# СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ





**Журнал основан в 1998 году**
**Выходит 4 раза в год**

**Том 25, № 2(90)**

**Апрель – июнь, 2022 г.**


СОДЕРЖАНИЕ




НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ. 2022. Т. 25, № 2. С. 101–109

УДК 517.9

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ СИСТЕМЫ МОИСИЛА — ТЕОДОРЕСКУ

**© 2022 С. И. Сенашов[a], И. Л. Савостьянова[b]**

*Сибирский государственный университет науки и технологий им. М. Ф. Решетнева, просп. Красноярский рабочий, 31, г. Красноярск 660037, Россия*

E-mails: [a]sen@sibsau.ru, [b]ruppa@inbox.ru

Поступила в редакцию 26.12.2021 г.; после доработки 09.01.2022 г.; принята к публикации 13.01.2022 г.

Система Моисила — Теодореску является трёхмерным аналогом системы уравнений Коши — Римана и связана с пространственными статическими уравнениями Ламе. Исследованию этих уравнений посвящено много работ, в которых получены аналоги результатов, известных для уравнений Коши — Римана. Решения системы Моисила — Теодореску сохраняют многие свойства аналитических функций комплексного переменного. Построены некоторые точные решения этой системы и приведена бесконечная серия новых законов сохранения для уравнений системы Моисила — Теодореску. Эти законы линейны по производным. Построенные законы использованы для решения краевых задач системы Моисила — Теодореску.

**Ключевые слова:** законы сохранения, краевые задачи, система Моисила — Теодореску.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.207

## ВВЕДЕНИЕ

Система Моисила — Теодореску (СМТ) [1–3] является трехмерным аналогом системы Коши — Римана и связана с пространственными статическими уравнениями Ламе [1, 2]. Решения СМТ сохраняют многие свойства аналитических функций комплексного переменного. Изучение систем уравнений теории упругости с помощью симметрий и законов сохранения является по-прежнему перспективным способом исследования (см. [4–7] и цитируемую там литературу). Построение точных решений СМТ с помощью методов группового анализа начато в работе [1]. Симметрии позволяли строить новые классы точных решений, а законы сохранения — решать краевые задачи. Законы сохранения для дифференциальных уравнений известны более 100 лет и были введены Э. Нетер. Она связала их с точечными симметриями и ее методика позволяла строить законы сохранения только для дифференциальных уравнений, выводимых из вариационных принципов. Законы сохранения использовались «как для теоретического анализа свойств решений уравнений (априорные оценки, теоремы существования и единственности и т. п.), так и для получения физических величин, сохраняющихся с течением времени» [6]. Позднее была развита методика построения законов сохранения для любых систем дифференциальных уравнений [8]. На основе этого впервые были построены законы сохранения, позволяющие решать краевые задачи для двумерных уравнений пластичности [9, 10]. Дальнейшая работа показала, что законы сохранения могут быть эффективно использованы для решения двумерных упругопластических задач [11–13]. Результаты, полученные в этой статье, показывают, что законы сохранения можно эффективно использовать и для решения краевых задач для трехмерных уравнений. Построена бесконечная серия законов сохранения для уравнений СМТ и с их помощью решены краевые задачи для уравнений. Решения построены в виде квадратур по граничной поверхности. Статья продолжает серию работ, посвященных решению краевых задач с помощью законов сохранения; последние результаты и необходимые определения можно найти в работах [11–13].

Система Моисила — Теодореску имеет вид

$$\begin{aligned} F_1 &= \partial_x p + \partial_y w - \partial_z v = 0, \\ F_2 &= \partial_y p + \partial_x w - \partial_z u = 0, \\ F_3 &= \partial_z p + \partial_x v - \partial_y u = 0, \\ F_4 &= \partial_x u + \partial_y v + \partial_z w = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $p$, $u$, $v$, $w$ — искомые функции от $(x, y, z)$.

В операторном виде система уравнений (1) запишется в виде

$$L \begin{pmatrix} p \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x & 0 & -\partial_z & \partial_y \\ \partial_y & \partial_z & 0 & -\partial_x \\ \partial_z & -\partial_y & \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_x & \partial_y & \partial_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix} = 0. \tag{2}$$

**Определение.** Законом сохранения для системы уравнений (1) назовем выражение вида

$$\partial_x A + \partial_y B + \partial_z C = \omega_i F_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, \tag{3}$$

где $A$, $B$, $C$, $\omega_i$ — функции от $x$, $y$ ,$z$, $p$, $u$, $v$, $w$. Предполагается, что $\sum\limits_{i=1}^{4} \omega_i^2 \neq 0$. Функции $A$, $B$, $C$ называются сохраняющимся током. При выполнении этих условий закон сохранения (3) будет нетривиальным.

**Замечание 1.** Более общее определение закона сохранения можно найти в [11–13] и цитируемой там литературе. В данной работе законы сохранения будут пониматься согласно этому определению.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть для уравнений (1) поставлена следующая краевая задача:

$$\begin{aligned} p|_S = p_0(x, y, z), u|_S = u_0(x, y, z), \\ v|_S = v_0(x, y, z), w|_S = w_0(x, y, z), \end{aligned} \tag{4}$$

где $S$ — кусочно-гладкая поверхность, ограничивающая область $V$. Предполагается, что $S$ ориентирована с помощью внешней нормали к $V$. Требуется решить систему уравнений (1) с краевыми условиями (4). При этом функции $p$, $u$, $v$, $w$ и их частные производные первого порядка непрерывны на $S \cup V$.

Для решения задачи (1), (4) будут построены законы сохранения специального вида, которые позволят найти решение задачи (1), (4) в квадратурах.

Имеет место следующая лемма, которая потребуется в дальнейшем.

**Лемма.** *Решениями системы Моисила — Теодереску являются функции*

$$\begin{aligned} g_1 = (0, x/r^3, y/r^3, z/r^3), \quad g_2 = (x/r^3, 0, -z/r^3, y/r^3), \\ g_3 = (y/r^3, z/r^3, 0, -x/r^3), \quad g_4 = (z/r^3, -y/r^3, x/r^3, 0), \end{aligned} \tag{5}$$

*где* $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

**Доказательство.** Доказательство леммы осуществляется простой проверкой. Другие решения СМТ можно найти в [1]. □

**Замечание 2.** Поскольку СМТ инвариантна относительно операций трансляции

$$x' = x + x_0, \quad y' = y + y_0, \quad z' = z + z_0,$$

где $x_0$, $y_0$, $z_0$ — произвольные постоянные, то решениями СМТ являются также функции

$$\begin{aligned} g_1^0 &= \big(0, (x-x_0)/r_0^3, (y-y_0)/r_0^3, (z-z_0)/r_0^3\big),\\ g_2^0 &= \big((x-x_0)/r_0^3, 0, -(z-z_0)/r_0^3, (y-y_0)/r_0^3\big),\\ g_3^0 &= \big((y-y_0)/r_0^3, (z-z_0)/r_0^3, 0, -(x-x_0)/r_0^3\big),\\ g_4^0 &= \big((z-z_0)/r_0^3, -(y-y_0)/r_0^3, (x-x_0)/r_0^3, 0\big), \end{aligned} \tag{6}$$

где $r_0 = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$.

## 2. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМТ

Известно [13], что законы сохранения для линейных систем уравнения можно искать в виде

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma & \delta\end{pmatrix} L \begin{pmatrix}p\\ u\\ v\\ w\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}p & u & v & w\end{pmatrix} L^* \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\\ \delta\end{pmatrix} = \partial_x A + \partial_y B + \partial_z C, \tag{7}$$

где $L^*$ — матрица операторов, сопряжённая $L$.

Несложные вычисления показывают, что

$$A = (\alpha p - \beta w + \gamma v + \delta u), \quad B = (\alpha w + \beta p - \gamma u + \delta v), \quad C = (-\alpha v + \beta u + \gamma p + \delta w). \tag{8}$$

Проверим, что сохраняющийся ток (8) соответствует нетривиальному закону сохранения вида (5), предполагая, что $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ — функции только от $(x, y, z)$. Подставляя (8) в (5), имеем $\alpha = \omega_4$, $\beta = \omega_3$, $\gamma = \omega_1$, $\delta = \omega_2$, где $(\beta, \gamma, \delta, \alpha)$ — решение СМТ. Если решение СМТ $(\beta, \gamma, \delta, \alpha)$ не нулевое, то и сохраняющийся ток (8) соответствует нетривиальному закону сохранения.

**Замечание 3.** Тем самым показано, что СМТ допускает бесконечную серию законов сохранения. Можно найти и другие законы сохранения, но в этой работе они нам не потребуются.

## 3. РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ (6) С ПОМОЩЬЮ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ

Из (5), используя формулу Гаусса — Остроградского, получаем

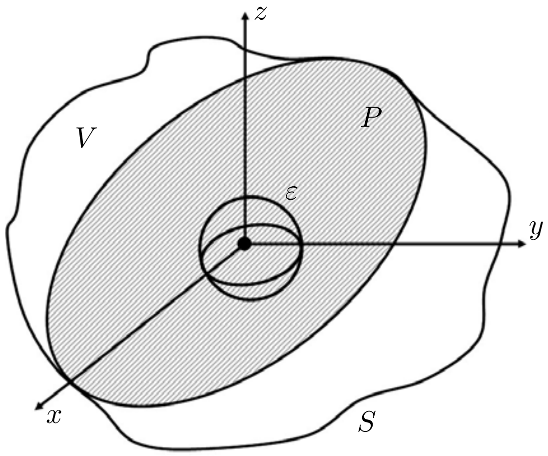
$$\begin{aligned} \iiint\limits_V (\partial_x A + \partial_y B + \partial_z C)\, dV &= \oint\!\!\!\oint\limits_S (A n_1 + B n_2 + C n_3)\, dS \\ &= \iint\limits_\Omega \left( A\frac{D(y,z)}{D(\lambda,\mu)} + B\frac{D(z,x)}{D(\lambda,\mu)} + C\frac{D(x,y)}{D(\lambda,\mu)}\right) d\lambda d\mu = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

где $n_1$, $n_2$, $n_3$ — компоненты вектора внешней нормали к поверхности $S$, которая задана параметрически с координатами, определяемыми функциями

$$x = \varphi(\lambda,\mu), \quad y = \psi(\lambda,\mu), \quad z = \chi(\lambda,\mu), \quad (\lambda,\mu) \in \Omega, \tag{10}$$

непрерывно дифференцируемыми в некоторой области параметров $(\lambda, \mu)$. При этом предполагаем также, что не все якобианы в правой части формулы (9) одновременно обращаются в нуль.

Пусть начало координат находится внутри области $V$. Опишем вокруг начала координат сферу радиуса $\varepsilon$: $x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$. Соединим поверхность сферы с поверхностью $S$ плоскостью $P$ (см. рисунок).




Поверхность $S$ с $\varepsilon$-сферой

Из формулы (9) получаем, в предположении, что компоненты сохраняющегося тока имеют особенность в начале координат:

$$\oiint\limits_S (An_1+Bn_2+Cn_3)\,dS + \oiint\limits_\varepsilon (An_1+Bn_2+Cn_3)\,dS + \iint\limits_{P^+} (An_1+Bn_2+Cn_3)\,dS + \iint\limits_{P^-} (An_1+Bn_2+Cn_3)\,dS = 0. \quad (11)$$

Поскольку интегралы по $P^+$ и $P^-$ вычисляются по разным сторонам плоскости $P$, то их сумма равна нулю. В результате имеем

$$\oiint\limits_S (An_1+Bn_2+Cn_3)\,dS + \oiint\limits_\varepsilon (An_1+Bn_2+Cn_3)\,dS = 0. \quad (12)$$

Рассмотрим решение СМТ в виде $g_1$ из (3):

$$\beta = 0, \quad \gamma = x/r^3, \quad \delta = y/r^3, \quad \alpha = z/r^3.$$

Подставив его в (8), вычислим интеграл по сфере $x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$ и получим

$$\oiint\limits_\varepsilon (An_1+Bn_2+Cn_3)\,dS = \iint\limits_\varepsilon \left(A\frac{D(y,z)}{D(\theta,\varphi)} + B\frac{D(z,x)}{D(\theta,\varphi)} + C\frac{D(x,y}{D(\theta,\varphi)}\right)d\theta d\varphi. \quad (13)$$

Здесь введены сферические координаты

$$x = r\cos\theta\cos\varphi, \quad y = r\cos\theta\sin\varphi, \quad z = r\sin\theta, \quad 0<\varphi<2\pi, \quad -\pi/2<\theta<\pi/2.$$

В сферических координатах сфера будет иметь уравнение $r^2 = \varepsilon^2$, переменные $\theta$, $\varphi$ будут параметрическими на ней. В результате получим

$$\frac{D(y,z)}{D(\theta,\varphi)} = -\varepsilon^2\cos^2\theta\cos\varphi, \quad \frac{D(z,x)}{D(\theta,\varphi)} = -\varepsilon^2\cos^2\theta\sin\varphi, \quad \frac{D(x,y)}{D(\theta,\varphi)} = -\varepsilon^2\cos\theta\sin\theta. \tag{14}$$

Пусть в (13) в соответствии с леммой $\beta = 0$, $\gamma = x/r^3$, $\delta = y/r^3$, $\alpha = z/r^3$. Тогда из (13) с учётом (14) получаем

$$\iint\limits_{\varepsilon} \left( A\frac{D(y,z)}{D(\theta,\varphi)} + B\frac{D(z,x)}{D(\theta,\varphi)} + C\frac{D(x,y)}{D(\theta,\varphi)} \right) d\theta d\varphi$$

$$= -\iint\limits_{\varepsilon} w(x,y,z)\cos\theta\, d\theta d\varphi = -\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} w\cos\theta\, d\theta = -4\pi w(0,0,0).$$

Здесь использована теорема о среднем и сделан предельный переход при $\varepsilon \to 0$.

Теперь из формулы (12) получаем

$$\oiint\limits_S (An_1 + Bn_2 + Cn_3)\, dS = 4\pi w(0,0,0), \tag{15}$$

где

$$\beta = 0, \quad \gamma = x/r^3, \quad \delta = y/r^3, \quad \alpha = z/r^3,$$
$$A = \alpha u_0 + \beta v_0 + \gamma w_0 + \delta p_0, \quad B = -\beta u_0 + \alpha v_0 + \delta w_0 - \gamma p_0, \quad C = -\gamma u_0 - \gamma v_0 + \alpha w_0 + \beta p_0.$$

Функции $u_0$, $v_0$, $w_0$, $p_0$ заданы на поверхности $S$.

Учитывая замечание к лемме, соотношение (15) можно записать в виде

$$\oiint\limits_S (An_1 + Bn_2 + Cn_3)\, dS = 4\pi w(x_0,y_0,z_0), \tag{16}$$

где

$$\beta = 0, \quad \gamma = (x-x_0)/r_0^3, \quad \delta = (y-y_0)/{r_0}^3, \quad \alpha = (z-z_0)/{r_0}^3,$$
$$A = \alpha u_0 + \beta v_0 + \gamma w_0 + \delta p_0, \quad B = -\beta u_0 + \alpha v_0 + \delta w_0 - \gamma p_0, \quad C = -\gamma u_0 - \gamma v_0 + \alpha w_0 + \beta p_0.$$

Функции $u_0$, $v_0$ ,$w_0$, $p_0$ заданы на поверхности $S$.

Рассмотрим решение СМТ в виде $g_2$ из (3):

$$\gamma = 0, \quad \beta = x/r^3, \quad \alpha = y/r^3, \quad \delta = -z/r^3.$$

Из (12) получаем

$$\oiint\limits_S (An_1 + Bn_2 + Cn_3)\, dS = 4\pi u(0,0,0), \tag{17}$$

где

$$\gamma = 0, \quad \beta = x/r^3, \quad \alpha = y/r^3, \quad \delta = -z/r^3,$$
$$A = \alpha u_0 + \beta v_0 + \gamma w_0 + \delta p_0, \quad B = -\beta u_0 + \alpha v_0 + \delta w_0 - \gamma p_0, \quad C = -\gamma u_0 - \gamma v_0 + \alpha w_0 + \beta p_0.$$

Здесь использована теорема о среднем и сделан предельный переход при $\varepsilon \to 0$. Функции $u_0$, $v_0$, $w_0$, $p_0$ заданы на поверхности $S$.

Учитывая замечание к лемме, соотношение (17) можно записать в виде

$$\oiint\limits_S (An_1 + Bn_2 + Cn_3)\,dS = 4\pi u(x_0, y_0, z_0), \tag{18}$$

где

$$\gamma = 0, \quad \beta = (x - x_0)/r_0^3, \quad \alpha = (y - y_0)/{r_0}^3, \quad \delta = -(z - z_0)/{r_0}^3,$$
$$A = \alpha u_0 + \beta v_0 + \gamma w_0 + \delta p_0, \quad B = -\beta u_0 + \alpha v_0 + \delta w_0 - \gamma p_0, \quad C = -\gamma u_0 - \gamma v_0 + \alpha w_0 + \beta p_0.$$

Функции $u_0$, $v_0$, $w_0$, $p_0$ заданы на поверхности $S$.

Рассмотрим решение СМТ из (3) в виде

$$\delta = 0, \quad \alpha = -x/r^3, \quad \beta = y/r^3, \quad \gamma = z/r^3.$$

Аналогично предыдущему получаем

$$\oiint\limits_S (An_1 + Bn_2 + Cn_3)\,dS = 4\pi v(x_0, y_0, z_0), \tag{19}$$

где

$$\delta = 0, \quad \alpha = -(x - x_0)/r_0^3, \quad \beta = (y - y_0)/{r_0}^3, \quad \gamma = (z - z_0)/{r_0}^3,$$
$$A = \alpha u_0 + \beta v_0 + \gamma w_0 + \delta p_0, \quad B = -\beta u_0 + \alpha v_0 + \delta w_0 - \gamma p_0, \quad C = -\gamma u_0 - \gamma v_0 + \alpha w_0 + \beta p_0.$$

Функции $u_0$, $v_0$, $w_0$, $p_0$ заданы на поверхности $S$.

Рассмотрим решение СМТ в виде $g_4$:

$$\alpha = 0, \quad \delta = x/r^3, \quad \gamma = -y/r^3, \quad \beta = z/r^3.$$

Аналогично предыдущему получаем

$$\oiint\limits_S (An_1 + Bn_2 + Cn_3)\,dS = 4\pi p(x_0, y_0, z_0), \tag{20}$$

где

$$\alpha = 0, \quad \delta = (x - x_0)/r_0^3, \quad \gamma = -(y - y_0)/{r_0}^3, \beta = (z - z_0)/{r_0}^3,$$
$$A = \alpha u_0 + \beta v_0 + \gamma w_0 + \delta p_0, \quad B = -\beta u_0 + \alpha v_0 + \delta w_0 - \gamma p_0, \quad C = -\gamma u_0 - \gamma v_0 + \alpha w_0 + \beta p_0.$$

Функции $u_0$, $v_0$, $w_0$, $p_0$ заданы на поверхности $S$.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построена бесконечная серия законов сохранения. Эти законы позволили решить краевую задачу (8) для уравнений СМТ. Решения даны формулами (15), (18)–(20). Показано, что для решения краевой задачи достаточно вычислить поверхностные интегралы по граничной поверхности. Работа продолжает цикл статей, посвящённых решению краевых задач с помощью законов сохранения.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Григорьев Ю.М.* Некоторые решения пространственных статических уравнений Ламе // Мат. проблемы механики сплошных сред. 1984. Вып. 67. С. 29–36.
2. *Moisil G.G., Theodorescu N.* Fonctions holomorphes dans l'tspase // Mathematica. 1931. V. 5. P. 141–153.
3. *Бицадзе А.В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений вторго порядка. М.: Наука, 1966.
4. *Аннин Б.Д., Бондарь В.Д., Сенашов С.И.* Групповой анализ и точные решения уравнений плоской деформации несжимаемого нелинейного материала // Сиб. журн. индустр. математики. 2020. Т. 23, № 1. С. 11–15.
5. *Сенашов С.И., Савостьянова И.Л.* Об упругом кручении вокруг трёх осей // Сиб. журн. индустр. математики. 2021. Т. 24, № 1. С. 120–125.
6. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
7. *Ибрагимов Н.Х.* Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.
8. *Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В.* Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1986.
9. *Сенашов С.И.* О законах сохранения уравнений пластичности // Докл. АН СССР. 1991. Т. 320. № 3. С. 606.
10. *Сенашов С.И.* Законы сохранения и точное решение задачи Коши для уравнений пластичности // Докл. АН. 1995. Т. 345, № 5. С. 619.
11. *Senashov S.I., Gomonova O.V.* Construction of elastoplastic boundary in problem of tension of a plate weakened by holes // J. Nonlinear Mech. 2019. V. 108. P. 7–10.
12. *Gomonova O.V., Senashov S.I.* Determination of elastic and plastic deformation regions in the problem of uniaxial tension of a plate weakened by holes // J. Appl. Mech. Tech. Physics. 2021. V. 62, N 1. P. 179—186.
13. *Киряков П.П., Сенашов С.И., Яхно А.Н.* Приложение симметрий и законов сохранеия к решению дифференциальных уравнений. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2001.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 517.9

# THE USE OF CONSERVATION LAWS FOR SOLVING BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF THE MOISILA—TEODORESCU SYSTEM]

**© 2022 S. I. Senashov[a], I. L. Savostyanova[b]**

*Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, pr. Krasnoyarskiy rabochiy 31, Krasnoyarsk 660037, Russia*

E-mails: [a]sen@sibsau.ru, [b]ruppa@inbox.ru

Received 26.12.2021, revised 09.01.2022, accepted 13.01.2022

**Abstract.** The Moisil—Teodorescu system is a three-dimensional analogue of the Cauchy—Riemann system of equations and is related to the spatial static Lame equations. Many works have investigated these equations. Analogs of many results known for the Cauchy—Riemann equations in these papers are obtained. Solutions of the Moisila—Teodorescu system preserve many properties of analytical functions of a complex variable. In our work, some exact solutions of this system are constructed and an infinite series of new conservation laws for the equations of the Moisil—Teodorescu system is given. These laws are linear in derivatives. We have constructed the laws used to solve the boundary value problems of the Moisila—Teodorescu system.

**Keywords:** conservation laws, boundary value problems, the Moisil—Teodorescu system.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.207

## REFERENCES

1. Grigoriev Yu.M. Nekotorye resheniya prostranstvennykh staticheskikh uravnenii Lame [Some solutions of spatial static Lame equations]. *Math. Probl. Continuum Mech.*, 1984, Vol. 67, pp. 29–36 (in Russian).
2. Moisil G.G., Theodorescu N. Fonctions holomorphes dan's l'tspase. *Mathematica*, Vol. 5, pp. 141–153.
3. Bitsadze A.V. Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh uravnenii vtorogo poryadka [Boundary value problems for elliptic equations of the second order]. Moscow: Nauka, 1966 (in Russian).
4. Annin B.D., Bondar V.D., Senashov S.I. Gruppovoi analiz i tochnye resheniya uravnenii ploskoi deformatsii neszhimaemogo nelineinogo materiala [Group analysis and exact solutions of equations of plane deformation of incompressible nonlinear material]. *Sib. J. Indust. Mathematics*, 2020, Vol. 23, No. 1, pp. 11–15 (in Russian).
5. Senashov S.I., Savostyanova I.L. Ob uprugom kruchenii vokrug trekh osei [On elastic torsion around three axes]. *Sib. J. Indust. Mathematics*, 2021, Vol. 24, No. 1. pp. 120–125 (in Russian).
6. Ovsyannikov L.V. Gruppovoi analiz differentsial'nykh uravnenii [Group analysis of differential equations]. Moscow: Nauka, 1978 (in Russian).
7. Ibragimov N.H. Gruppy preobrazovanii v matematicheskoi fizike [Transformation groups in mathematical physics]. Moscow: Nauka, 1983 (in Russian).
8. Senashov S.I., Gomonova O.V. Construction of elastoplastic boundary in problem of tension of a plate weakened by holes. *Int. J. Nonlinear Mech.*, 2019, Vol. 108, pp. 7–10.
9. Gomonova O.V., Senashov S.I. Determination of elastic and plastic deformation regions in the problem of uniaxial tension of a plate weakened by holes. *J. Appl. Mech. Techn. Phys.*, 2021, Vol. 62, No. 1, pp. 179—186.

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2022, Vol. 16, No. 2.

10. Kiryakov P.P., Senashov S.I., Yakhno A.N. Zakony sokhraneniya i tochnoe reshenie zadachi Koshi dlya uravnenii plastichnosti [Application of symmetries and conservation laws to the solution of differential equations]. Novosibirsk: Publ. SB RAS, 2001 (in Russian).

11. Senashov S.I., Gomonova O.V. Construction of elastoplastic boundary in problem of tension of a plate weakened by holes. *Int. J. Nonlinear Mech.*, 2019, Vol. 108, pp. 7–10.

12. Gomonova O.V., Senashov S.I. Determination of elastic and plastic deformation regions in the problem of uniaxial tension of a plate weakened by holes. *J. Appl. Mech. Tech. Physics*, 2021, Vol. 62, No. 1, pp. 179—186.

13. Kiryakov P.P., Senashov S.I., Yakhno A.N. Prilozhenie simmetrii i zakonov sokhraneiya k resheniyu differentsial'nykh uravnenii [Application of symmetries and conservation laws to the solution of differential equations]. Novosibirsk: Publ. SB RAS, 2001 (in Russian).