

# СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор	В. Л. Береснев
Зам. главного редактора	А. Л. Карчевский
Отв. секретарь	В. А. Дедок

## ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ

Г. В. Алексеев	С. Б. Медведев
Б. Д. Аннин	Р. Г. Новиков
В. С. Белоносов	Д. Е. Пальчунов
В. Н. Белых	П. И. Плотников
Ю. С. Волков	В. Г. Романов
В. П. Ильин	Е. М. Рудой
С. И. Кабанихин	В. М. Садовский
А. Н. Карапетянц	Д. И. Свириденко
М. В. Клибанов	А. С. Терсенов
С. С. Кутателадзе	В. С. Тимофеев
В. А. Левин	В. В. Шайдуров
Н. И. Макаренко	

Журнал основан в 1998 году  
Выходит 4 раза в год

**Том 25, № 2(90)**

Апрель – июнь, 2022 г.

## СОДЕРЖАНИЕ

Андреев В. К., Вахрамеев И. В., Магденко Е. П. Тепловая конвекция во вращающейся трубе .....	5
Васюткин С. А., Чупахин А. П. Построение минимального базиса инвариантов для дифференциальной алгебры $(2 \times 2)$ -матриц .....	21
Воронин А. Ф. К методу факторизации матриц-функций в алгебре Винера порядка 2 .....	32
Наумов В. В., Шамаев И. И., Местников С. В., Лазарев Н. П. Максимизация валового дохода для макроэкономической системы с потреблением, пропорциональным трудовым ресурсам .....	46
Прокудин А. Н., Фирсов С. В. Упругопластические деформации во вращающемся полом цилиндре с жёстким внешним покрытием при условии максимальных приведённых напряжений .....	58
• Романов В. Г., Бугуева Т. В. Обратная задача для нелинейного волнового уравнения .....	83
Сенашов С. И., Савостьянова И. Л. Использование законов сохранения для решения краевых задач системы Моисила – Теодореску .....	101
Фадеев С. А., Дедок В. А., Бондаренко А. Н. Полиномиальный алгоритм классификации решений задачи Томсона .....	110
Хасанов А. Б., Хасанов Т. Г. Интегрирование нелинейного уравнения Кортевега — де Фриза с нагруженным членом и источником .....	127

НОВОСИБИРСК

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

УДК 539.3:517.95

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО  
УРАВНЕНИЯ© 2022 В. Г. Романов<sup>1a</sup>, Т. В. Бугуева<sup>1,2b</sup><sup>1</sup>*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
просп. Акад. Коптюга, 4, г. Новосибирск 630090, Россия,*<sup>2</sup>*Новосибирский государственный университет,  
ул. Пирогова, 1, г. Новосибирск 630090, Россия*E-mails: <sup>a</sup>romanov@math.nsc.ru, <sup>b</sup>bugueva@math.nsc.ruПоступила в редакцию 16.12.2021 г.; после доработки 16.12.2021 г.;  
принята к публикации 13.01.2022 г.

Рассмотрена обратная задача определения коэффициента при нелинейном члене уравнения, главная часть которого представляет собой волновой оператор. Изучены свойства решения прямой задачи, в частности, установлено существование и единственность ограниченного решения в окрестности характеристического конуса, выписана структура этого решения. Задача нахождения неизвестной функции сведена к задаче интегральной геометрии на семействе прямых с весовой функцией, инвариантной относительно вращений вокруг некоторой фиксированной точки. Установлена единственность решения обратной задачи и предложен алгоритм восстановления искомой функции.

**Ключевые слова:** нелинейное волновое уравнение, обратная задача, интегральная геометрия.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.206

Впервые на связь между задачами интегральной геометрии и многомерными обратными задачами было обращено внимание в работе [1]. В работах [2–5] исследование обратных задач для уравнений гиперболического типа было сведено к задачам интегральной геометрии. Первый результат по интегральной геометрии для довольно общего семейства кривых в двумерном пространстве, инвариантном относительно группы вращений, был получен в [6], где была рассмотрена задача о восстановлении непрерывной внутри единичного круга функции через интегралы от этой функции по двухпараметрическому семейству кривых, лежащих внутри этого круга. В работе [7] рассмотрена задача о восстановлении функции через интегралы по эллипсоидам вращения, у которых один фокус неподвижен. В работе [3] были рассмотрены задачи интегральной геометрии в  $n$ -мерном пространстве для семейств кривых, инвариантных к параллельному переносу вдоль фиксированной плоскости, к вращению вокруг фиксированной точки, а также для поверхностей, инвариантных к сдвигу параллельного переноса. Были выяснены геометрические и аналитические условия, достаточные для единственности решения рассмотренных задач. В работах [8–11] изучены задачи интегральной геометрии на семействе римановых геодезических линий. В работе [12] рассмотрены лучевые постановки некоторых обратных задач с данными на границе компактной области для некоторого временного интервала. Исследование задач основано на асимптотическом разложении решения в окрестности характеристического конуса.

Новизна рассмотренной в данной работе задачи заключается в том, что разработанные ранее подходы для исследования обратных задач для линейных гиперболических уравнений

применены для нелинейного уравнения, которое мы рассматриваем далее. Для решения этой задачи выведено асимптотическое разложение по особенностям вблизи характеристического конуса. Поставленная в работе обратная задача сведена к изучению задачи интегральной геометрии с некоторой специальной весовой функцией. Для этой задачи установлена конструктивная теорема единственности, из которой вытекает также алгоритм построения искомой функции.

## 1. ПОСТАНОВКА ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Пусть  $q(x)$  — бесконечно дифференцируемая финитная функция и её носитель содержится в шаре  $B_{r_0} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < r_0\}$ ,  $r_0 > 0$ . Требуется найти функцию  $u(x, t, y)$ , удовлетворяющую соотношениям

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u - q(x)u^2 &= \theta_0(t)\delta(x - y), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^4; \\ u|_{t < 0} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

в которых  $\theta_0(t)$  — функция Хевисайда:  $\theta_0(t) = 1$  для  $t \geq 0$  и  $\theta_0(t) = 0$  для  $t < 0$ .

Пусть  $y \in S_R$ ,  $S_R = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = R\}$  и  $R > r_0$ . Построим асимптотическое разложение решения задачи (1) вблизи характеристического конуса  $K(y) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid t = |x - y|\}$ . Введем в рассмотрение функции

$$\theta_k(t) = \frac{t^k}{k!}\theta_0(t), \quad k = 1, 2, \dots, \quad \frac{d\theta_0(t)}{dt} = \delta(t) := \theta_{-1}(t), \quad \frac{d\theta_{-1}(t)}{dt} = \delta'(t) := \theta_{-2}(t),$$

где  $\delta(t)$  — дельта-функция Дирака,  $\delta'(t)$  — её производная.

**Теорема 1.** Пусть  $y \in S_R$ ,  $R < r_0$ , и  $q(x)$  — бесконечно дифференцируемая финитная функция с носителем, содержащемся в шаре  $B_{r_0} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < r_0\}$ ,  $r_0 > 0$ . Тогда решение задачи (1) в окрестности характеристического конуса представимо в виде асимптотического ряда

$$u(x, t, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(x, y)\theta_k(t - |x - y|), \quad (2)$$

в котором  $\alpha_k(x, y)$  — бесконечно дифференцируемые функции переменной  $x$  для всех  $x \neq y$ .

**Доказательство.** Непосредственные вычисления ведут к формулам

$$u_{tt} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(x, y)\theta_{k-2}(t - |x - y|), \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \Delta u &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \alpha_k(x, y)\theta_{k-2}(t - |x - y|) \right. \\ &\quad \left. - \left( \alpha_k(x, y)\frac{2}{|x - y|} + 2\nabla\alpha_k(x, y) \cdot \nabla|x - y| \right)\theta_{k-1}(t - |x - y|) + \Delta\alpha_k(x, y)\theta_k(t - |x - y|) \right], \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u^2(x, t, y) &= \sum_{m, j=0}^{\infty} \alpha_m(x, y)\alpha_j(x, y)\theta_m(t - |x - y|)\theta_j(t - |x - y|) \\ &= \sum_{m, j=0}^{\infty} \alpha_m(x, y)\alpha_j(x, y)\frac{(m + j)!}{m!j!}\theta_{m+j}(t - |x - y|) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k \alpha_m(x, y)\alpha_{k-m}(x, y)\frac{m!}{m!(k - m)!}\theta_k(t - |x - y|). \quad (5) \end{aligned}$$

Подставляя (3)–(5) в (1) и приравнивая коэффициенты при  $\delta(t - |x - y|)$ ,  $\theta_k(t - |x - y|)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , получаем

$$\begin{aligned} \nabla\alpha_0 \cdot \nabla|x - y| + \alpha_0(x, y) \frac{1}{|x - y|} &= 0, \\ 2\nabla\alpha_k \cdot \nabla|x - y| + \alpha_k(x, y) \frac{2}{|x - y|} \\ &= \Delta\alpha_{k-1} + q(x)\alpha_{k-1}(x, y) \sum_{m=0}^{k-1} \alpha_{m-k+1}(x, y) \frac{m!}{(k-1)!(m-k+1)!}, \quad k \geq 1. \end{aligned} \quad (6)$$

Проинтегрируем эти уравнения. Рассмотрим луч

$$x = y + \nu s, \quad s \geq 0, \quad |\nu| = 1 \Rightarrow s = |x - y|, \quad \frac{d\alpha_0}{ds} = \nabla\alpha_0 \cdot \nabla s = \nabla\alpha_0 \cdot \nabla|x - y|.$$

Вдоль луча  $x = y + \nu s$  первое из уравнений (6) принимает вид  $\frac{d\alpha_0}{ds} + \alpha_0 \frac{1}{s} = 0$ . Из этого равенства вытекает, что  $s \frac{d\alpha_0}{ds} + \alpha_0 = \frac{d(s\alpha_0)}{ds} = 0$ . Следовательно,  $\alpha_0(y + \nu s, y) = C_0(y)/s$ , т. е.

$$\alpha_0(x, y) = \frac{C_0(y)}{|x - y|}. \quad (7)$$

Так как по предположению  $y \in S_R$ ,  $R > r_0$ , то решение задачи (1) совпадает в области  $\{(x, t) \mid |x - y| < R - r_0, 0 \leq t \leq 2(R - r_0) - |x - y|\}$  с решением задачи

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= \theta_0(t)\delta(x - y), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^4; \\ u|_{t < 0} &= 0. \end{aligned}$$

Решение этой задачи выписывается в явном виде:

$$u^0(x, t) = \frac{1}{4\pi|x - y|} \theta_0(t - |x - y|).$$

Отсюда следует, что коэффициенты разложения (1) должны удовлетворять условиям

$$\alpha_0(x, y) = \frac{1}{4\pi|x - y|}, \quad |x - y| < R - r_0, \quad \alpha_k(x, y) = 0, \quad k \geq 1.$$

Поэтому  $C_0(y) = 1/(4\pi)$ , т. е.

$$\alpha_0(x, y) = \frac{1}{4\pi|x - y|}. \quad (8)$$

Проинтегрируем уравнение (7) для  $k = 1$  вдоль луча  $x = y + \nu s$ ,  $s \geq 0$ ,  $|\nu| = 1$ , при этом уравнение принимает вид

$$2 \frac{d\alpha_1}{ds} + \alpha_1 \frac{2}{s} = q(y + \nu s) \frac{1}{(4\pi)^2 s^2}.$$

Умножая это уравнение на  $s$ , запишем его в виде

$$2 \frac{d(s\alpha_1)}{ds} = q(y + \nu s) \frac{1}{(4\pi)^2 s}, \quad \alpha_1(y, y) = 0.$$

Отсюда найдём

$$\alpha_1(y + \nu s, y) = \frac{1}{2s} \frac{1}{(4\pi)^2} \int_0^s q(y + \nu s') \frac{ds'}{s'}$$

или

$$\alpha_1(x, y) = \frac{1}{2(4\pi)^2|x-y|} \int_{L(y,x)} \frac{q(\xi)}{|\xi-y|} ds' = \frac{\alpha_0(x, y)}{8\pi} \int_{L(y,x)} \frac{q(\xi)}{|\xi-y|} ds'. \quad (9)$$

Аналогично интегрируется уравнение (7) для  $k \geq 2$ . В результате получаются формулы

$$\alpha_k(x, y) = \frac{1}{2|x-y|} \int_{L(y,x)} \frac{1}{|\xi-y|} \left( \Delta \alpha_{k-1}(\xi, y) + q(\xi) \alpha_{k-1}(\xi, y) \sum_{m=0}^{k-1} \alpha_{m-k+1}(\xi, y) \frac{m!}{(k-1)!(m-k+1)!} \right) ds, \quad k \geq 2. \quad (10)$$

Заметим, что интегралы в формулах (9), (10) отличны от нуля только в том случае, когда луч  $L(y, x)$  пересекает шар  $B_{r_0}$ , и тогда коэффициенты  $\alpha_k(x, y)$ ,  $k \geq 1$ , не обращаются в нуль. Если луч  $L(y, x)$  пересекает шар  $B_{r_0}$ , то интегрирование осуществляется по пересечению этого луча с  $B_{r_0}$ .

Очевидно, что все  $\alpha_k(x, y)$  являются бесконечно дифференцируемыми функциями переменной  $x$  для  $x \neq y$ .  $\square$

## 2. АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Заметим, что асимптотическое разложение (2) имеет чисто формальный характер. Оно показывает только, как вычисляются коэффициенты этого разложения для любых  $n$ . И, конечно, здесь не идет речь о сходимости ряда в какой-либо области. В случае, когда коэффициент  $q(x)$  имеет конечную гладкость, скажем,  $q \in C^m(\mathbb{R}^3)$ , можно построить конечный отрезок ряда (его длина зависит от  $m$ ) плюс остаток и рассматривать вопрос о гладкости этого остатка. Подобный вопрос сравнительно легко решается для линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Но в рассматриваемом нами случае нелинейного уравнения (1) этот вопрос далеко не так тривиален, не понятно даже, в какой области существует решение уравнения (1). В этой связи представляет интерес следующая

**Теорема 2.** Пусть  $y \in S_R$ ,  $R < r_0$ ,  $q(x)$  — непрерывная финитная функция с носителем, содержащемся в шаре  $B_{r_0}$ ,  $r_0 > 0$ . Тогда существует единственное обобщенное решение задачи (1) вблизи характеристического конуса  $t = |x - y|$  и оно представимо в виде

$$u(x, t, y) = \alpha_0(x, y)\theta_0(t - |x - y|) + [\alpha_1(x, y) + \bar{u}(x, t, y)]\theta_1(t - |x - y|), \quad (11)$$

в котором функции  $\alpha_0(x, y)$ ,  $\alpha_1(x, y)$  вычисляются по формулам (8), (9), а функция  $\bar{u}(x, t, y)$  является бесконечно малой при  $t - |x - y| \rightarrow +0$ .

**Доказательство.** Доказательство этой теоремы довольно громоздко, и мы его разбиваем на несколько лемм, в которых устанавливается сначала ограниченность в некоторой области  $G_1$ , примыкающей к характеристическому конусу, последовательных приближений к решению, затем равномерная сходимость этой последовательности в  $G_1$  к непрерывному решению вспомогательного интегрального уравнения и далее устанавливается единственность этого решения. Затем доказывается представление (11).

Воспользуемся формулой Кирхгофа и сведем решение задачи (1) к интегральному уравнению

$$u(x, t, y) = \alpha_0(x, y)\theta_0(t - |x - y|) + \frac{1}{4\pi} \int_{|\xi-x| \leq t} \frac{q(\xi)u^2(\xi, t - |\xi - x|, y)}{|\xi - x|} d\xi, \quad t > 0. \quad (12)$$

Очевидно, что решение этого уравнения  $u(x, t, y) = 0$  при  $t < |x - y|$ . Поэтому из (12) следует уравнение

$$u(x, t, y) = \alpha_0(x, y) + \frac{1}{4\pi} \int_{D(x, y, t)} \frac{q(\xi) u^2(\xi, t - |\xi - x|, y)}{|\xi - x|} d\xi, \quad t \geq |x - y|, \quad (13)$$

в котором  $D(x, y, t)$  — область, ограниченная эллипсоидом

$$E(x, y, t) = \{\xi \in \mathbb{R}^3 \mid |\xi - x| + |\xi - y| = t\}$$

с фокусами в точках  $x$  и  $y$ . Так как  $q(x) = 0$  для  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus B_{r_0}$ , то интеграл в формуле (13) равен нулю для тех  $(x, t)$ , для которых  $D(x, y, t) \cap B_{r_0} = \emptyset$ . В частности, он равен нулю для значений  $(x, t) \in G'$ :

$$G' = \{(x, t) \mid |x - y| \leq R - r_0, |x - y| \leq t \leq 2(R - r_0) - |x - y|\}.$$

Поэтому

$$u(x, t, y) = \alpha_0(x, y), \quad (x, t) \in G'. \quad (14)$$

Введем в точке  $y$  декартову  $\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3$  и связанную с ней сферическую  $r, \theta, \varphi, \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi)$ , системы координат, направив полярную ось  $\xi'_3$  по прямой, соединяющей точки  $x$  и  $y$ , с положительным направлением единичного орта  $\mathbf{e}_3$  от  $y$  к  $x$ . При этом  $\mathbf{e}_3 = \nu$  и единичные орты  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$  ортогональны вектору  $\mathbf{e}_3$ . Тогда

$$\xi = y + \sum_{i=1}^3 \xi'_i \mathbf{e}_i, \quad \xi'_1 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad \xi'_2 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad \xi'_3 = r \cos \theta. \quad (15)$$

Рассмотрим семейство софокусных эллипсоидов  $E(x, y, \tau)$ ,  $\tau \in [|x - y|, t]$ . Заметим, что при  $\tau \rightarrow |x - y| + 0$  эллипсоид  $E(x, y, \tau)$  стягивается к отрезку  $L(y, x)$ . Пересечение эллипсоида  $E(x, y, \tau)$  с полуплоскостью  $\varphi = \text{const}$  представляет собой полуэллипс, уравнение которого в сферической системе координат имеет вид

$$r = r(\theta, \tau) = \frac{\tau^2 - |x - y|^2}{2(\tau - |x - y| \cos \theta)}, \quad \theta \in [0, \pi].$$

При этом  $r(0, \tau) = (\tau + |x - y|)/2 \rightarrow |x - y|$  и  $r(\pi, \tau) = (\tau - |x - y|)/2 \rightarrow 0$ , если  $\tau \rightarrow |x - y| + 0$ .

Пусть

$$z = \xi'_3 = r(\theta, \tau) \cos \theta = \frac{(\tau^2 - |x - y|^2) \cos \theta}{2(\tau - |x - y| \cos \theta)}, \quad \theta \in [0, \pi].$$

Отсюда можем написать

$$\begin{aligned} \cos \theta(z, \tau) &= \frac{2z\tau}{\tau^2 - |x - y|^2 + 2z|x - y|}, \\ \sin \theta &= (\tau^2 - |x - y|^2)^{1/2} \frac{(\tau^2 - (2z - |x - y|)^2)^{1/2}}{(\tau^2 - |x - y|^2 + 2z|x - y|)}, \\ r(z, \tau) &= \frac{z}{\cos \theta(z, \tau)} = \frac{1}{2\tau} (\tau^2 - |x - y|^2 + 2z|x - y|), \\ r(z, \tau) \sin \theta &= \frac{(\tau^2 - |x - y|^2)^{1/2} (\tau^2 - (2z - |x - y|)^2)^{1/2}}{2\tau} := f(x, y, z, \tau), \\ |\xi - y| &= r(z, \tau) = \frac{1}{2\tau} (\tau^2 - |x - y|^2 + 2z|x - y|), \\ |\xi - x| &= \tau - |\xi - y| = \frac{1}{2\tau} (\tau^2 + |x - y|^2 - 2z|x - y|). \end{aligned}$$

Точке  $\xi$  сопоставим криволинейные координаты  $z, \varphi, \tau$ . Тогда

$$d\xi = r dr dz d\varphi = r(z, \tau) \left| \frac{\partial r(z, \tau)}{\partial \tau} \right| d\tau dz d\varphi.$$

Имеем

$$\frac{\partial r(z, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{2\tau^2} (\tau^2 + |x - y|^2 - 2z|x - y|) = \frac{|\xi - x|}{\tau}.$$

Следовательно,

$$\frac{d\xi}{|\xi - x|} = \frac{|\xi - y|}{\tau} d\tau dz d\varphi.$$

Уравнение (13) тогда можно представить в виде

$$u(x, t, y) = \alpha_0(x, y) + \frac{1}{4\pi} \int_{|x-y|}^t \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \int_0^{2\pi} q(\xi) u^2(\xi, t - |\xi - x|, y) \frac{|\xi - y|}{\tau} d\varphi dz d\tau, \quad t \geq |x - y|, \quad (16)$$

в котором

$$\begin{aligned} z_{\min} &= -(\tau - |x - y|)/2, & z_{\max} &= (\tau + |x - y|)/2, \\ \xi &= y + f(x, y, z, \tau)(\mathbf{e}_1 \cos \varphi + \mathbf{e}_2 \sin \varphi) + z\boldsymbol{\nu}. \end{aligned} \quad (17)$$

Введем новую функцию  $\hat{u}(x, t, y) = u(x, t, y)/\alpha_0(x, y)$ . Эта функция удовлетворяет уравнению

$$\hat{u}(x, t, y) = 1 + \frac{|x - y|}{(4\pi)^2} \int_{|x-y|}^t \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \int_0^{2\pi} \frac{q(\xi)}{\tau|\xi - y|} \hat{u}^2(\xi, t - |\xi - x|, y) d\varphi dz d\tau, \quad t \geq |x - y|. \quad (18)$$

Определим последовательность  $\hat{u}_n(x, t, y)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , формулой

$$\begin{aligned} \hat{u}_0(x, t, y) &= 1, \\ \hat{u}_n(x, t, y) &= 1 + \frac{|x - y|}{(4\pi)^2} \int_{|x-y|}^t \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \int_0^{2\pi} \frac{q(\xi)}{\tau|\xi - y|} \hat{u}_{n-1}^2(\xi, t - |\xi - x|, y) d\varphi dz d\tau, \quad t \geq |x - y|. \end{aligned} \quad (19)$$

Пусть  $|q(x)| \leq q_0$ . Обозначим  $\lambda = q_0(R + r_0)/[8\pi(R - r_0)]$  и

$$G(y, \varepsilon) = \{(x, t) \mid 0 \leq \lambda(t - |x - y|) \leq \varepsilon < 1\}.$$

**Лемма 1.** В области  $G(y, \varepsilon)$  последовательность  $\{\hat{u}_n(x, t, y)\}$  удовлетворяет оценке

$$|\hat{u}_n(x, t, y) - 1| \leq \frac{|x - y|\lambda(t - |x - y|)}{(R + r_0)(1 - \lambda(t - |x - y|))} \leq \frac{|x - y|\varepsilon}{(R + r_0)(1 - \varepsilon)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (20)$$

**Доказательство.** Оценим  $\hat{u}_1(x, t, y)$ . Используем при выполнении этой оценки тот факт, что

$$z_{\max} - z_{\min} = \tau, \quad R - r_0 \leq |\xi - y| \quad \text{для} \quad \xi \in B_{r_0}.$$

Тогда из формулы (19) следует, что

$$\begin{aligned} |\hat{u}_1(x, t, y) - 1| &\leq \frac{q_0|x - y|}{8\pi(R - r_0)} \int_{|x-y|}^t d\tau = \frac{q_0|x - y|(t - |x - y|)}{8\pi(R - r_0)} \\ &= \frac{|x - y|\lambda(t - |x - y|)}{(R + r_0)} \leq \frac{|x - y|\lambda(t - |x - y|)}{(R + r_0)(1 - \lambda(t - |x - y|))}, \quad (x, t) \in G(y, \varepsilon). \end{aligned} \quad (21)$$

На основе этой оценки находим, что

$$|\hat{u}_2(x, t, y) - 1| \leq \frac{|x-y|}{(4\pi)^2} \int_{|x-y|}^t \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \int_0^{2\pi} \frac{q(\xi)}{\tau|\xi-y|} \left( 1 + \frac{\lambda|\xi-y|(t-|\xi-y|-|\xi-x|)}{(R+r_0)(1-\lambda(t-|\xi-y|-|\xi-x|))} \right)^2 dz d\varphi d\tau.$$

Используем здесь соотношения

$$\begin{aligned} R - r_0 &\leq |\xi - y| \leq R + r_0 \quad \text{для } \xi \in B_{r_0}, \\ z_{\max} - z_{\min} &= \tau, \\ |\xi - y| + |\xi - x| &= \tau \quad \text{для } \xi \in E(x, y, \tau). \end{aligned}$$

Тогда мы можем продолжить оценку  $\hat{u}_2(x, t, y)$  следующим образом:

$$\begin{aligned} |\hat{u}_2(x, t, y) - 1| &\leq \frac{q_0|x-y|}{8\pi(R-r_0)} \int_{|x-y|}^t \left( 1 + \frac{\lambda(t-\tau)}{1-\lambda(t-\tau)} \right)^2 d\tau \\ &= \frac{\lambda|x-y|}{(R+r_0)} \int_{|x-y|}^t \frac{1}{(1-\lambda(t-\tau))^2} d\tau = \frac{|x-y|\lambda(t-|x-y|)}{(R+r_0)(1-\lambda(t-|x-y|))}, \quad (x, t) \in G(y, \varepsilon). \end{aligned} \quad (22)$$

Таким образом, оценка (22) для  $\hat{u}_2(x, t, y)$  в точности совпадает с оценкой (21) для  $\hat{u}_1(x, t, y)$ . Естественно, что и все последующие оценки для  $\hat{u}_n(x, t, y)$  будут совпадать с той же самой оценкой, т. е. с (20).  $\square$

**Следствие.** Последовательность  $\{\hat{u}_n(x, t, y)\}$  является ограниченной в любой области  $G_1(y, \varepsilon, R_1) = \{(x, t) \in G(y, \varepsilon) \mid |x-y| \leq R_1\}$ ,  $R_1 > 0$ , причем для всех  $n$  выполнено неравенство

$$|\hat{u}_n(x, t, y)| \leq 1 + \frac{R_1 \varepsilon}{(R+r_0)(1-\varepsilon)} := A, \quad (x, t) \in G_1(y, \varepsilon, R_1). \quad (23)$$

**Лемма 2.** Последовательность  $\{\hat{u}_n(x, t, y)\}$  равномерно сходится в области  $G_1(y, \varepsilon, R_1)$  при любых значениях  $R_1 > 0$  и определяет в этой области непрерывную предельную функцию  $\hat{u}(x, t, y)$ . Эта функция является решением уравнения (18) в области  $G_1(y, \varepsilon, R_1)$ .

**Доказательство.** Введем в рассмотрение разности

$$v_n(x, t, y) = \hat{u}_n(x, t, y) - \hat{u}_{n-1}(x, t, y), \quad n = 1, 2, \dots$$

Из формулы (19) следуют равенства

$$v_1(x, t, y) = \hat{u}_1(x, t, y) - 1,$$

$$\begin{aligned} v_n(x, t, y) &= \frac{|x-y|}{(4\pi)^2} \int_{|x-y|}^t \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \int_0^{2\pi} \frac{q(\xi)}{\tau|\xi-y|} v_{n-1}(\xi, t-|\xi-x|, y) \\ &\quad \times [\hat{u}_{n-1}(\xi, t-|\xi-x|, y) + \hat{u}_{n-2}(\xi, t-|\xi-x|, y)] d\varphi dz d\tau, \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (24)$$



Из оценки (21) следует, что

$$|v_1(x, t, y)| \leq \frac{|x - y|\lambda(t - |x - y|)}{R + r_0}, \quad (x, t) \in G(y, \varepsilon). \quad (25)$$

Из формул (23)–(25) тогда вытекает оценка

$$\begin{aligned} |v_2(x, t, y)| &\leq \frac{A|x - y|\lambda^2}{\pi(R + r_0)} \int_{|x-y|}^t \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \int_0^{2\pi} \frac{t - |\xi - y| - |\xi - x|}{\tau} d\varphi dz d\tau \\ &= \frac{2A|x - y|\lambda^2}{R + r_0} \int_{|x-y|}^t (t - \tau) d\tau = \frac{2A|x - y| [\lambda(t - |x - y|)]^2}{2!(R + r_0)}, \quad (x, t) \in G_1(y, \varepsilon, R_1). \end{aligned}$$

Продолжая процесс вычислений, устанавливаем оценку

$$|v_n(x, t, y)| \leq \frac{(2A)^{n-1}|x - y| [\lambda(t - |x - y|)]^n}{n!(R + r_0)} \leq \frac{(2A)^{n-1}R_1 \varepsilon^n}{n!(R + r_0)}, \quad (x, t) \in G_1(y, \varepsilon, R_1), \quad (26)$$

справедливую для любых  $n$ . Эта оценка легко обосновывается методом математической индукции. Из оценки (26) вытекает равномерная сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x, t, y)$  в области  $G_1(y, \varepsilon, R_1)$  при любых  $\varepsilon \in (0, 1)$ ,  $R_1 > 0$  и  $y \in S_R$ , что доказывает также равномерную сходимость последовательности  $\hat{u}_n(x, t, y)$  в той же самой области. Так как очевидно, все  $\hat{u}_n(x, t, y)$  непрерывны в этой области, то предел этой последовательности определяет непрерывную функцию  $\hat{u}(x, t, y)$ , которая является решением уравнения (18). При этом функция  $u(x, t, y) = \hat{u}(x, t, y)\alpha_0(x, y)$  является непрерывным для  $(x, y) \in G_1(y, \varepsilon, R_1)$ ,  $x \neq y$ , решением задачи (1).  $\square$

**Лемма 3.** В области  $G_1(y, \varepsilon, R_1)$  уравнение (18) имеет единственное непрерывное решение.

**Доказательство.** Пусть существуют два решения  $\hat{u}_k(x, t, y)$ ,  $k = 1, 2$ , непрерывные и ограниченные в области  $G_1(y, \varepsilon, R_1)$  некоторой постоянной  $A_0$ , зависящей только от тех же параметров  $y, \varepsilon, R_1$ . Обозначим  $w(x, t, y) = \hat{u}_1(x, t, y) - \hat{u}_2(x, t, y)$ . Тогда выполняется равенство

$$\begin{aligned} w(x, t, y) &= \frac{|x - y|}{(4\pi)^2} \int_{|x-y|}^t \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \int_0^{2\pi} \frac{q(\xi)}{\tau|\xi - y|} w(\xi, t - |\xi - x|, y) \\ &\quad \times [\hat{u}_1(\xi, t - |\xi - x|, y) + \hat{u}_2(\xi, t - |\xi - x|, y)] d\varphi dz d\tau. \quad (27) \end{aligned}$$

Из (27) следует, что

$$|w(x, t, y)| \leq \frac{A_0|x - y|\lambda}{\pi(R + r_0)} \int_{|x-y|}^t \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \int_0^{2\pi} \frac{|w(\xi, t - |\xi - x|, y)|}{\tau} d\varphi dz d\tau, \quad (x, t) \in G_1(y, \varepsilon, R_1). \quad (28)$$

Так как в области  $G_1(y, \varepsilon, R_1)$  имеет место неравенство  $|w(x, t, y)| \leq 2A_0$ , то

$$|w(x, t, y)| \leq \frac{(2A_0)^2|x - y|\lambda}{(R + r_0)} \int_{|x-y|}^t d\tau = \frac{(2A_0)^2|x - y|\lambda(t - |x - y|)}{(R + r_0)}, \quad (x, t) \in G_1(y, \varepsilon, R_1).$$

Подставляя эту оценку в неравенство (28), получаем новую оценку

$$|w(x, t, y)| \leq \frac{(2A_0)^3 |x - y| \lambda^2}{(R + r_0)} \int_{|x-y|}^t (t - \tau) d\tau = \frac{(2A_0)^3 |x - y| [\lambda(t - |x - y|)]^2}{2!(R + r_0)}, \quad (x, t) \in G_1(y, \varepsilon, R_1).$$

Повторяя этот процесс итераций  $n$  раз, приходим к оценке

$$|w(x, t, y)| \leq \frac{(2A_0)^{n+2} |x - y| [\lambda(t - |x - y|)]^{n+1}}{(n + 1)!(R + r_0)}, \quad (x, t) \in G_1(y, \varepsilon, R_1). \quad (29)$$

Поскольку правая часть равенства (29) равномерно стремится к нулю в области  $G_1(y, \varepsilon, R_1)$  при  $n \rightarrow \infty$ , то  $w(x, t, y) = 0$  в этой области. Следовательно,  $\hat{u}_1(x, t, y) = \hat{u}_2(x, t, y)$  для всех  $(x, t) \in G_1(y, \varepsilon, R_1)$ .  $\square$

**Лемма 4.** При выполнении условий теоремы 2 решение задачи (1) представимо в области  $G_1(y, \varepsilon, R_1)$  при любых  $\varepsilon \in (0, 1)$ ,  $R_1 > 0$  в виде (11).

**Доказательство.** Введём новую функцию  $\hat{v}(x, t, y) = \hat{u}(x, t, y) - 1$ . Эта функция удовлетворяет уравнению

$$\hat{v}(x, t, y) = \frac{|x - y|}{(4\pi)^2} \int_{|x-y|}^t \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \int_0^{2\pi} \frac{q(\xi)}{\tau |\xi - y|} (1 + \hat{v}(\xi, t - |\xi - x|, y))^2 d\varphi dz d\tau \quad t \geq |x - y|. \quad (30)$$

Сделаем в интеграле замену переменной  $\tau$  на  $\tau_1$ :  $\tau = |x - y| + (t - |x - y|)\tau_1$ . При этом, согласно (17),

$$\begin{aligned} z_{\min} &= -(t - |x - y|)\tau_1/2, \quad z_{\max} = |x - y| + (t - |x - y|)\tau_1/2, \\ \xi &= y + \hat{f}(x, t, y, z, \tau_1)(\mathbf{e}_1 \cos \varphi + \mathbf{e}_2 \sin \varphi) + z\boldsymbol{\nu}, \\ \hat{f}(x, y, z, t, \tau_1) &= f(x, y, z, |x - y| + (t - |x - y|)\tau_1). \end{aligned} \quad (31)$$

Формула (30) при такой замене принимает вид

$$\begin{aligned} \hat{v}(x, t, y) &= \frac{|x - y|(t - |x - y|)}{(4\pi)^2} \int_0^1 \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \int_0^{2\pi} \frac{q(\xi)}{z[|x - y| + (t - |x - y|)\tau_1]} \\ &\quad \times (1 + \hat{v}(\xi, t - |\xi - x|, y))^2 d\varphi dz d\tau_1, \quad t \geq |x - y|, \end{aligned} \quad (32)$$

в котором  $\xi$ ,  $z_{\min}$ ,  $z_{\max}$  вычисляются по формуле (31). Оценим интеграл в этом равенстве при  $t \rightarrow |x - y|$ . Заметим, что при этом эллипсоид  $E(x, y, t)$  стягивается в отрезок  $L(y, x)$ . Так как при  $t \rightarrow |x - y|$  функция  $\hat{f}(x, y, z, t, \tau_1) \rightarrow 0$ , то, согласно формулам (31), имеют место предельные соотношения  $\xi = y + z\boldsymbol{\nu}$ ,  $z_{\min} \rightarrow 0$ ,  $z_{\max} \rightarrow |x - y|$ . Функция  $\hat{v}(\xi, t - |\xi - x|, y)$  при этом равномерно стремится к нулю. Поэтому

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \int_0^{2\pi} (1 + \hat{v}(\xi, t - |\xi - x|, y))^2 \frac{q(\xi)}{z[|x - y| + (t - |x - y|)\tau_1]} d\varphi dz d\tau_1 \\ &= \frac{2\pi}{|x - y|} \int_0^{|x-y|} \frac{q(y + z\boldsymbol{\nu})}{z} dz + o(t - |x - y|), \quad t \rightarrow |x - y| + 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Используя формулу (33), приходим к равенству

$$\hat{v}(x, t, y) = (t - |x - y|) \left( \frac{1}{8\pi} \int_{L(y, x)} \frac{q(\xi)}{|\xi - y|} dz + \bar{v}(x, t, y) \right), \quad t > |x - y|,$$

в котором  $\bar{v}(x, t, y) = o(t - |x - y|)$  при  $t \rightarrow |x - y| + 0$ . С учетом ранее введенных обозначений имеет место равенство  $u(x, t, y) = (1 + \hat{v}(x, t, y))\alpha_0(x, y)$ . Из него следует представление (11), в котором  $\bar{u}(x, t, y) = \alpha_0(x, y)\bar{v}(x, t, y) = o(t - |x - y|)$  при  $t \rightarrow |x - y| + 0$ . Лемма 4 и теорема 2 доказаны.  $\square$

### 3. ПОСТАНОВКА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Пусть  $0 < r_0 < R$  и

$$B_{r_0} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < r_0\}, \quad S_R = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid |y| = R\},$$

$$S_R(y) = \{x \in S_R \mid |x - y| \geq 2\sqrt{R^2 - r_0^2}\}.$$

Полагаем, что  $q \in C(\mathbb{R}^3)$  и  $q(x) = 0$  при  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}_{r_0}$ .

**Обратная задача.** Требуется найти функцию  $q(x)$ , входящую в (1), по заданной информации о решении прямой задачи:

$$u(x, t, y) = F(x, t, y) \quad \text{для всех } y \in S_R, \quad x \in S_R(y), \quad t \in (0, |x - y| + \varepsilon), \quad (34)$$

где  $\varepsilon > 0$  — произвольное малое число (см. рис. 1).

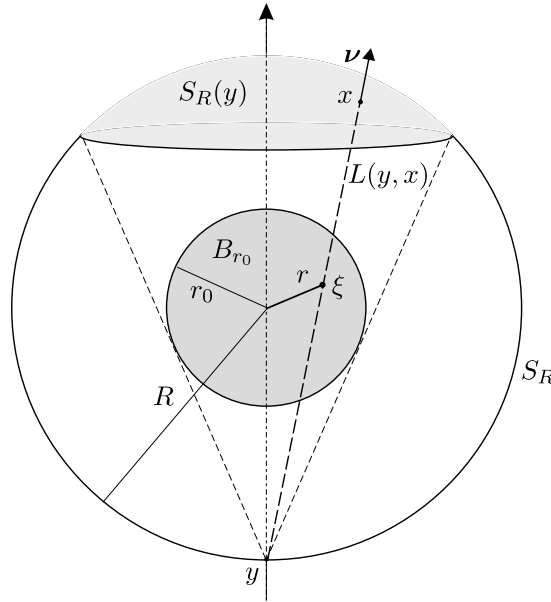


Рис. 1. Поверхность  $S_R(y)$ , на которой задана информация о решении прямой задачи

Пусть точки  $x, y$  фиксированы,  $x \in S_R(y)$ ,  $y \in S_R$ . Рассмотрим в (34) функцию  $F(x, t, y)$  как функцию переменной  $t$ . В силу (11) имеем

$$F_t(x, t, y)|_{t=|x-y|+0} = \alpha_1(x, y), \quad y \in S_R, \quad x \in S_R(y). \quad (35)$$

Таким образом, правая часть равенства (35) известна для всех  $y \in S_R$ ,  $x \in S_R(y)$ . Используя формулу (9), заключаем, что от функции  $q(x)$  известны интегралы

$$\int_{L(y,x)} \frac{q(\xi)}{|\xi - y|} ds = h(x, y), \quad y \in S_R, \quad x \in S_R(y). \quad (36)$$

При этом функция  $h(x, y)$  вычисляется через данные обратной задачи по формуле

$$h(x, y) = 2(4\pi)^2 |x - y| F_t(x, t, y)|_{t \rightarrow |x-y|+0}.$$

Задача об определении функции  $q(x)$  по ее интегралам (36) называется задачей интегральной геометрии. В случае, когда в (36) отсутствует весовой множитель  $1/|\xi - x|$ , это задача рентгеновской томографии, которая довольно часто возникает в приложениях (см., например, [13–15]). Если главная часть линейного гиперболического дифференциального оператора является переменной, то при исследовании ряда обратных задач возникает задача интегральной геометрии на семействе геодезических линий, определяемых римановой метрикой, связанной с коэффициентами главной части рассматриваемого оператора [16–22]. Подобные задачи возникают также для уравнений электродинамики [23–28].

В рассматриваемом нами случае весовая функция является инвариантной относительно преобразования типа вращения вокруг начала координат. Тем же свойством обладает и семейство  $L(y, x)$ . Кроме того, очевидно, что задача (36) распадается на однопараметрическое семейство плоских задач в плоскостях, проходящих через начало координат.

#### 4. О ВОССТАНОВЛЕНИИ ИСКОМОЙ ФУНКЦИИ

**Теорема 3.** Пусть функция  $q \in C(\mathbb{R}^3)$  и  $\text{supp } q(x) \subset B_{r_0}$ . Тогда эта функция однозначно определяется из уравнения (36).

**Доказательство.** Рассмотрим сечение области  $B_{r_0}$  произвольной плоскостью, проходящей через начало координат (см. рис. 2), и задачу об определении  $q(x)$  в этом сечении. При этом будем предполагать, что точки  $x, y$  принадлежат этой плоскости и  $y \in S_R$ ,  $x \in S_R(y)$ .

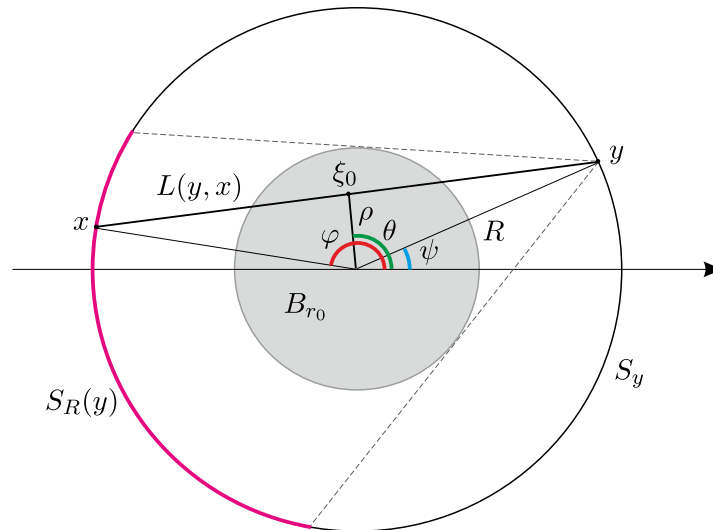


Рис. 2. Средняя точка  $\xi_0$  отрезка прямой  $L(y, x)$

В рассматриваемой плоскости введем новую систему координат  $\xi_1, \xi_2$  и связанную с ней полярную систему координат. Пусть  $y = R(\cos \psi, \sin \psi)$ ,  $\psi \in [0, 2\pi)$  и  $x = R(\cos \varphi, \sin \varphi)$ , причем

$\varphi \in (\psi, \psi + \pi)$ , т. е. мы полагаем, что точки  $x$  пробегают только полуокружность, один из концов которой совпадает с  $y$ . Каждой паре точек  $(y, x)$ , принадлежащих  $S_R$ , сопоставим среднюю точку  $\xi_0 = \rho(\cos \theta, \sin \theta)$  прямой  $L(y, x)$  (см. рис. 2). Здесь и всюду в дальнейшем под прямой  $L(y, x)$  мы понимаем отрезок прямой, соединяющей точки  $y$  и  $x$ . Тогда

$$\xi_0 = \frac{1}{2}(y + x) = \frac{R}{2}(\cos \varphi + \cos \psi, \sin \varphi + \sin \psi), \quad \theta = \frac{\varphi + \psi}{2},$$

$$\rho = \frac{R}{2} \sqrt{(\cos \varphi + \cos \psi)^2 + (\sin \varphi + \sin \psi)^2} = \frac{R\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 + \cos(\varphi - \psi)}.$$

Точка  $\xi_0$  лежит внутри  $B_{r_0}$  только тогда, когда  $\rho < r_0$ . В этом случае  $L(y, x)$  пересекается с  $B_{r_0}$ . В дальнейшем только такие  $L(y, x)$  будем рассматривать. В этом случае правая часть равенства (36) известна. Между парой  $(\rho, \theta)$  и отрезками  $L(y, x)$  существует взаимно однозначное соответствие (см. рис. 3). Действительно, если заданы  $\rho$  и  $\theta$ , то

$$y = R(\cos(\theta - \vartheta_0), \sin(\theta - \vartheta_0)), \quad x = R(\cos(\theta + \vartheta_0), \sin(\theta + \vartheta_0)), \quad \vartheta_0 = \arccos \frac{\rho}{R}.$$

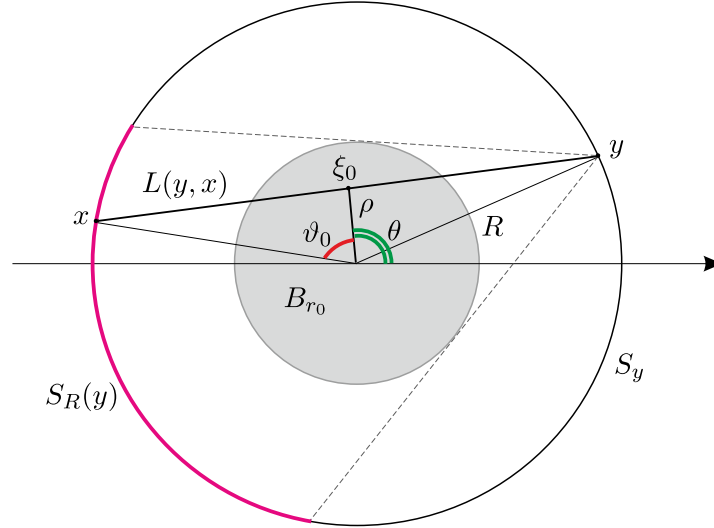


Рис. 3. Связь между парой  $(\rho, \theta)$  и точками прямой  $L(y, x)$

Чтобы записать уравнение прямой  $L(y, x)$ , рассмотрим две точки  $\xi^1 = r_1(\cos \vartheta_1, \sin \vartheta_1)$  и  $\xi^2 = r_2(\cos \vartheta_2, \sin \vartheta_2)$ , лежащие на прямой  $L(y, x)$  справа и слева от точки  $\xi_0$  (см. рис. 4):

$$\vartheta_1(r_1) = \theta - \arccos \frac{\rho}{r_1}, \quad \vartheta_2(r_2) = \theta + \arccos \frac{\rho}{r_2},$$

$$|y - \xi^1| = \sqrt{R^2 - \rho^2} - \sqrt{r_1^2 - \rho^2}, \quad |y - \xi^2| = \sqrt{R^2 - \rho^2} + \sqrt{r_2^2 - \rho^2}.$$

Рассмотрим произвольную точку  $\xi = r(\cos \vartheta, \sin \vartheta) \in L(y, x)$  и запишем уравнение прямой  $L(y, x)$  в общем виде:

$$\vartheta(r) = \begin{cases} \theta - \arccos \frac{\rho}{r}, & \xi \in L(y, \xi_0), \\ \theta + \arccos \frac{\rho}{r}, & \xi \in L(\xi_0, x), \end{cases} \quad (37)$$

при этом

$$|y - \xi| = \begin{cases} \sqrt{R^2 - \rho^2} - \sqrt{r^2 - \rho^2}, & \xi \in L(y, \xi_0), \\ \sqrt{R^2 - \rho^2} + \sqrt{r^2 - \rho^2}, & \xi \in L(\xi_0, x). \end{cases} \quad (38)$$

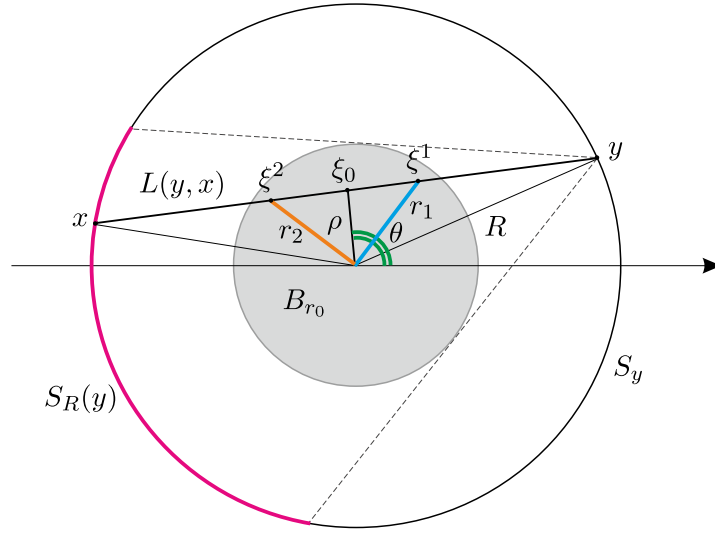


Рис. 4. Вывод уравнения прямой  $L(y, x)$

Заметим, что дальнейшие рассуждения опираются на результаты работы [3], в которой, помимо прочих задач интегральной геометрии, рассматривалась задача о восстановлении функции в круге через интегралы от нее по семейству кривых, инвариантному к вращению вокруг центра круга.

Обозначим  $q(\xi) = \hat{q}(r, \vartheta)$ . В силу (37), (38) равенство (36) можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^2 \int_{\rho}^{r_0} \frac{\hat{q}(r, \theta + (-1)^j \arccos(\rho/r))}{\sqrt{R^2 - \rho^2} + (-1)^j \sqrt{r^2 - \rho^2}} \sqrt{1 + r^2 \left( \frac{d\vartheta(r)}{dr} \right)^2} dr = h(\rho, \theta), \quad (39)$$

где  $h(\rho, \theta)$  — известная функция для всех  $\rho \in [0, r_0]$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$ .

Так как  $\sqrt{1 + r^2 \left( \frac{d\vartheta(r)}{dr} \right)^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}$ , то уравнение (39) принимает вид

$$\begin{aligned} h(\rho, \theta) &= \int_{\rho}^{r_0} \sum_{j=1}^2 \frac{\hat{q}(r, \theta + (-1)^j \arccos(\rho/r))}{\sqrt{R^2 - \rho^2} + (-1)^j \sqrt{r^2 - \rho^2}} \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} \\ &= \int_{\rho}^{r_0} \sum_{j=1}^2 \frac{\sqrt{R^2 - \rho^2} - (-1)^j \sqrt{r^2 - \rho^2}}{R^2 - r^2} \hat{q}(r, \theta + (-1)^j \arccos(\rho/r)) \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}. \end{aligned} \quad (40)$$

Запишем коэффициенты Фурье по  $\theta$  от левой и правой частей равенства (40):

$$h_n(\rho) = \int_{\rho}^{r_0} \hat{q}_n(r) K_n(r, \rho) \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (41)$$

В этой формуле

$$h_n(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\rho, \theta) e^{-in\theta} d\theta, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$\begin{aligned}
K_n(r, \rho) &= \sum_{j=1}^2 \frac{\sqrt{R^2 - \rho^2} - (-1)^j \sqrt{r^2 - \rho^2}}{R^2 - r^2} r \exp\{in(-1)^j \arccos(\rho/r)\} \\
&= \frac{2r\sqrt{R^2 - \rho^2}}{R^2 - r^2} \cos(n \arccos(\rho/r)) - i \frac{2r\sqrt{r^2 - \rho^2}}{R^2 - r^2} \sin(n \arccos(\rho/r)), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (42)
\end{aligned}$$

Функция  $K_n(r, \rho)$  является непрерывной по своим аргументам для всех  $0 \leq \rho \leq r \leq r_0$ , кроме того, при  $\rho = r$  имеем

$$K_n(\rho, \rho) = \frac{2\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \geq \frac{2\rho}{\sqrt{R^2 - r_0^2}} > 0, \quad \rho \in (0, r_0), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (43)$$

Дифференцируя равенство (41) по переменной  $\rho$ , получаем с учетом (42) формулу

$$\frac{\partial K_n(r, \rho)}{\partial \rho} = \frac{\widehat{K}_n(r, \rho)}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}, \quad (44)$$

в которой

$$\begin{aligned}
\widehat{K}_n(r, \rho) &= -\frac{2r\rho\sqrt{r^2 - \rho^2}}{(R^2 - r^2)\sqrt{R^2 - \rho^2}} \cos(n \arccos(\rho/r)) + i \frac{2r\rho}{(R^2 - r^2)} \sin(n \arccos(\rho/r)) \\
&\quad - n\rho \left( \frac{2\sqrt{R^2 - \rho^2}}{R^2 - r^2} \sin(n \arccos(\rho/r)) + i \frac{2\sqrt{r^2 - \rho^2}}{R^2 - r^2} \cos(n \arccos(\rho/r)) \right) \quad (45)
\end{aligned}$$

— непрерывная функция для всех  $0 \leq \rho \leq r \leq r_0$ .

Получим из уравнения (41) уравнение Вольтерра второго рода. Для этого применим к уравнению (41) оператор  $L$ :

$$Lh_n := \frac{1}{\pi} \frac{d}{dt} \int_t^{r_0} \frac{h_n(\rho) \rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 - t^2}}, \quad t \in (0, r_0). \quad (46)$$

В результате получим

$$\begin{aligned}
Lh_n &= \frac{1}{\pi} \frac{d}{dt} \int_t^{r_0} \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - t^2}} \left( \int_\rho^{r_0} \hat{q}_n(r) K_n(r, \rho) \frac{dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} \right) d\rho \\
&= \frac{d}{dt} \int_t^{r_0} q_n(r) \underbrace{\left( \frac{1}{\pi} \int_t^r \frac{K_n(r, \rho) \rho d\rho}{\sqrt{(r^2 - \rho^2)(\rho^2 - t^2)}} \right)}_{:=G_n(r, t)} dr. \quad (47)
\end{aligned}$$

Преобразуем интеграл  $G_n(r, t)$ , введя в нём замену переменной интегрирования

$$\rho = \rho(r, t, \phi) = \sqrt{r^2 \sin^2 \phi + t^2 \cos^2 \phi}, \quad \phi \in [0, \pi/2].$$

Тогда

$$\sqrt{r^2 - \rho^2} = \sqrt{r^2 - t^2} \cos \phi, \quad \sqrt{\rho^2 - t^2} = \sqrt{r^2 - t^2} \sin \phi, \quad \frac{\rho d\rho}{\sqrt{(r^2 - \rho^2)(\rho^2 - t^2)}} = d\phi$$

и интеграл  $G_n(r, t)$  принимает вид

$$G_n(r, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} K_n(r, \rho(r, t, \phi)) d\phi,$$

при этом

$$G_n(t, t) = \frac{t}{\sqrt{R^2 - t^2}}, \quad t \in [0, r_0]. \quad (48)$$

Выполняя в (47) дифференцирование по  $t$  и используя равенство (48), получаем интегральное уравнение

$$-\frac{t}{\sqrt{R^2 - t^2}} q_n(t) + \int_t^{r_0} q_n(r) H_n(r, t) dr = Lh_n, \quad (49)$$

в котором

$$\begin{aligned} H_n(r, t) &= \frac{\partial G_n(r, t)}{\partial t} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\partial K_n(r, \rho)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho(r, t, \phi)} \frac{\partial \rho(r, t, \phi)}{\partial t} d\phi \\ &= \frac{1}{\pi \sqrt{r^2 - t^2}} \int_0^{\pi/2} \frac{t \widehat{K}_n(r, \rho(r, t, \phi)) \cos \phi}{\sqrt{r^2 \sin^2 \phi + t^2 \cos^2 \phi}} d\phi. \end{aligned} \quad (50)$$

Рассмотрим уравнение (49) для  $t \in [t_0, r_0]$ , где  $t_0 \in (0, r_0)$ . Очевидно, что ядро  $H_n(r, t)$  имеет на диагонали слабую полярность. Функция  $\sqrt{r^2 - t^2} H_n(r, t)$  остается при этом непрерывной, поэтому уравнение (49) итерацией ядра приводится к уравнению с непрерывным ядром (см. [29]). Последнее можно решать методом последовательных приближений. Таким образом, функция  $\hat{q}_n(r)$  однозначно определяется функцией  $h_n(r)$  на любом отрезке  $[t_0, r_0]$  при любом  $n \in \mathbb{Z}$ . В силу произвольности  $t_0 \in (0, r_0)$  все  $\hat{q}_n(r)$  однозначно определяются при любых  $r \in [0, r_0]$ . Поэтому функция  $q(x, y)$  однозначно определяется заданной функцией  $h(x, y)$ .  $\square$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М.М., Романов В.Г. О трёх линеаризованных обратных задачах для гиперболических уравнений // Докл. АН СССР. 1966. Т. 171, № 6. С. 1279–1281.
2. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Васильев В.Г. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1969.
3. Романов В.Г. Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа. Новосибирск: Наука, 1972.
4. Романов В.Г. Обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск: изд. Новосиб. гос. ун-та, 1973.
5. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики. М.: Наука, 1980.
6. Романов В.Г. О восстановлении функции через интегралы по семейству кривых // Сиб. мат. журн. 1967. Т. 8, № 5. С. 1206–1208.
7. Романов В.Г. О восстановлении функции через интегралы по эллипсоидам вращения, у которых один фокус неподвижен // Докл. АН СССР. 1967. Т. 173, № 5. С. 766–769.
8. Мухометов Р.Г. Задача восстановления двумерной метрики и интегральная геометрия // Докл. АН СССР. 1977. Т. 232, № 1. С. 32–35.



9. Романов В.Г. Интегральная геометрия на геодезических изотропной римановой метрики // Докл. АН СССР. 1978. Т. 241, № 2. С. 290–293.
10. Мухометов Р.Г., Романов В.Г. К задаче восстановления изотропной римановой метрики в  $n$ -мерном пространстве // Докл. АН СССР. 1978. Т. 243, № 1. С. 41–44.
11. Бернштейн И. Н., Гервер М. Л. О задаче интегральной геометрии для семейства геодезических и обратной кинематической задачи сейсмологии // Докл. АН СССР. 1978. Т. 243, № 2, С. 302–305.
12. Романов В.Г. Устойчивость в обратных задачах. М.: Научный мир, 2005.
13. Klibanov M.V., Romanov V.G. Explicit formula for the solution of the phaseless inverse scattering problem of imaging of nano structures // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2015. V. 23, N 2. P. 187–193.
14. Klibanov M. V., Romanov V. G. Explicit solution of 3-D phaseless inverse scattering problems for the Schrodinger equation: the plane wave case // Eurasian J. Math. Comput. Appl. 2015. V. 3, N 1. P. 48–63.
15. Klibanov M.V., Romanov V.G. The first solution of a long standing problem: Reconstruction formula for a 3-d phaseless inverse scattering problem for the Schrodinger equation // J. Inverse Ill-Posed Probl., 2015. V. 23, N 4. P. 415–428.
16. Romanov V.G. Some geometric aspects in inverse problems // Eurasian J. Math. Comput. Appl. 2015. V. 3, N 4. P. 68–84.
17. Klibanov M.V., Romanov V.G. Two reconstruction procedures for a 3D phaseless inverse scattering problem for the generalized Helmholtz equation // Inverse Problems. 2016. V. 32, N 2, 015005.
18. Klibanov M.V., Romanov V.G. Reconstruction procedures for two inverse scattering problem without the phase information // SIAM J. Appl. Math. 2015. V. 76, N 1. P. 178–196.
19. Klibanov M.V., Romanov V.G. Uniqueness of a 3-D coefficient inverse scattering problem without the phase information // Inverse Problems. 2017. 095007.
20. Romanov V.G., Yamamoto M. Phaseless inverse problems with interference waves // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2018. V. 26, N 5. P. 681–688.
21. Romanov V.G. A problem of recovering a special two-dimension potential in a hyperbolic equation // Eurasian J. Math. Comput. Appl. 2016. V. 4, N 1. P. 32–46.
22. Романов В.Г. Обратные задачи без фазовой информации, использующие интерференцию волн // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 3. С. 626–638.
23. Романов В.Г. Задача об определении коэффициента диэлектрической проницаемости по модулю рассеянного электромагнитного поля // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 4. С. 916–924.
24. Романов В.Г. Определение диэлектрической проницаемости по модулю вектора электрической напряженности высокочастотного электромагнитного поля // Докл. АН. 2019. Т. 484, № 3. С. 269–272.
25. Романов В.Г. Обратная бесфазовая задача для уравнений электродинамики в анизотропной среде // Докл. АН. 2019. Т. 488, № 4. С. 367–371.
26. Дедок В.А., Карчевский А.Л., Романов В.Г. Численный метод определения диэлектрической проницаемости по модулю вектора электрической напряженности электромагнитного поля // Сиб. журн. индустр. математики. 2019. Т. 22, № 3. С. 48–58.
27. Романов В.Г. Обратная задача электродинамики для анизотропной среды. Линейное приближение // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2020. Т. 60, № 6. С. 134–141.
28. Романов В.Г. Задача об определении анизотропной проводимости в уравнениях электродинамики // Докл. АН. 2021. Т. 496, № 1. С. 53–55.
29. Мюнц Г. Интегральные уравнения. Ч. I. Л.; М.: Гостехиздат, 1934.

UDC 539.3:517.95

## AN INVERSE PROBLEM FOR A NONLINEAR WAVE EQUATION

© 2022 V. G. Romanov<sup>1a</sup>, T. V. Bugueva<sup>1,2b</sup>

<sup>1</sup>*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,  
pr. Acad. Koptiyuga 4, Novosibirsk 630090, Russia,*  
<sup>2</sup>*Novosibirsk State University, ul. Pirogova 1, Novosibirsk 630090, Russia*

E-mails: <sup>a</sup>romanov@math.nsc.ru, <sup>b</sup>bugueva@math.nsc.ru

Received 16.12.2021, revised 16.12.2021, accepted 13.01.2022

**Abstract.** The inverse problem of determining the coefficient under a nonlinear term of the equation, the main part of which is the wave operator, is considered. The properties of the solution of a direct problem are studied, in particular, the existence and uniqueness of a bounded solution in a neighborhood of a characteristic cone is established, and a structure of this solution is written out. The problem of finding an unknown coefficient is reduced to the problem of the integral geometry on a family of straight lines with a weight function that is invariant with respect to rotations around some fixed point. The uniqueness of the solution of the inverse problem is established and an algorithm of recovering the desired function is proposed.

**Keywords:** nonlinear wave equation, inverse problem, integral geometry.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.206

## REFERENCES

1. Lavrent'ev M.M., Romanov V.G. Three linearized inverse problems for hyperbolic equations. *Soviet Math. Dokl.*, 1966, Vol. 7, No. 6, pp. 1650–1652.
2. Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., Vasil'ev V.G. *Multidimensional Inverse Problems for Differential Equations*. Berlin: Springer-Verl., 1970 (Lecture Notes in Mathematics, Vol. 167).
3. Romanov V.G. *Integral Geometry and Inverse Problems for Hyperbolic Equations*. Berlin: Springer-Verl., 1974 (Springer Tracts in Natural Philosophy, Vol. 26)
4. Romanov V.G. Obratnye zadachi dlya differentsial'nykh uravnenii [Inverse problems for differential equations]. Novosibirsk: izd. Novosib. Gos. Un-ta, 1973 (in Russian).
5. Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., Shishatskii S.P. *Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis*. Providence: Amer. Math. Soc., Vol. 64, 1986.
6. Romanov V.G. Reconstructing a function by means of integrals along a family of curves. *Siber. Math. J.*, 1967, Vol. 7, No. 5, pp. 923–925.
7. Romanov V.G. The recovery of a function from its integrals over ellipsoids of revolution with one fixed focus. *Soviet Math. Dokl.*, 1967, Vol. 8, No. 2, pp. 480–483.
8. Mukhometov R.G. The reconstruction problem of a two-dimensional Riemannian metric and integral geometry. *Soviet Math. Dokl.*, 1977, Vol. 18, pp. 32–35.
9. Romanov V.G. Integral geometry on the geodesics of an isotropic Riemannian metric. *Soviet Math. Dokl.*, 1978, Vol. 18, No. 4, pp. 847–851.
10. Mukhometov R.G., Romanov V.G. On the problem of determining an isotropic Riemannian metric in n-dimensional space. *Soviet Math. Dokl.*, 1978, Vol. 19, No. 6, pp. 1330–1333.

11. Bernshtein I. N., Gerver M. L. O zadache integral'noi geometrii dlya semeistva geodezicheskikh i obratnoi kinematicheskoi zadachi seismiki [On a problem of integral geometry for a family of geodesics and an inverse kinematic problem of the seismics]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1978, Vol. 243, No. 2, pp. 302–305 (in Russian).
12. Romanov V.G. Ustoichivost' v obratnykh zadachakh [Stability in inverse problems]. Moscow: Nauchnyi Mir, 2005 (in Russian).
13. Klibanov M.V., Romanov V.G. Explicit formula for the solution of the phaseless inverse scattering problem of imaging of nano structures. *J. Inverse Ill-Posed Problems*, 2015, V. 23, N 2. P. 187–193.
14. Klibanov M. V., Romanov V. G. Explicit solution of 3-D phaseless inverse scattering problems for the Schrodinger equation: the plane wave case. *Eurasian J. Math. Comput. Appl.*, 2015, Vol. 3, No. 1, pp. 48–63.
15. Klibanov M.V., Romanov V.G. The first solution of a long standing problem: Reconstruction formula for a 3-d phaseless inverse scattering problem for the Schrodinger equation. *J. Inverse Ill-Posed Problems*, 2015, Vol. 23, No. 4, pp. 415–428.
16. Romanov V.G. Some geometric aspects in inverse problems. *Eurasian J. Math. Comput. Appl.*, 2015, Vol. 3, No. 4, pp. 68–84.
17. Klibanov M.V., Romanov V.G. Two reconstruction procedures for a 3D phaseless inverse scattering problem for the generalized Helmholtz equation. *Inverse Problems*, 2016, Vol. 32, No. 2, Article Num. 015005.
18. Klibanov M.V., Romanov V.G. Reconstruction procedures for two inverse scattering problem without the phase information. *SIAM J. Appl. Math.*, 2015, Vol. 76, No. 1, pp. 178–196.
19. Klibanov M.V., Romanov V.G. Uniqueness of a 3-D coefficient inverse scattering problem without the phase information. *Inverse Problems*, 2017, Article Num. 095007.
20. Romanov V.G., Yamamoto M. Phaseless inverse problems with interference waves. *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 2018, Vol. 26, No. 5, pp. 681–688.
21. Romanov V.G. A problem of recovering a special two-dimension potential in a hyperbolic equation // *Eurasian J. Math. Comput. Appl.* 2016. V. 4, N 1. P. 32–46.
22. Romanov V.G. Phaseless inverse problems that use wave interference. *Siber. Math. J.*, 2018, Vol. 59, pp. 494–504.
23. Romanov V.G. The problem of recovering the permittivity coefficient from the modulus of the scattered electromagnetic field. *Siber. Math. J.*, 2017, Vol. 58, pp. 711–717.
24. Romanov V.G. Determination of permittivity from the modulus of the electric strength of a high-frequency electromagnetic field. *Dokl. Mathematics*, 2019, Vol. 99, No. 1, pp. 44–47.
25. Romanov V.G. Inverse phaseless problem for the electrodynamic equations in an anisotropic medium. *Dokl. Mathematics*, 2019. Vol. 100. No. 2, pp. 495–500.
26. Dedok V.A., Karchevskii A.L., Romanov V.G. Numerical method of determining the permittivity from the modulus of the electric intensity vector of electromagnetic field. *J. Appl. Indust. Mathematics*, 2019. Vol. 13, No. 3, p. 435–446.
27. Romanov V.G. The inverse problem of electrodynamics for an anisotropic medium. Linear approximation. *J. Comput. Math. and Math. Phys.*, 2020, Vol. 60, No. 6, pp. 134–141.
28. Romanov V.G. Problem of determining the anisotropic conductivity in electromagnetic equations. *Dokl. Mathematics*, 2021, Vol. 103, No. 1, pp. 44–46.
29. Myuntts G. Integral'nye uravneniya [Integral equations. Part I]. Leningrad; Moscow: Gostekhizdat, 1934 (in Russian).