при использовании условия максимальных приведённых напряжений формулы получились более громоздкими и с ними сложнее работать, а также эволюция напряжений (переход напряжений между гранями и рёбрами призмы Ивлева) стала более сложной, нельзя не отметить тот факт, что вывод соотношений для нахождения перемещений и напряжений для каждой отдельно взятой области пластического течения оказался достаточно однотипным и простым. (В отличие от условия Треска — Сен-Венана, где для различных граней призмы Треска приходилось использовать различные подходы для нахождения данных соотношений, что хорошо видно, к примеру, в работах [5, 8, 10].)

Работа основана на предположениях о пластической несжимаемости материала и независимости условия текучести от гидростатической компоненты тензора напряжения. Эти предположения являются постулатами классической теории пластичности. Однако недавние эксперименты показывают, что для многих конструкционных материалов условие пластичности существенно зависит от гидростатического напряжения, при этом пластическая несжимаемость материала остаётся справедливой [34, 35]. Как видно на рис. 2, в процессе деформирования гидростатическое напряжение может достигать значительных величин, поэтому для дальнейшего исследования представляет интерес решение аналогичной задачи с использованием условий пластичности, зависящих от гидростатического напряжения, и сравнение с результатами, полученными в настоящей работе и в работе [8]. Среди подобных условий можно отметить условия Мора — Кулона, Друкера — Прагера, а также обобщённое кусочно-линейное условие пластичности [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Zare H.R., Darijani H. A novel autofrettage method for strengthening and design of thick-walled cylinders // *Materials & Design*. 2016. V. 105. P. 366–374; DOI: 10.1016/j.matdes.2016.05.062
2. Zare H.R., Darijani H. Strengthening and design of the linear hardening thick-walled cylinders using the new method of rotational autofrettage // *Int. J. Mech. Sci.* 2017. V. 124/125. P. 1–8; DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2017.02.015
3. Kamal S.M., Dixit U.S., Roy A., Liu Q., Silberschmidt V.V. Comparison of plane-stress, generalized-plane-strain and 3D FEM elastic–plastic analyses of thick-walled cylinders subjected to radial thermal gradient // *Int. J. Mech. Sci.* 2017. V. 131/132. P. 744–752; DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2017.07.034
4. Gamer U., Sayir M. Elastic-plastic stress distribution in a rotating solid shaft // *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*. 1984. V. 35, N 5. P. 601–617; DOI: 10.1007/BF00952107
5. Gamer U., Mack W., Varga I. Rotating elastic-plastic solid shaft with fixed ends // *International J. Engng. Sci.* 1997. V. 35, N 3. P. 253–267; DOI: 10.1016/S0020-7225(96)00085-7

6. *Lindner T., Mack W.* Residual stresses in an elastic-plastic solid shaft with fixed ends after previous rotation // *J. Appl. Math. Mech.* 1998. V. 78, N 2. P. 75–86; DOI: 10.1002/(SICI)1521-4001(199802)78:2<75::AID-ZAMM75>3.0.CO;2-V
7. *Gamer U., Lance R.H.* Stress distribution in a rotating elastic-plastic tube // *Acta Mechanica.* 1983. V. 50, N 1/2. P. 1–8; DOI: 10.1007/BF01170437
8. *Prokudin A. N., Firsov S. V.* Elastoplastic deformation of a rotating hollow cylinder with a rigid casing // *PNRPU Mech. Bull.* 2019. N 4. P. 120–135; DOI: 10.15593/perm.mech/2019.4.12
9. *Прокудин А.Н., Фирсов С.В.* Упругопластическое деформирование вращающегося полого цилиндра с жёстким покрытием на внутренней и внешней стенках // *Вестн. Инженерной школы Дальневосточного Федерального ун-та.* 2019. Т. 41, № 4. С. 12–28; DOI: 10.24866/2227-6858/2019-4-2
10. *Prokudin A.N.* Exact elastoplastic analysis of a rotating cylinder with a rigid inclusion under mechanical loading and unloading // *J. Appl. Math. Mech.* 2020. V. 100, N 3. P. e201900213; DOI: 10.1002/zamm.201900213
11. *Mack W.* Rotating elastic-plastic tube with free ends // *Int. J. Solids and Structures.* 1991. V. 27, N 11. P. 1461–1476; DOI: 10.1016/0020-7683(91)90042-E
12. *Mack W.* The rotating elastic-plastic solid shaft with free ends // *Technische Mechanik.* 1991. N 12. P. 119–124.
13. *Rees D.W.A.* Elastic-plastic stresses in rotating discs by von Mises and Tresca // *J. Appl. Math. Mech.* 1999. V. 79, N 4. P. 281–288; DOI: 10.1002/(SICI)1521-4001(199904)79:4<281::AID-ZAMM281>3.0.CO;2-V
14. *Eraslan A.N.* Von Mises' yield criterion and nonlinearly hardening variable thickness rotating annular disks with rigid inclusion // *Mech. Res. Comm.* 2002. V. 29, N 5. P. 339–350; DOI: 10.1016/S0093-6413(02)00282-3
15. *Eraslan A.N.* Stress distributions in elastic-plastic rotating disks with elliptical thickness profiles using Tresca and von Mises criteria // *J. Appl. Math. Mech.* 2005. V. 85, N 4. P. 252–266; DOI: 10.1002/zamm.200210177
16. *Eraslan A.N.* Von Mises' yield criterion and nonlinearly hardening rotating shafts // *Acta Mech.* 2004. V. 168, N 3/4. P. 129–144; DOI: 10.1007/s00707-004-0088-z
17. *Eraslan A.N., Mack W.* A computational procedure for estimating residual stresses and secondary plastic flow limits in nonlinearly strain hardening rotating shafts // *Forschung im Ingenieurwesen.* 2005. V. 69, N 2. P. 65–75; DOI: 10.1007/s10010-004-0138-7
18. *Aleksandrova N.* Application of Mises yield criterion to rotating solid disk problem // *Int. J. Engrg. Sci.* 2012. V. 51. P. 333–337; DOI: 10.1016/j.ijengsci.2011.10.006
19. *Aleksandrova N.* Exact deformation analysis of a solid rotating elastic-perfectly plastic disk // *Int. J. Mech. Sci.* 2014. V. 88. P. 55–60; DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2014.07.003
20. *Alexandrova N.N., Alexandrov S., Vila R.P.M.M.* Analysis of stress and strain in a rotating disk mounted on a rigid shaft // *Theor. Appl. Mech.* 2006. V. 33, N 1. P. 65–90; DOI: 10.2298/TAM0601065A
21. *Alexandrova N., Alexandrov S., Real P.M.M.V.* Displacement field and strain distribution in a rotating annular disk // *Mechanics Based Design of Structures and Machines.* 2004. V. 32, N 4. P. 441–457; DOI: 10.1081/SME-200034151
22. *Lomakin E., Alexandrov S., Jeng Y.-R.* Stress and strain fields in rotating elastic/plastic annular discs // *Archive Appl. Mechanics.* 2016. V. 86, N 1/2. P. 235–244; DOI: 10.1007/s00419-015-1101-9
23. *Schmidt R.* Über den Zusammenhang von Spannungen und Formänderungen im Verfestigungsgebiet // *Ingenieur-Archiv.* 1932. V. 3, N 3. P. 215–235; DOI: 10.1007/BF02079970
24. *Ишлинский А.Ю.* Гипотеза прочности формоизменения // *Ученые зап. МГУ.* 1940. № 46. С. 104–114.
25. *Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д.* Математическая теория пластичности. М: Физматлит, 2003.
26. *Cai Q., Pang M., Zhang Y.-Q., Liu X.* Elastic-plastic stress distribution of rotating annular disc based on twin-shear stress yield criterion // *J. Zhejiang Univ. (Engrg. Sci.).* 2008. V. 42, N 9. P. 1540–1544; DOI: 10.3785/j.issn.1008-973X.2008.09.013

27. *Prokudin A.N.* Elastic-plastic analysis of rotating solid shaft by maximum reduced stress yield criterion // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Un-ta, Ser. Fiziko-Matematicheskie Nauki.* 2020. V. 24, N 1. P. 74–94; DOI: 10.14498/VSGTU1737
28. *Prokudin A.* Schmidt–Ishlinskii yield criterion and a rotating cylinder with a rigid inclusion // *J. Appl. Comput. Mech.* 2021. V. 7, N 2. P. 858–869; DOI: 10.22055/jacm.2020.35648.2704
29. *Ivlev D. D.* On the development of a theory of ideal plasticity // *J. Appl. Math. Mech.* 1958. V. 22, N 6. P. 1221–1230; DOI: 10.1016/0021-8928(58)90050-9
30. *Naghdi P. M.* Stress-strain relations in plasticity and thermoplasticity // *Proc. 2 Symp. Naval Structural Mechanics (Providence, RI 1959).* Pergamon Press, 1960. P. 121–169.
31. *Yu M.-H.* Unified Strength Theory and Its Applications. Singapore: Springer-Verl., 2018; DOI: 10.1007/978-981-10-6247-6
32. *Kolupaev V.A., Yu M.-H., Altenbach H.* Fitting of the strength hypotheses // *Acta Mechanica.* 2016. V. 227, N 6. P. 1533–1556; DOI: 10.1007/s00707-016-1566-9
33. *Koiter W.T.* Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic materials with a singular yield surface // *Quarterly Appl. Math.* 1953. V. 11, N 3. P. 350–354.
34. *Wilson C.D.* A critical reexamination of classical metal plasticity // *J. Appl. Mechanics, Transactions.* 2002. V. 69, N 1. P. 63–68; DOI: 10.1115/1.1412239
35. *Smith J., Liu W.K., Cao J.* A general anisotropic yield criterion for pressure-dependent materials // *Int. J. Plasticity.* 2015. V. 75. P. 2–21; DOI: 10.1016/j.ijplas.2015.08.009

UDC 539.374

**ELASTOPLASTIC DEFORMATIONS OF A ROTATING HOLLOW
CYLINDER WITH A RIGID CASING UNDER MAXIMUM REDUCED
STRESS YIELD CRITERION**

© 2022 A. N. Prokudin^a, S. V. Firsov^b

*Institute of Machinery & Metallurgy, FEB RAS,
ul. Metallurgov, 1, Komsomolsk-na-Amure 681005, Russia*

E-mails: ^asunbeam_85@mail.ru, ^bfirsov.s.new@yandex.ru

Received 24.05.2021, revised 23.11.2021, accepted 13.01.2022

Abstract. Deformation of a hollow cylinder with fixed ends and rigid casing due to centrifugal forces arising from its rotation around the central axis is investigated. This problem is solved in the frame of the classical theory of small strain. Stresses are associated with elastic strains by Hooke's law. The maximum reduced stress yield criterion in conjunction with its associated flow rule is used to describe plastic behavior. Both loading (with increasing angular velocity) and unloading (with decreasing angular velocity) stages are studied. The closed-form solutions for all stages of deformation including secondary plastic flow are obtained. The results are illustrated by the distributions of the stresses and plastic strains in a cylinder at different values of the angular velocity. Dependence between the angular velocities at loading and unloading stages at which plastic flows appear is discovered.

Keywords: elastoplasticity, rotating cylinder, hollow cylinder with rigid casing, secondary plastic flow, maximum reduced stress yield criterion.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.205

REFERENCES

1. Zare H.R., Darijani H. A novel autofrettage method for strengthening and design of thick-walled cylinders. *Materials & Design*, 2016, Vol. 105, pp. 366–374; DOI: 10.1016/j.matdes.2016.05.062
2. Zare H.R., Darijani H. Strengthening and design of the linear hardening thick-walled cylinders using the new method of rotational autofrettage. *Int. J. Mech. Sci.*, 2017, Vol. 124/125, pp. 1–8; DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2017.02.015
3. Kamal S.M., Dixit U. S., Roy A., Liu Q., Silberschmidt V.V. Comparison of plane-stress, generalized-plane-strain and 3D FEM elastic–plastic analyses of thick-walled cylinders subjected to radial thermal gradient. *Int. J. Mech. Sci.*, 2017, Vol. 131/132, pp. 744–752; DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2017.07.034
4. Gamer U., Sayir M. Elastic-plastic stress distribution in a rotating solid shaft. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 1984, Vol. 35, No. 5 pp. 601–617; DOI: 10.1007/BF00952107
5. Gamer U., Mack W., Varga I. Rotating elastic-plastic solid shaft with fixed ends. *Int. J. Engrg. Sci.*, 1997, Vol. 35, No. 3, pp. 253–267; DOI: 10.1016/S0020-7225(96)00085-7
6. Lindner T., Mack W. Residual stresses in an elastic-plastic solid shaft with fixed ends after previous rotation. *J. Appl. Math. Mech.*, 1998, Vol. 78, No. 2, pp. 75–86; DOI: 10.1002/(SICI)1521-4001(199802)78:2<75::AID-ZAMM75>3.0.CO;2-V
7. Gamer U., Lance R. H. Stress distribution in a rotating elastic-plastic tube. *Acta Mechanica*, 1983, Vol. 50, No. 1/2, pp. 1–8; DOI: 10.1007/BF01170437

8. Prokudin A.N., Firsov S.V. Elastoplastic deformation of a rotating hollow cylinder with a rigid casing. *PNRPU Mech. Bull.*, 2019, No. 4, pp. 120–135; DOI: 10.15593/perm.mech/2019.4.12
9. Prokudin A.N., Firsov S.V. Uprugoplasticheskoe deformirovanie vrashchayushchegosya pologo tsilindra s zhestkim pokrytiem na vnutrennei i vneshnei stenkakh [Elastic-plastic deformation of a rotating hollow cylinder with a rigid coating on the inner and outer walls]. *Vestn. Inzhenernoi Shkoly Dal'nevostochnogo Federal'nogo Un-ta*, 2019, Vol. 41, No. 4, pp. 12–28 (in Russian); DOI: 10.24866/2227-6858/2019-4-2
10. Prokudin A.N. Exact elastoplastic analysis of a rotating cylinder with a rigid inclusion under mechanical loading and unloading. *J. Appl. Math. Mech.*, 2020, Vol. 100, No. 3, p. e201900213; DOI: 10.1002/zamm.201900213
11. Mack W. Rotating elastic-plastic tube with free ends. *Int. J. Solids and Structures*, 1991, Vol. 27, No. 11, pp. 1461–1476; DOI: 10.1016/0020-7683(91)90042-E
12. Mack W. The rotating elastic-plastic solid shaft with free ends. *Technische Mechanik*, 1991, No. 12, pp. 119–124.
13. Rees D.W.A. Elastic-plastic stresses in rotating discs by von Mises and Tresca. *J. Appl. Math. Mech.*, 1999, Vol. 79, No. 4, pp. 281–288; DOI: 10.1002/(SICI)1521-4001(199904)79:4<281::AID-ZAMM281>3.0.CO;2-V
14. Eraslan A.N. Von Mises' yield criterion and nonlinearly hardening variable thickness rotating annular disks with rigid inclusion. *Mech. Res. Comm.*, 2002, Vol. 29, No. 5, pp. 339–350; DOI: 10.1016/S0093-6413(02)00282-3
15. Eraslan A. N. Stress distributions in elastic-plastic rotating disks with elliptical thickness profiles using Tresca and von Mises criteria. *J. Appl. Math. Mech.*, 2005, Vol. 85, No. 4, pp. 252–266; DOI: 10.1002/zamm.200210177
16. Eraslan A.N. Von Mises' yield criterion and nonlinearly hardening rotating shafts. *Acta Mech.*, 2004, V. 168, N 3/4. P. 129–144; DOI: 10.1007/s00707-004-0088-z
17. Eraslan A.N., Mack W. A computational procedure for estimating residual stresses and secondary plastic flow limits in nonlinearly strain hardening rotating shafts. *Forschung im Ingenieurwesen*, 2005, Vol. 69, No. 2, pp. 65–75; DOI: 10.1007/s10010-004-0138-7
18. Aleksandrova N. Application of Mises yield criterion to rotating solid disk problem. *Int. J. Engrg. Sci.*, 2012, Vol. 51, pp. 333–337; DOI: 10.1016/j.ijengsci.2011.10.006
19. Aleksandrova N. Exact deformation analysis of a solid rotating elastic-perfectly plastic disk. *Int. J. Mech. Sci.*, 2014, Vol. 88, pp. 55–60; DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2014.07.003
20. Alexandrova N.N, Alexandrov S., Vila R.P.M.M. Analysis of stress and strain in a rotating disk mounted on a rigid shaft. *Theor. Appl. Mech.*, 2006, Vol. 33, No. 1, pp. 65–90; DOI: 10.2298/TAM0601065A
21. Alexandrova N., Alexandrov S., Real P.M.M.V. Displacement field and strain distribution in a rotating annular disk. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 2004, Vol. 32, No. 4, pp. 441–457; DOI: 10.1081/SME-200034151
22. Lomakin E., Alexandrov S., Jeng Y.-R. Stress and strain fields in rotating elastic/plastic annular discs. *Archive Appl. Mechanics*, 2016, Vol. 86, No. 1/2, pp. 235–244; DOI: 10.1007/s00419-015-1101-9
23. Schmidt R. Über den Zusammenhang von Spannungen und Formänderungen im Verfestigungsgebiet. *Ingenieur-Archiv*, 1932, Vol. 3, No. 3, pp. 215–235; DOI: 10.1007/BF02079970
24. Ishlinskii A.Yu. Gipoteza prochnosti formoizmeneniya [The hypothesis of the strength of the shape change]. *Uchenye zap. MGU*, 1940, No. 46, pp. 104–114 (in Russian).
25. Ishlinskii A. Yu., Ivlev D. D. Matematicheskaya teoriya plastichnosti [Mathematical theory of plasticity]. Moscow: Fizmatlit, 2003 (in Russian).
26. Cai Q., Pang M., Zhang Y.-Q., Liu X. Elastic-plastic stress distribution of rotating annular disc based on twin-shear stress yield criterion. *J. Zhejiang Univ. (Engrg. Sci.)*, 2008, Vol. 42, No. 9, pp. 1540–1544; DOI: 10.3785/j.issn.1008-973X.2008.09.013
27. Prokudin A.N. Elastic-plastic analysis of rotating solid shaft by maximum reduced stress yield criterion. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Un-ta, Ser. Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2020, Vol. 24, No. 1, pp. 74–94; DOI: 10.14498/VSGTU1737

28. Prokudin A. Schmidt–Ishlinskii yield criterion and a rotating cylinder with a rigid inclusion. *J. Appl. Comput. Mech.*, 2021, Vol. 7, No. 2, pp. 858–869; DOI: 10.22055/jacm.2020.35648.2704
29. Ivlev D.D. On the development of a theory of ideal plasticity. *J. Appl. Math. Mech.*, 1958, Vol. 22, No. 6, pp. 1221–1230; DOI: 10.1016/0021-8928(58)90050-9
30. Naghdi P.M. Stress-strain relations in plasticity and thermoplasticity. *Proc. 2 Symp. Naval Structural Mechanics (Providence, RI 1959)*, Pergamon Press, 1960. P. 121–169.
31. Yu M.-H. Unified Strength Theory and Its Applications. Singapore: Springer-Verl., 2018; DOI: 10.1007/978-981-10-6247-6
32. Kolupaev V.A., Yu M.-H., Altenbach H. Fitting of the strength hypotheses. *Acta Mechanica*, 2016, Vol. 227, No. 6, pp. 1533–1556; DOI: 10.1007/s00707-016-1566-9
33. Koiter W. T. Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic materials with a singular yield surface. *Quarterly Appl. Math.*, 1953, Vol. 11, No. 3, pp. 350–354.
34. Wilson C.D. A critical reexamination of classical metal plasticity. *J. Appl. Mechanics, Transactions*, 2002, Vol. 69, No. 1, pp. 63–68; DOI: 10.1115/1.1412239
35. Smith J., Liu W. K., Cao J. A general anisotropic yield criterion for pressure-dependent materials. *Int. J. Plasticity*, 2015, Vol. 75, pp. 2–21; DOI: 10.1016/j.ijplas.2015.08.009