



# СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор	В. Л. Береснев
Зам. главного редактора	А. Л. Карчевский
Отв. секретарь	В. А. Дедок

Журнал основан в 1998 году  
Выходит 4 раза в год  
**Том 25, №3(91)**  
Июль - сентябрь 2022 г.

## ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ

Г. В. Алексеев	С. Б. Медведев
Б. Д. Аннин	Р. Г. Новиков
В. С. Белоносов	Д. Е. Пальчунов
В. Н. Белых	П. И. Плотников
Ю. С. Волков	В. Г. Романов
В. П. Ильин	Е. М. Рудой
С. И. Кабанихин	В. М. Садовский
А. Н. Карапетянц	Д. И. Свириденко
М. В. Клибанов	А. С. Терсенов
С. С. Кутателадзе	В. С. Тимофеев
В. А. Левин	В. В. Шайдуров
Н. И. Макаренко	

## СОДЕРЖАНИЕ

- Данилин А. Р., Шабуров А. А. Асимптотическое разложение решения задачи оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества и дешёвым управлением ..... 5
- Дурдиев Д. К., Меражова Ш. Б. Обратная задача для двумерного уравнения смешанного парабола-гиперболического типа в цилиндрической области ..... 14
- Иванов В. В.** Притягивающий предельный цикл модели нечётномерной кольцевой генной сети ..... 25
- Имомназаров Б. Х., Имомназаров Ш. Х., Маматкулов М. М., Худайназаров Б. Б. Фундаментальное решение для стационарного уравнения двухскоростной гидродинамики с равновесием фаз по давлению в диссипативном приближении ..... 33
- Ковалёв М. Д. О геометрическом определении шарнирного механизма, теореме Кемпе и перезрелой математике ..... 41
- Куликов И. М., Черных И. Г., Ульяничев И. С., Тутуков А. В. Математическое моделирование ядерного горения углерода в белых карликах с использованием 7-изотопной сети реакций ..... 55
- Купцова Е. В. Осциллятор Ван дер Поля под действием случайного шума ..... 67
- Лазарева Г. Г., Максимова А. Г. Численное моделирование распространения паров вольфрама над нагреваемой поверхностью ..... 81
- Мамажонов М., Шерматова Х. М. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка парабола-гиперболического типа в треугольной области с тремя линиями изменения типа уравнения ..... 93
- Минаков А. В., Лобасов А. С., Шебелев А. В., Зайцев Д. В., Кабов О. А. Режимы течения плёнки жидкости, увлекаемой потоком газа в плоском горизонтальном канале, в изотермических условиях ..... 104
- Митрофанов Г. М., Карчевский А. Л. Математическое моделирование для тонко-слоистых упругих сред в сейсморазведке ..... 120
- Перцев Н. В., Топчий В. А., Логинов К. К. Численное стохастическое моделирование динамики взаимодействующих популяций ..... 135
- Романов В. Г., Бугуева Т. В. Задача об определении коэффициента при нелинейном члене квазилинейного волнового уравнения ..... 154
- Старовойтов В. Н., Старовойтова Б. Н. Усреднённая математическая модель периодической упругой структуры, насыщенной жидкостью Максвелла ..... 170

НОВОСИБИРСК

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

УДК 517.977

## АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ВЫПУКЛЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА И ДЕШЁВЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

© 2022 А. Р. Данилин<sup>a</sup>, А. А. Шабуров<sup>b</sup>

*Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,  
ул. С. Ковалевской, 16, г. Екатеринбург 620000, Россия*

E-mails: <sup>a</sup>dar@imm.uran.ru, <sup>b</sup>alexandershaburov@mail.ru

Поступила в редакцию 28.08.2021 г.; после доработки 18.01.2022 г.;  
принята к публикации 22.06.2022 г.

Рассматривается задача оптимального управления для линейной системы с постоянными коэффициентами с интегральным выпуклым критерием качества, содержащим малый параметр при интегральном слагаемом, в классе кусочно-непрерывных управлений с гладкими геометрическими ограничениями. Такие задачи называются задачами с дешёвым управлением. Показано, что предельной будет задача с терминальным критерием качества. На примере задачи управления точкой на плоскости без сопротивления показано, что решение задачи с дешёвым управлением ведёт себя более регулярно, чем задача быстрогодействия, в случае, когда оптимальное управление в предельной задаче имеет разрыв, а в исходной задаче непрерывно. Показано, что определяющий вектор в задаче управления точкой на плоскости раскладывается в ряд по вторым степеням малого параметра.

**Ключевые слова:** оптимальное управление, дешёвые управления, асимптотические разложения, малый параметр.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.301

*Посвящается Ильину Арлену Михайловичу*

### ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается задача оптимального управления [1–3] для линейной системы с постоянными коэффициентами в классе кусочно-непрерывных управлений с гладкими геометрическими ограничениями. Критерий качества содержит терминальное слагаемое, зависящее от медленных переменных, а интегральное слагаемое содержит малый множитель перед управлением.

Среди работ, посвящённых сингулярно возмущённым задачам управления, такие задачи называются задачами с дешёвым управлением (см., например, обзор [4]), поскольку характеризуются близостью к вырожденной задаче в смысле принципа максимума Понтрягина. Но в опубликованных работах (см., например, [5, 6]) при рассмотрении линейно-квадратичных задач с дешёвым управлением строится асимптотика решения только при условии отсутствия ограничений на оптимальное управление.

При стремлении малого параметра к нулю исходная задача с дешёвым управлением сводится к задаче оптимального управления с терминальным критерием качества. Отметим, что в предельной задаче оптимальное управление может иметь разрывы, в то время как у исходной задачи оптимальное управление непрерывно во всех точках. Асимптотика оптимального управления находится через построение асимптотики определяющего вектора. Для задач

быстродействия в такой ситуации возможно появление сложных асимптотических разложений (см., например, [7, 8]). Однако в задаче с дешёвым управлением и управляемой системой (как в [7]) определяющий вектор более регулярно зависит от малого параметра. В данной статье рассматривается линейная система из работы [9], описывающей задачу управления движением материальной точки в среде без сопротивления, но с малым параметром в качестве множителя при интегральном слагаемом в критерии качества и без возмущения начальных данных. Этот вектор раскладывается в асимптотический ряд по вторым степеням малого параметра.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления в классе кусочно-непрерывных управлений:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad t \in [0, T], \quad \|u\| \leq 1, \quad x(0) = x^0, \quad (1)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $A$ ,  $B$  — постоянные матрицы соответствующей размерности с интегральным выпуклым критерием качества:

$$J_\varepsilon(u) := \varphi(x(T, u)) + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^T \|u(t)\|^2 dt \rightarrow \min, \quad (2)$$

где

$$\varphi(x) := \|x\|^2/2, \quad \nabla\varphi(x) = x, \quad (3)$$

а  $x(T, u)$  — состояние управляемой системы (1) в момент времени  $T$  при управлении  $u$ .

Предполагается, что система (1) вполне управляема.

Тогда, в силу принципа максимума, аналогично тому, как это сделано в [10, утверждение 1 и формулы (2.4), (2.5)], получим, что оптимальное управление  $u_\varepsilon(t)$  в задаче (1), (2) имеет вид

$$u_\varepsilon(T-t) = \frac{C^*(t)l_\varepsilon}{S_\varepsilon(\|C^*(t)l_\varepsilon\|)}, \quad S_\varepsilon(\xi) := \begin{cases} \varepsilon, & 0 \leq \xi \leq \varepsilon, \\ \xi, & \xi > \varepsilon, \end{cases}$$

где  $C(t) := e^{At}B$ , а вектор  $l_\varepsilon$  — единственное решение уравнения

$$-l = \nabla\varphi(x(T, u_\varepsilon)) = \nabla\varphi\left(e^{AT}x_0 + \int_0^T \frac{C(t)C^*(t)l}{S_\varepsilon(\|C^*(t)l\|)} dt\right). \quad (4)$$

Таким образом, с учётом (3) уравнение (4) имеет вид

$$-l_\varepsilon = e^{AT}x_0 + \int_0^T \frac{C(t)C^*(t)l_\varepsilon}{S_\varepsilon(\|C^*(t)l_\varepsilon\|)} dt. \quad (5)$$

Отметим, что при всех  $l_\varepsilon$  и  $t \in [0, T]$  имеем

$$\left\| \frac{C^*(t)l_\varepsilon}{S_\varepsilon(\|C^*(t)l_\varepsilon\|)} \right\| \leq 1. \quad (6)$$

Вектор  $l_\varepsilon$  (решение уравнения (5)) назовём определяющим вектором в задаче (1), (2).

Наряду с задачей (1), (2) рассмотрим следующую задачу оптимального терминального управления:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad t \in [0, T], \quad \|u\| \leq 1, \quad x(0) = x^0, \quad J_0(u) := \varphi(x(T, u)) \rightarrow \min. \quad (7)$$

Здесь  $\varphi$  и  $x^0$  те же, что и в задаче (1), (2).

В силу принципа максимума (см., например, [11, п. 6.1.3])  $l_0$  (значение сопряжённой переменной в момент времени  $T$ ) удовлетворяет равенству

$$-l_0 = \nabla \varphi(x(T, u_0)) = x(T, u_0), \quad (8)$$

где  $u_0$  — оптимальное управление в задаче (7). При этом если  $l_0 \neq 0$ , то единственное оптимальное управление  $u_0$  задаётся равенством  $u_0(T-t) = C^*(t)l_0/\|C^*(t)l_0\|$ , а вектор  $l_0$  в силу (8) есть единственное решение уравнения

$$-l_0 = e^{AT}x_0 + \int_0^T \frac{C(t)C^*(t)l_0}{\|C^*(t)l_0\|} dt. \quad (9)$$

Отметим, что  $l_0 = 0$  тогда и только тогда, когда в задаче (7) ограничения на управление не по существу. В этом случае оптимальное управление, вообще говоря, не единственно.

В случае  $l_0 \neq 0$  вектор  $l_0$  естественно назвать определяющим вектором в задаче (7).

**Теорема 1.** Пусть  $u_\varepsilon$  — оптимальное управление в задаче (1), (2), а  $u_0$  — оптимальное управление в задаче (7). Тогда  $J_\varepsilon(u_\varepsilon) \rightarrow J_0(u_0)$  при  $\varepsilon \rightarrow +0$  и тем самым  $l_\varepsilon \rightarrow l_0$  при  $\varepsilon \rightarrow +0$ , где  $l_0$  удовлетворяет равенству (8).

**Доказательство.** В силу определения  $u_\varepsilon$  и  $u_0$  справедливо неравенство

$$J_0(u_0) = \varphi(x(T, u_0)) \leq \varphi(x(T, u_\varepsilon)) \leq J_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq J_\varepsilon(u_0).$$

Переходя в неравенстве к пределу при  $\varepsilon \rightarrow +0$  и учитывая (2), получим  $J_\varepsilon(u_\varepsilon) \rightarrow J_0(u_0)$  и тем самым

$$\varphi(x(T, u_\varepsilon)) \rightarrow \varphi(x(T, u_0)) = \min_{x \in \Xi_0} \varphi(x). \quad (10)$$

Отметим, что  $x(T, u_0)$  — точка минимума непрерывной функции  $\varphi$  на компактном выпуклом множестве  $\Xi_0$ , множестве достижимости управляемой системы (1) (см. например, [3, теорема 1, гл. 2, разд. 2.2]). В силу строгой выпуклости функции  $\varphi$  эта точка минимума единственная. Так как  $\varphi$  непрерывна, то из (10) следует, что все частичные пределы  $x(T, u_\varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  есть тоже точки минимума  $\varphi$  на множестве  $\Xi_0$ . Тем самым они все совпадают с  $x(T, u_0)$  и поэтому при  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$x(T, u_\varepsilon) \rightarrow x(T, u_0), \quad -l_\varepsilon = \nabla \varphi(x(T, u_\varepsilon)) \rightarrow \nabla \varphi(x(T, u_0)) = -l_0.$$

□

Отметим, что доказанная теорема справедлива для любой строго выпуклой и дифференцируемой на  $\mathbb{R}^n$  функции  $\varphi$ .

**Следствие.** Если  $\|C^*(t)l_0\| \neq 0$  при всех  $t \in [0, T]$ , то  $l_\varepsilon = l_0$  при всех достаточно малых  $\varepsilon > 0$ .

**Доказательство.** В этом случае в силу непрерывности  $C^*(t)$  найдётся такое  $\gamma > 0$ , что  $\|C^*(t)l_0\| \geq \gamma$  при всех  $t \in [0, T]$ . Поэтому  $S_\varepsilon(\|C^*(t)l_0\|) = \|C^*(t)l_0\|$  при  $\varepsilon < \gamma$  и уравнение (5) совпадёт с уравнением (9), что в силу единственности их решений даёт  $l_\varepsilon = l_0$ . При этом  $J_\varepsilon(u_\varepsilon) = J_0(u_0) + T\varepsilon/2$  при таких  $\varepsilon$ . □

В дальнейшем считаем, что  $x^0$  удовлетворяет условию: ограничения на управление в задаче (7) по существу, т. е. точка глобального минимума функции  $\varphi$  не лежит в множестве достижимости системы (1) на  $[0, T]$ .

Отметим, что если  $\|C^*(t_0)l_0\| = 0$  при  $t_0 \in (0, T)$ , то оптимальное управление в предельной задаче (7) терпит разрыв в точке  $t_0$ , в то время как оптимальное управление в задаче (1), (2)

непрерывно при всех  $t \in [0, T]$ . Такая ситуация для задачи быстрогодействия приводит к сложной асимптотике определяющего вектора [7, 8]. Рассматриваемая задача (1), (2) более регулярна, и для управляемой системы из [7] асимптотика определяющего вектора  $l_\varepsilon$  при  $\varepsilon \rightarrow +0$  имеет степенной характер.

Следующая часть работы посвящена доказательству этого факта.

## 2. УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМОЙ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК В СРЕДЕ БЕЗ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Рассмотрим задачу (1), (2) при следующих условиях:

$$n = 2k, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}. \quad (11)$$

В этом случае

$$e^{At} = \begin{pmatrix} I & tI \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad C(t) := e^{At}B = \begin{pmatrix} tI \\ I \end{pmatrix}, \quad C^*(t)l = tl_1 + l_2, \quad l = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}, \quad l_1, l_2 \in \mathbb{R}^k. \quad (12)$$

Уравнение для определяющего вектора  $l$  (для сокращения записи зависимость от малого параметра  $\varepsilon$  будем опускать) в силу (12) принимает вид

$$\begin{aligned} -l_1 &= x_1^0 + Tx_2^0 + \int_0^T \frac{t(tl_1 + l_2)}{S_\varepsilon(\|tl_1 + l_2\|)} dt, \\ -l_2 &= x_2^0 + \int_0^T \frac{(tl_1 + l_2)}{S_\varepsilon(\|tl_1 + l_2\|)} dt, \end{aligned} \quad (13)$$

а для определяющего вектора  $l_0$  предельной задачи имеем

$$\begin{aligned} -l_{0,1} &= x_1^0 + Tx_2^0 + \int_0^T \frac{t(tl_{0,1} + l_{0,2})}{\|tl_{0,1} + l_{0,2}\|} dt, \\ -l_{0,2} &= x_2^0 + \int_0^T \frac{(tl_{0,1} + l_{0,2})}{\|tl_{0,1} + l_{0,2}\|} dt. \end{aligned} \quad (14)$$

Пусть  $t_0 l_{0,1} + l_{0,2} = 0$  при  $t_0 \in (0, T)$ . Не ограничивая общности (сделав замену времени  $t = t_0 \tau$  и переменных  $x_1(t) = t_0^2 X_1(\tau)$ ,  $x_2(t) = t_0 X_2(\tau)$ ), получим для  $X_1, X_2$  ту же задачу с заменой  $\varepsilon$  на  $\varepsilon_1 := t_0 \varepsilon$ , можно считать, что  $t_0 = 1$ .

Итак, по предположению

$$l_{0,1} + l_{0,2} = 0, \quad T > 1. \quad (15)$$

Тогда  $tl_{0,1} + l_{0,2} = (t - 1)l_{0,1} + (l_{0,1} + l_{0,2})$ . Введём новые векторы

$$r_1 := l_1, \quad r_2 := l_1 + l_2, \quad r_{0,1} := l_{0,1}, \quad r_{0,2} := l_{0,1} + l_{0,2}. \quad (16)$$

В силу (16) и теоремы 1 получим

$$l_1 = r_1, \quad l_2 = r_2 - r_1, \quad l_{0,1} = r_{0,1}, \quad l_{0,2} = r_{0,2} - r_{0,1}, \quad r_{0,2} = 0, \quad r_i \rightarrow r_{0,i}, \quad \varepsilon \rightarrow +0. \quad (17)$$

Возьмём вектор  $r_{0,1}/\|r_{0,1}\|$  в качестве первого базисного. Тогда вектор  $r_{0,1}$  в этом базисе будет иметь следующие координаты:  $r_{0,1} = \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix}$ , здесь  $\beta > 0$ ,  $\mathbf{0}$  — нуль-вектор в пространстве  $\mathbb{R}^{k-1}$ .

Сделав в интегралах, входящих в (13) и (14), замену  $\tau = t - 1$  и обозначив  $T_1 := T - 1$ , с учётом (17) получим системы уравнений для векторов  $r$  и  $r_0$ :

$$-r_1 = x_1^0 + T x_2^0 + \int_{-1}^{T_1} \frac{(\tau + 1)(\tau r_1 + r_2) d\tau}{S_\varepsilon(\|\tau r_1 + r_2\|)}, \quad (18)$$

$$r_1 - r_2 = x_2^0 + \int_{-1}^{T_1} \frac{(\tau r_1 + r_2) d\tau}{S_\varepsilon(\|\tau r_1 + r_2\|)};$$

$$-r_{0,1} = x_1^0 + T x_2^0 + \int_{-1}^{T_1} \frac{(\tau + 1)\tau r_{0,1} d\tau}{|\tau| \|r_{0,1}\|}, \quad (19)$$

$$r_{0,1} = x_2^0 + \int_{-1}^{T_1} \frac{\tau r_{0,1} dt}{|\tau| \|r_{0,1}\|}.$$

Из (19) следует параллельность векторов  $x_2^0$ ,  $r_{0,1}$ ,  $x_1^0$ . Тем самым

$$x_1^0 = \begin{pmatrix} x_{1,1}^0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2^0 = \begin{pmatrix} x_{2,1}^0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_{1,1}^0, x_{2,1}^0 \in \mathbb{R}, \quad (20)$$

а система (19) принимает вид

$$\begin{aligned} -\beta &= x_{1,1}^0 + T x_{2,1}^0 + \int_{-1}^{T_1} \frac{(\tau^2 + \tau) d\tau}{|\tau|}, \\ \beta &= x_2^0 + \int_{-1}^{T_1} \frac{\tau dt}{|\tau|}. \end{aligned} \quad (21)$$

Оказывается, что и у векторов  $r_1$  и  $r_2$  только первые координаты отличны от нуля и тем самым рассматриваемая задача (11) подобна одномерной ( $k = 1$ ).

Итак, будем искать решение системы (18) в виде

$$r_1 = \begin{pmatrix} \beta + \rho_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} \rho_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}, \quad \rho_1 = o(\varepsilon), \quad \rho_2 = o(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow +0.$$

В силу (20) система (18) примет вид

$$\begin{aligned} -\beta - \rho_1 &= x_{1,1}^0 + T x_{2,1}^0 + \int_{-1}^{T_1} \frac{(\tau + 1)(\tau(\beta + \rho_1) + \rho_2) d\tau}{S_\varepsilon(|\tau(\beta + \rho_1) + \rho_2|)} =: x_{1,1}^0 + T x_{2,1}^0 + I_1(\rho_1, \rho_2), \\ \beta + \rho_1 - \rho_2 &= x_{2,1}^0 + \int_{-1}^{T_1} \frac{(\tau(\beta + \rho_1) + \rho_2) d\tau}{S_\varepsilon(|\tau(\beta + \rho_1) + \rho_2|)} =: x_{2,1}^0 + I_2(\rho_1, \rho_2). \end{aligned} \quad (22)$$

Обозначим через  $\tau_1, \tau_2$  решения уравнения  $|\tau(\beta + \rho_1) + \rho_2| = \varepsilon$ . Тогда

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{-\rho_2 - \varepsilon}{\beta + \rho_1}, \quad \tau_2 = \frac{-\rho_2 + \varepsilon}{\beta + \rho_1}, \quad \tau_1 + \tau_2 = \frac{-2\rho_2}{\beta + \rho_1}, \quad \tau_2 - \tau_1 = \frac{2\varepsilon}{\beta + \rho_1}, \\ \tau_1^2 + \tau_2^2 &= \frac{2\rho_2^2 + 2\varepsilon^2}{(\beta + \rho_1)^2}, \quad \tau_2^2 - \tau_1^2 = \frac{(-4)\rho_2\varepsilon}{(\beta + \rho_1)^2}, \quad \tau_2^3 - \tau_1^3 = \frac{2\varepsilon^3 + 6\varepsilon\rho_2^2}{(\beta + \rho_1)^3}. \end{aligned} \quad (23)$$

Выразим интегралы  $I_i(\rho_1, \rho_2)$ ,  $i = 1, 2$ , через  $\rho_1$  и  $\rho_2$ .

Воспользовавшись формулами (23) и приведя подобные слагаемые в (22), получим

$$\begin{aligned} I_1(\rho_1, \rho_2) &= \frac{2T_1^2 + 4T_1 - 2}{4} + \frac{4\rho_2}{\beta + \rho_1} + \frac{2\beta\rho_2 - \varepsilon^2/3 - \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2}{(\beta + \rho_1)^2}, \\ I_2(\rho_1, \rho_2) &= T_1 - 1 + \frac{2\rho_2}{\beta + \rho_1}. \end{aligned}$$

Таким образом, с учётом (21) система (22) примет вид

$$\begin{aligned} -\rho_1 &= \frac{2}{\beta}\rho_2 - \frac{\varepsilon^2}{3\beta^2} + H_{1,2}(\rho_1, \rho_2, \varepsilon^2), \\ \rho_1 - \rho_2 &= \frac{2}{\beta}\rho_2 + H_{2,2}(\rho_1, \rho_2), \end{aligned} \quad (24)$$

где  $H_{i,2}$ ,  $i = 1, 2$ , — непрерывные функции своих аргументов, раскладывающиеся в степенные ряды при стремлении аргументов к нулю и начинающиеся со второго порядка малости.

Система (24) эквивалентна векторному уравнению

$$\rho = \varepsilon^2 f + H_2(\rho, \varepsilon^2), \quad (25)$$

где

$$\rho := \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix}, \quad f := \begin{pmatrix} \frac{\beta + 2}{3\beta^2(\beta + 4)} \\ 1 \\ \frac{1}{3\beta(\beta + 4)} \end{pmatrix},$$

а  $H: B[0, R] \rightarrow \mathbb{R}^n$  — непрерывная функция своих аргументов  $\rho \in \mathbb{R}^n$  и  $\mu \in \mathbb{R}$ , раскладывающаяся при  $\|\rho\| + |\varepsilon| \rightarrow 0$  в степенной асимптотический ряд  $H(\rho, \varepsilon^2) = \sum_{k=2}^{\infty} H_k(\rho, \varepsilon^2)$ , где

$H_k(\rho, \varepsilon^2)$  — однородные многочлены порядка  $k$  от  $\varepsilon^2$  и компонент вектора  $\rho$ . Здесь  $B[0, R]$  — замкнутый шар в  $\mathbb{R}^{n+1}$  с центром в нуле радиуса  $R$ .

В силу теоремы 1 и [13, теорема 3] при  $E_\alpha = (0, \varepsilon_0)$  уравнение (25) имеет единственное решение  $\rho(\varepsilon)$ , стремящееся к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , и это решение раскладывается в асимптотический ряд по степеням  $\varepsilon^2$ . Тем самым, доказана следующая

**Теорема 2.** Пусть выполнено условие (15). Тогда определяющий вектор  $l_\varepsilon$  в задаче (1), (2), (11) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  раскладывается в асимптотический ряд по степеням  $\varepsilon^2$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решение задачи оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества и дешёвым управлением, вообще говоря, более регулярно зависит от малого параметра в случае разрывного управления предельной задачи, чем задача быстрогодействия в такой же ситуации.

Заметим также, что линейная комбинация векторов  $r_1, r_2, r_{0,1}$  из (18), (19) принадлежит одномерному пространству, поэтому получившийся вид  $r_1$  и  $r_2$  вполне ожидаем.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.
2. Красовский Н. Н. Теория управления движением. Линейные системы. М.: Наука, 1968.
3. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
4. Дмитриев М.Г., Курина Г.А. Сингулярные возмущения в задачах управления // Автоматика и телемеханика. 2006. № 1. С. 3–51.
5. Глизер В.Я., Дмитриев М.Г. Асимптотика решения одной сингулярно возмущённой задачи Коши, возникающей в теории оптимального управления // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14, № 4. С. 601–612.
6. Калашникова М.А., Курина Г.А. Асимптотическое решение линейноквадратичных задач с дешёвыми управлениями разной цены // Тр. ИММ УрО РАН. 2016. Т. 22, № 1. С. 124–139.
7. Данилин А.Р., Ильин А.М. Асимптотическое поведение решения задачи быстрогодействия для линейной системы при возмущении начальных данных // Докл. АН. 1996. Т. 350, № 2. С. 155–157.
8. Данилин А.Р., Ильин А.М. О структуре решения одной возмущённой задачи быстрогодействия // Фундамент. и прикл. математика. 1998. Т. 4, № 3. С. 905–926.
9. Данилин А.Р., Шабуров А.А. Асимптотическое разложение решения одной сингулярно возмущённой задачи оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества, терминальная часть которого аддитивно зависит от медленных и быстрых переменных // Изв. ИМИ УдГУ. 2020. Т. 55. С. 33–41.
10. Шабуров А.А. Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущённой задачи оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества, терминальная часть которого зависит только от медленных переменных // Тр. ИММ УрО РАН. 2018. Т. 24, № 2. С. 280–289; DOI: <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2018-24-2-280-289>
11. Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Краткий курс теории экстремальных задач. М.: Изд-во МГУ, 1989.
12. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
13. Данилин А.Р., Коврижных О.О. Асимптотика оптимального времени перевода линейной управляемой системы с нулевыми вещественными частями собственных значений матрицы при быстрых переменных на неограниченное целевое множество // Тр. ИММ УрО РАН. 2021. Т. 27, № 1. С. 48–61.

UDC 517.977

# ASYMPTOTIC EXPANSION OF SOLUTION OF ONE SINGULARLY PERTURBED OPTIMAL CONTROL PROBLEM WITH CONVEX INTEGRAL PERFORMANCE INDEX AND CHEAP CONTROL

© 2022 A. R. Danilin<sup>a</sup>, A. A. Shaburov<sup>b</sup>

*N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS,  
ul. S. Kovalevskoi, 16, Ekaterinburg 620108, Russia*

E-mails: <sup>a</sup>dar@imm.uran.ru, <sup>b</sup>alexandershaburov@mail.ru

Received 28.08.2021, revised 18.01.2022, accepted 22.06.2022

**Abstract.** We consider the problem of optimal control for a linear system with constant coefficients with convex integral performance index contains small parameter in integral part in the class of piecewise continuous controls with a smooth control constraints. The article is based on asymptotic of the initial vector of the adjoint state, which determines the type of optimal control. In the time-optimal control problem limit problem has a solution with discontinuous control but the perturbed problem has continuous control. It is proved that in this case the solution is decomposed in an series with a complex structure. But optimal control is decomposed in a power series of expansion in small parameter in the cheap control problem.

**Keywords:** optimal control, cheap controls, asymptotic expansion, small parameter.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.301

## REFERENCES

1. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. The Mathematical Theory of Optimal Processes. N. Y.; London; Sydney: John Wiley & Sons, 1962.
2. Krasovskii N. N. Teoriya upravleniya dvizheniem. Lineinye sistemy [Theory of motion control. Linear systems]. Moscow: Nauka, 1968 (in Russian).
3. Lee E.B., Markus L. Foundations of Optimal Control Theory. N. Y.; London; Sydney: John Wiley & Sons, 1967.
4. Dmitriev M.G., Kurina G.A. Singular perturbations in control problems. *Autom. Remote Control*, 2006, Vol. 67, No. 1, pp. 1–43; DOI: <https://doi.org/10.1134/S000511796010012>
5. Glizer V.Ya., Dmitriev M.G. Asimptotika resheniya odnoi singulyarno vozmushchennoi zadachi Koshi, voznikayushchei v teorii optimal'nogo upravleniya [Asymptotics of the solution of one singularly perturbed Cauchy problem arising in the theory of optimal control]. *Differ. Equ.*, 1978, Vol. 14, No. 4, pp. 601–612 (in Russian).
6. Kalashnikova M.A., Kurina G.A. Direct scheme for the asymptotic solution of linear-quadratic problems with cheap controls of different costs. *Differ. Equ.*, 2019, Vol. 55, No. 1, pp. 84–104.
7. Danilin A.R., Ilyin A.M. Asimptoticheskoe povedenie resheniya zadachi bystrodeistviya dlya lineinoi sistemy pri vozmushchenii nachal'nykh dannyykh [Asymptotic behavior of the problem solution speed for a linear system under a perturbation of the initial data]. *Dokl. AN*, 1996, Vol. 350, No. 2, pp. 155–157 (in Russian).
8. Данилин А.Р., Ильин А.М. Danilin A.R., Il'in A.M. O strukture resheniya odnoi vozmushchennoi zadachi bystrodeistviya [On the structure of the solution of one perturbed problem performance]. *Fundament. i Prikl. Mat.*, 1998, Vol. 4, No. 3, pp. 905–926 (in Russian).

9. Danilin A. R., Shaburov A. A. Asymptotic expansion of a solution of a singularly perturbed optimal control problem with a convex integral quality index, whose terminal part additively depends on slow and fast variables. *Izv. IMI UdGU*, 2020, Vol. 55, pp. 33–41; <https://doi.org/10.35634/2226-3594-2020-55-03>
10. Shaburov A.A. Asymptotic expansion of a solution to a singularly perturbed optimal control problem with a convex integral performance index whose terminal part depends on slow variables only. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2018, Vol. 24, No. 2, pp. 280–289.
11. Galeev E.M., Tikhomirov V.M. *Kratkii kurs teorii ekstremal'nykh zadach* [A short course in the theory of extremal problems]. Moscow: Publ. MGU, 1989 (in Russian).
12. Rokafellar R. *Vypuklyi analiz* [Convex analysis]. Moscow: Mir, 1973 (in Russian).
13. Danilin A. R., Kovrizhnykh O. O. Asymptotics of a solution to a singularly perturbed time-optimal control problem of transferring an object to a set. *Proc. Steklov Institute of Mathematics*, 2021, Vol. 313, No. 1, pp. 40–53; DOI:<https://doi.org/10.21538/0134-4889-2021-27-1-48-61>