



# СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор	В. Л. Береснев
Зам. главного редактора	А. Л. Карчевский
Отв. секретарь	В. А. Дедок

Журнал основан в 1998 году  
Выходит 4 раза в год  
**Том 25, №3(91)**  
Июль - сентябрь 2022 г.

## ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ

Г. В. Алексеев	С. Б. Медведев
Б. Д. Аннин	Р. Г. Новиков
В. С. Белоносов	Д. Е. Пальчунов
В. Н. Белых	П. И. Плотников
Ю. С. Волков	В. Г. Романов
В. П. Ильин	Е. М. Рудой
С. И. Кабанихин	В. М. Садовский
А. Н. Карапетянц	Д. И. Свириденко
М. В. Клибанов	А. С. Терсенов
С. С. Кутателадзе	В. С. Тимофеев
В. А. Левин	В. В. Шайдуров
Н. И. Макаренко	

## СОДЕРЖАНИЕ

Данилин А. Р., Шабуров А. А. Асимптотическое разложение решения задачи оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества и дешёвым управлением .....	5
• Дурдиев Д. К., Меражова Ш. Б. Обратная задача для двумерного уравнения смешанного парабола-гиперболического типа в цилиндрической области .....	14
<b>Иванов В. В.</b> Притягивающий предельный цикл модели нечётномерной кольцевой генной сети .....	25
Имомназаров Б. Х., Имомназаров Ш. Х., Маматкулов М. М., Худайназаров Б. Б. Фундаментальное решение для стационарного уравнения двухскоростной гидродинамики с равновесием фаз по давлению в диссипативном приближении .....	33
Ковалёв М. Д. О геометрическом определении шарнирного механизма, теореме Кемпе и перезрелой математике .....	41
Куликов И. М., Черных И. Г., Ульяничев И. С., Тутуков А. В. Математическое моделирование ядерного горения углерода в белых карликах с использованием 7-изотопной сети реакций .....	55
Купцова Е. В. Осциллятор Ван дер Поля под действием случайного шума .....	67
Лазарева Г. Г., Максимова А. Г. Численное моделирование распространения паров вольфрама над нагреваемой поверхностью .....	81
Мамажонов М., Шерматова Х. М. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка парабола-гиперболического типа в треугольной области с тремя линиями изменения типа уравнения .....	93
Минаков А. В., Лобасов А. С., Шебелев А. В., Зайцев Д. В., Кабов О. А. Режимы течения плёнки жидкости, увлекаемой потоком газа в плоском горизонтальном канале, в изотермических условиях .....	104
Митрофанов Г. М., Карчевский А. Л. Математическое моделирование для тонко-слоистых упругих сред в сейсморазведке .....	120
Перцев Н. В., Топчий В. А., Логинов К. К. Численное стохастическое моделирование динамики взаимодействующих популяций .....	135
Романов В. Г., Бугуева Т. В. Задача об определении коэффициента при нелинейном члене квазилинейного волнового уравнения .....	154
Старовойтов В. Н., Старовойтова Б. Н. Усреднённая математическая модель периодической упругой структуры, насыщенной жидкостью Максвелла .....	170

НОВОСИБИРСК

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

УДК 517.968.72

## ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ

© 2022 Д. К. Дурдиев<sup>1,2a</sup>, Ш. Б. Меражова<sup>2b</sup>

<sup>1</sup>Бухарское отделение Института математики АН Республики Узбекистан,  
ул. М. Икбола, 11, Бухара 200117, Узбекистан,

<sup>2</sup>Бухарский государственный университет,  
ул. М. Икбола, 11, Бухара 200117, Узбекистан

E-mails: <sup>a</sup>d.durdiev@mathinst.uz, <sup>b</sup>shsharipova@mail.ru

Поступила в редакцию 14.03.2022 г.; после доработки 30.04.2022 г.;  
принята к публикации 22.06.2022 г.

Для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа с оператором Бесселя изучается обратная задача, связанная с поиском неизвестной правой части. На основе метода разделения переменных задача сводится к решению обыкновенных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов разложения в ряды Фурье — Бесселя неизвестных функций по ортонормированным функциям Бесселя первого рода нулевого порядка. Установлен критерий единственности и существования решения поставленной задачи.

**Ключевые слова:** обратная задача, ряд Фурье — Бесселя, собственное значение, собственная функция, единственность, существование.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.302

Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного типа не так хорошо изучены, как аналогичные задачи для классических уравнений. Тем не менее, такие задачи являются актуальными с точки зрения приложений. Например, в однородной среде в случае её малой проводимости напряжённость электромагнитного поля удовлетворяет волновому уравнению, в случае же сравнительно большой проводимости, когда можно пренебречь токами смещения по сравнению с токами проводимости, упомянутая величина удовлетворяет уравнению теплопроводности [1, с. 443–447]. Другим примером может служить следующее явление в газодинамике: при моделировании процессов движения газа в закрытом канале с пористыми стенками движения газа в канале описывается волновым уравнением, а вне его — уравнением диффузии [2, 3]. Таких примеров множество.

Прямые задачи для уравнений смешанного парабола-гиперболического типа изучались в работах [4–8]. Обратные задачи об определении правой части или начальной функции в начально-краевых задачах для уравнений смешанного парабола-гиперболического типа в прямоугольной области рассматривались в работах [9–12], где на основе спектрального метода установлены критерии единственности и существования решений обратных задач. В данной работе исследуются прямая и обратная задачи, связанные с поиском решения начально-краевой задачи для уравнений смешанного парабола-гиперболического типа и неизвестной правой части этого уравнения в цилиндрической области. При исследовании рассматриваемой задачи нам понадобятся функция Бесселя и условия сходимости рядов Фурье — Бесселя [13].

Различные обратные задачи определения коэффициентов, правых частей отдельных типов дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, т. е. параболических, гиперболических и эллиптических уравнений, изучались во многих работах (см., например, монографии [14–19] и приведённую там обширную библиографию). Обратные задачи вос-

становления ядра в гиперболических интегро-дифференциальных уравнений исследовались в [20, 21]. С численными методами нахождения коэффициентов уравнений можно ознакомиться в работах [22, 23] (также см. библиографию в них).

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В области  $G := \{(\rho, t) \mid 0 < \rho < 1, -\alpha < t < \beta\}$  рассмотрим дифференциальное уравнение смешанного парабола-гиперболического типа

$$\theta(t)d\frac{\partial u}{\partial t} + \theta(-t)c^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + f(\rho), \quad (\rho, t) \in G, \quad (1)$$

с граничными условиями

$$\left[ \rho \frac{\partial}{\partial \rho} u(\rho, t) \right]_{\rho=0} = 0, \quad u|_{\rho=1} = 0, \quad -\alpha \leq t \leq \beta, \quad (2)$$

условиями склейки при  $t = 0$

$$u(\rho, +0) = u(\rho, -0), \quad u_t(\rho, +0) = u_t(\rho, -0), \quad 0 \leq \rho \leq 1, \quad (3)$$

и начальным условием

$$u(\rho, -\alpha) = \varphi(\rho), \quad 0 \leq \rho \leq 1. \quad (4)$$

Здесь  $\theta(t)$  —  $\theta$ -функция Хевисайда,  $\alpha, \beta, d, c$  — заданные положительные числа. Будем считать, что функции  $f(\rho)$  и  $\varphi(\rho)$  достаточно гладкие.

Отметим, что к уравнениям вида (1) приводятся задачи, описанные ранее в цилиндрической области в случае осевой симметрии.

Соотношения (1)–(4) являются прямой задачей, т. е. если известны функции  $f(\rho)$ ,  $\varphi(\rho)$  и постоянные  $d, c, \alpha, \beta$ , то решение  $u(\rho, t)$  может быть найдено из уравнений (1)–(4).

Обозначим  $G_+ = G \cap \{t > 0\}$ ,  $G_- = G \cap \{t < 0\}$ .

**Определение 1.** Под решением прямой задачи (1)–(4) будем понимать функцию  $u(\rho, t)$  из класса  $C_{\rho, t}^{2,1}(G_+ \cup \{t = \beta\}) \cap C^2(G_- \cup \{t = -\alpha\})$ , являющуюся решением уравнения (1) в области  $G$  и удовлетворяющую условиям (1)–(4).

**Обратная задача.** Необходимо определить функцию  $f(\rho)$ , если о решении прямой задачи (1)–(4) известна следующая дополнительная информация:

$$u(\rho, \beta) = \psi(\rho), \quad 0 \leq \rho \leq 1, \quad (5)$$

где  $\psi(\rho)$  — заданная достаточно гладкая функция.

**Определение 2.** Решением обратной задачи (1)–(5) назовём функции  $u(\rho, t)$  и  $f(\rho)$  из класса  $C_{\rho, t}^{2,1}(G_+ \cup \{t = \beta\}) \cap C^2(G_- \cup \{t = -\alpha\})$  и  $C[0, 1]$  соответственно, удовлетворяющие соотношениям (1)–(5).

Следующие два раздела посвящены построению решения прямой задачи с помощью спектрального метода и доказательствам теорем существования и единственности решения.

## 2. ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Разыскивая, согласно методу Фурье, частные решения уравнения (1) при  $f(\rho) = 0$  в виде  $u(\rho, t) = R(\rho)T(t)$ , получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} dT'(t)R(\rho) &= \frac{1}{\rho}T(t)R'(\rho) + T(t)R''(\rho), \quad t > 0, \\ c^2T''(t)R(\rho) &= \frac{1}{\rho}T(t)R'(\rho) + T(t)R''(\rho), \quad t < 0. \end{aligned}$$

Разделяя переменные, имеем

$$\begin{aligned} d\frac{T'(t)}{T(t)} &= \frac{1}{\rho}\frac{R'(\rho)}{R(\rho)} + \frac{R''(\rho)}{R(\rho)} = -\lambda^2, \quad t > 0, \\ c^2\frac{T''(t)}{T(t)} &= \frac{1}{\rho}\frac{R'(\rho)}{R(\rho)} + \frac{R''(\rho)}{R(\rho)} = -\lambda^2, \quad t < 0, \end{aligned}$$

где  $\lambda$  — произвольный действительный параметр. Отсюда для нахождения функции  $R(\rho)$  получим задачу для уравнения

$$R''(\rho) + \frac{1}{\rho}R'(\rho) + \lambda^2R(\rho) = 0 \quad (6)$$

с граничными условиями

$$\lim_{\rho \rightarrow 0}(\rho R'(\rho)) = 0, \quad R(1) = 0, \quad (7)$$

которая является самосопряжённой задачей.

Решением уравнения (6) являются следующие функции Бесселя первого рода нулевого порядка:

$$R_k(\rho) = J_0(\lambda_k \rho), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Они же есть собственные функции. Находим собственные значения, используя граничные условия (7) и положительные корни уравнения  $J_0(\lambda_k) = 0$ . Они имеют следующий вид:

$$\lambda_k = k\pi - \frac{\pi}{4} = (4k - 1)\frac{\pi}{4}.$$

Разложим теперь искомую функцию и правую сторону уравнения в ряд Фурье — Бесселя по собственным функциям  $J_0(\lambda_k \rho)$ , т. е.

$$u(\rho, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) J_0(\lambda_k \rho), \quad (8)$$

$$f(\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k J_0(\lambda_k \rho), \quad (9)$$

где

$$u_k(t) = \frac{2}{J_1^2(\lambda_k)} \int_0^1 \rho u(\rho, t) J_0(\lambda_k \rho) d\rho, \quad f_k = \frac{2}{J_1^2(\lambda_k)} \int_0^1 \rho f(\rho) J_0(\lambda_k \rho) d\rho.$$

Подставляя (8), (9) в (1), получим

$$\begin{aligned} du'_k(t) &= -\lambda_k^2 u_k(t) + f_k, \quad t > 0, \\ c^2 u''_k(t) &= -\lambda_k^2 u_k(t) + f_k, \quad t < 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Нетрудно найти, что эти дифференциальные уравнения имеют общие решения:

$$\begin{aligned} u_k(t) &= c_k e^{-\lambda_k^2 t/d} + f_k/\lambda_k^2, \quad t > 0, \\ u_k(t) &= a_k \cos\left(\frac{\lambda_k}{c}t\right) + b_k \sin\left(\frac{\lambda_k}{c}t\right) + f_k/\lambda_k^2, \quad t < 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $a_k, b_k, c_k$  — произвольные постоянные.

Для нахождения коэффициентов  $a_k, b_k, c_k$  используем условия склейки

$$u_k(0+0) = u_k(0-0), \quad u'_k(0+0) = u'_k(0-0),$$

в результате получим  $a_k = c_k, b_k = -\frac{\lambda_k c}{d} c_k$ . Из начального условия (3) имеем

$$a_k \cos\left(\frac{\lambda_k}{c}\alpha\right) - b_k \sin\left(\frac{\lambda_k}{c}\alpha\right) + f_k/\lambda_k^2 = \varphi_k,$$

где  $\varphi_k$  — коэффициенты Фурье — Бесселя ряда

$$\varphi(\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k J_0(\lambda_k \rho). \quad (12)$$

Подставляя значения  $a_k, b_k$ , выраженные через  $c_k$ , и решая полученную систему относительно  $c_k$ , находим

$$c_k = \frac{\varphi_k - f_k/\lambda_k^2}{\cos\left(\frac{\lambda_k}{c}\alpha\right) + \frac{\lambda_k c}{d} \sin\left(\frac{\lambda_k}{c}\alpha\right)}. \quad (13)$$

Введём обозначение

$$\delta_\alpha(k) = \cos\left(\frac{\lambda_k}{c}\alpha\right) + \frac{\lambda_k c}{d} \sin\left(\frac{\lambda_k}{c}\alpha\right). \quad (14)$$

### 3. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Поставляя собственные числа, находим значения  $\alpha$ , при которых уравнение (14) принимает значения, не равные нулю. Для этого (17) перепишем следующим образом:

$$\delta_\alpha(k) = \sqrt{1 + \frac{(4k-1)^2 \pi^2 c^2}{16d^2}} \sin\left(\frac{4k-1}{4c} \alpha \pi + \gamma_k\right), \quad (15)$$

где

$$\gamma_k = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(4k-1)^2 \pi^2 c^2}{16d^2}}}\right).$$

Ищем значения  $\alpha$ , при которых  $\delta_\alpha(k) = 0$ , оно равно  $\alpha = \frac{4c}{(4k-1)\pi}(\pi n - \gamma_k)$ .

Теперь найдём значения  $\alpha$ , при которых выполняются следующие условия:

$$|\delta_\alpha(k)| \geq C_0 > 0. \quad (16)$$

Для этого оценим  $\delta_\alpha(k)$  по модулю. В силу равенства  $\alpha = 4cp, p \in \mathbb{N}$ , получим  $|\delta_\alpha(k)| = 1 \geq C_0 > 0$ .

Пусть  $\alpha = 4cn/m$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $(n, m) = 1$ , тогда из (15) при значениях  $\alpha = 4cp$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , или  $\alpha = 4cn/m$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $n$  и  $m$  — взаимно простые числа, т. е.  $\text{НОД}(n, m) = 1$ ,  $\beta > 0$ ; для (14) и (15) имеет место формула

$$|\delta_\alpha(k)| = \left| \sqrt{1 + \frac{(4k-1)^2 \pi^2 c^2}{16d^2}} \sin \left( \frac{4k-1}{4c} \alpha \pi + \gamma_k \right) \right| \\ = \left| \sqrt{1 + \frac{(4k-1)^2 \pi^2 c^2}{16d^2}} \sin \left( \frac{4k-1}{m} n \pi + \gamma_k \right) \right|.$$

Разделим  $(4k-1)n$  на  $m$  с остатком:  $(4k-1)n = sm + r$ ,  $s, r \in \mathbb{N} \cup 0$ ,  $0 \leq r < m$ . Тогда выражение для  $|A_{\alpha\beta}(k)|$  имеет вид

$$|\delta_\alpha(k)| = \left| \sqrt{1 + \frac{(4k-1)^2 \pi^2 c^2}{16d^2}} \sin \left( \frac{r}{m} n \pi + \gamma_k \right) \right|.$$

Отсюда в силу  $0 \leq r\pi/m < \pi$  при  $\gamma_k \rightarrow 0$  следует справедливость (16) при достаточно больших  $k$  и произвольном  $\beta > 0$ .

Таким образом, мы получили следующий критерий единственности.

**Теорема 1.** *Если существует решение задачи (1)–(4), то оно единственно при значениях  $\alpha = 4cp$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , или  $\alpha = 4cn/m$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $\text{НОД}(n, m) = 1$ .*

Теперь докажем существование решения. Подставляя (13) в (11), находим

$$u_k(t) = \frac{\varphi_k - f_k/\lambda_k^2}{\delta_\alpha(k)} e^{-\frac{\lambda_k^2}{d}t} + f_k/\lambda_k^2, \quad t > 0, \\ u_k(t) = \frac{\varphi_k - f_k/\lambda_k^2}{\delta_\alpha(k)} \left( \cos \left( \frac{\lambda_k}{c} t \right) - c \frac{\lambda_k}{d} \sin \left( \frac{\lambda_k}{c} t \right) \right) + f_k/\lambda_k^2, \quad t < 0,$$

С учётом этих соотношений, из (8) и (9) получим формальное решение поставленной задачи в виде рядов

$$u(\rho, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{\varphi_k - f_k/\lambda_k^2}{\delta_\alpha(k)} e^{-\frac{\lambda_k^2}{d}t} + f_k/\lambda_k^2 \right] J_0(\lambda_k \rho), \quad t > 0, \quad (17)$$

$$u(\rho, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{\varphi_k - f_k/\lambda_k^2}{\delta_\alpha(k)} \left( \cos \left( \frac{\lambda_k}{c} t \right) - c \frac{\lambda_k}{d} \sin \left( \frac{\lambda_k}{c} t \right) \right) + f_k/\lambda_k^2 \right] J_0(\lambda_k \rho), \quad t < 0. \quad (18)$$

Для доказательства существования решения нам нужно показать, что ряды (17), (18) и ряды, полученные дифференцированием функции  $u(\rho, t)$  в области  $G_+$  два раза по  $\rho$  и один раз по  $t$  и в области  $G_-$  два раза по  $\rho$  и по  $t$ , сходятся равномерно.

Чтобы оценить коэффициенты ряда Фурье — Бесселя функции  $u(x, t)$  и рядов, получен-

ных при его дифференцировании, вычислим общие члены этих рядов:

$$u_k(\rho, t) = \left[ \frac{\varphi_k - f_k/\lambda_k^2}{\delta_\alpha(k)} e^{-\frac{\lambda_k^2}{d}t} + f_k/\lambda_k^2 \right] J_0(\lambda_k \rho), \quad t > 0, \quad (19)$$

$$u_k(\rho, t) = \left[ \frac{\varphi_k - f_k/\lambda_k^2}{\delta_\alpha(k)} \left( \cos\left(\frac{\lambda_k}{c}t\right) - c \frac{\lambda_k}{d} \sin\left(\frac{\lambda_k}{c}t\right) \right) + f_k/\lambda_k^2 \right] J_0(\lambda_k \rho), \quad t < 0, \quad (20)$$

$$\frac{\partial u_k(\rho, t)}{\partial t} = -\frac{1}{d\delta_\alpha(k)} (f_k - \lambda_k^2 \varphi_k) J_0(\lambda_k \rho), \quad t > 0, \quad (21)$$

$$\frac{\partial^2 u_k(\rho, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{\delta_\alpha(k)} \left[ -\frac{\lambda_k^2}{c^2} \cos\left(\frac{\lambda_k}{c}t\right) + \frac{\lambda_k^3}{cd} \sin\left(\frac{\lambda_k}{c}t\right) \right] (\varphi_k - f_k/\lambda_k^2) J_0(\lambda_k \rho), \quad t < 0, \quad (22)$$

$$\frac{\partial^2 u_k(\rho, t)}{\partial \rho^2} = \left[ \frac{\varphi_k - f_k/\lambda_k^2}{\delta_\alpha(k)} e^{-\frac{\lambda_k^2}{d}t} + f_k/\lambda_k^2 \right] \lambda_k^2 J_0''(\lambda_k \rho), \quad t > 0, \quad (23)$$

$$\frac{\partial^2 u_k(\rho, t)}{\partial \rho^2} = \left[ \frac{\varphi_k - f_k/\lambda_k^2}{\delta_\alpha(k)} \left( \cos\left(\frac{\lambda_k}{c}t\right) - c \frac{\lambda_k}{d} \sin\left(\frac{\lambda_k}{c}t\right) \right) + f_k/\lambda_k^2 \right] \lambda_k^2 J_0''(\lambda_k \rho), \quad t < 0. \quad (24)$$

Пусть функции  $\varphi(\rho)$  и  $f(\rho)$  удовлетворяют условиям теоремы из [13, с. 289–291] с некоторым  $s \geq 1$  (число  $s$  определим позже). Тогда для коэффициентов Фурье — Бесселя этих функций справедливы оценки [13, с. 282]

$$|\varphi_k| \leq \frac{M_1}{\lambda_k^{2s-1/2}}, \quad |f_k| \leq \frac{M_2}{\lambda_k^{2s-1/2}}.$$

Для оценки выражений (19)–(24) нам нужны оценки функций  $J_0(z)$  и  $J_0''(z)$ ,  $z \in [0, +\infty)$ . Для функции Бесселя  $J_\nu(z)$  известно интегральное представление

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iz \cos \varphi + i\nu \sin \varphi} d\varphi,$$

из которого следует оценка  $|J_\nu(z)| \leq 1$ ,  $z \in \mathbb{R}$ . Учитывая это и соотношения из работы [13]

$$J_0'(z) = -J_1(z), \quad J_0''(z) = (1/2)(J_2(z) - J_0(z)),$$

находим оценки  $|J_0(z)| \leq 1$ ,  $|J_0''(z)| \leq 1$ ,  $z \in [0, +\infty)$ , которые будут использованы далее.

Оценим функцию  $u_k(\rho, t)$ :

$$\begin{aligned} |u_k(\rho, t)| &= \left| \left[ \frac{\varphi_k - f_k/\lambda_k^2}{\delta_\alpha(k)} e^{-\frac{\lambda_k^2}{d}t} + f_k/\lambda_k^2 \right] J_0(\lambda_k \rho) \right| = \left| \frac{\varphi_k - f_k/\lambda_k^2}{\delta_\alpha(k)} e^{-\frac{\lambda_k^2}{d}t} + f_k/\lambda_k^2 \right| |J_0(\lambda_k \rho)| \\ &\leq \left| \frac{\varphi_k - f_k/\lambda_k^2}{\delta_\alpha(k)} e^{-\frac{\lambda_k^2}{d}t} + f_k/\lambda_k^2 \right| \leq |\varphi_k| \left| \frac{e^{-\frac{\lambda_k^2}{d}t}}{\delta_\alpha(k)} \right| + |f_k| \left| \frac{e^{-\frac{\lambda_k^2}{d}t}}{\lambda_k^2 \delta_\alpha(k)} \right| + |f_k/\lambda_k^2| \\ &\leq \frac{M_1}{\lambda_k^{2s-(1/2)}} + \frac{M_2}{\lambda_k^{2s-(1/2)+2}} \leq \frac{N_1}{\lambda_k^{2s-(1/2)}}, \quad t > 0, \end{aligned}$$

в этом случае  $s = 2$  для функции  $\varphi(x)$ ,  $s = 0$  для функции  $f(x)$ .

Имеет место оценка

$$\begin{aligned} |u_k(\rho, t)| &= \left| \left[ \frac{\varphi_k - f_k/\lambda_k^2}{\delta_\alpha(k)} \left( \cos\left(\frac{\lambda_k}{c}t\right) - c \frac{\lambda_k}{d} \sin\left(\frac{\lambda_k}{c}t\right) \right) + f_k/\lambda_k^2 \right] J_0(\lambda_k \rho) \right| \\ &\leq M_1 \frac{\lambda_k}{\lambda_k^{2s-(1/2)}} + \frac{M_2}{\lambda_k^{2s-(1/2)+1}} \leq N_2 \frac{\lambda_k}{\lambda_k^{2s-(1/2)}}, \quad t < 0, \end{aligned}$$

здесь  $s = 3$  для функции  $\varphi(x)$ ,  $s = 1$  для функции  $f(x)$ ;  $M_1, M_2, N_1, N_2$  — положительные постоянные.

Далее, проведя подобным образом очевидные оценки для выражений (21)–(24), находим

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial u_k(\rho, t)}{\partial t} \right| &\leq N_3 \frac{\lambda_k^2}{\lambda_k^{2s-(1/2)}}, \quad t > 0, & \left| \frac{\partial^2 u_k(\rho, t)}{\partial t^2} \right| &\leq N_4 \frac{\lambda_k^3}{\lambda_k^{2s-(1/2)}}, \quad t < 0, \\ \left| \frac{\partial^2 u_k(\rho, t)}{\partial \rho^2} \right| &\leq N_5 \frac{\lambda_k^2}{\lambda_k^{2s-(1/2)}}, \quad t > 0, & \left| \frac{\partial^2 u_k(\rho, t)}{\partial \rho^2} \right| &\leq N_6 \frac{\lambda_k^3}{\lambda_k^{2s-(1/2)}}, \quad t < 0. \end{aligned}$$

Здесь  $N_3, N_4, N_5, N_6$  — положительные постоянные.

Из этих неравенств получим

$$\max \left\{ \max_{(\rho, t) \in G_+} \left| \frac{\partial u_k(\rho, t)}{\partial t} \right|, \max_{(\rho, t) \in G_-} \left| \frac{\partial^2 u_k(\rho, t)}{\partial^2 t} \right|, \right. \\ \left. \max_{(\rho, t) \in G_+} \left| \frac{\partial^2 u_k(\rho, t)}{\partial^2 \rho} \right|, \max_{(\rho, t) \in G_-} \left| \frac{\partial^2 u_k(\rho, t)}{\partial^2 \rho} \right| \right\} \leq N \frac{\lambda_k^3}{\lambda_k^{2s-(1/2)}}, \quad (25)$$

где  $N$  — положительная постоянная.

Отсюда следует, что если  $s = 3$  для функции  $\varphi(x)$  и  $s = 2$  для функции  $f(x)$ , то согласно теореме из [13, с. 282] ряды (17), (18) и ряды, полученные дифференцированием в области  $G_+$  функции  $u(\rho, t)$  два раза по  $\rho$  и один раз по  $t$ , и ряды, полученные дифференцированием в области  $G_-$  функции  $u(\rho, t)$  два раза по  $\rho$  и по  $t$ , сходятся равномерно.

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

**Теорема 2.** Пусть  $\varphi(\rho) \in C^6[0, 1]$ ,  $f(\rho) \in C^4[0, 1]$  и, кроме того, выполнены условие (16) и равенства

$$\begin{aligned} \varphi^{(i)}(0) &= 0, \quad i = 0, 1, \dots, 5, & f^{(i)}(0) &= 0, \quad i = 0, 1, \dots, 3, \\ \varphi^{(i)}(1) &= 0, \quad i = 0, 1, \dots, 4, & f^{(i)}(1) &= 0, \quad i = 0, 1, \dots, 2. \end{aligned}$$

Тогда существует единственное решение задачи (1)–(4), которое определяется формулами (17), (18), где  $\varphi^{(i)}, f^{(i)}$  —  $i$ -е производные функций  $\varphi$  и  $f$ , а  $\varphi_k$  и  $f_k$  — коэффициенты Фурье — Бесселя функций  $\varphi$  и  $f$  соответственно.

#### 4. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Перейдём к изучению обратной задачи. Используя дополнительное условие (8), разложим функцию  $\psi$  в ряд Фурье — Бесселя:

$$\psi(\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k J_0(\lambda_k \rho), \quad (26)$$

где  $\psi_k$  — коэффициенты Фурье — Бесселя. В результате получим

$$c_k e^{-\frac{\lambda_k^2}{d}\beta} + f_k / \lambda_k^2 = \psi_k.$$

Подставляя в это равенство значение  $c_k$ , находим

$$f_k = \lambda_k^2 \left( \frac{\varphi_k e^{-\lambda_k^2 \beta / d} - \psi_k \delta_\alpha(k)}{e^{-\lambda_k^2 \beta / d} - \delta_\alpha(k)} \right). \quad (27)$$

Обозначим

$$A_{\alpha\beta}(k) = e^{-\lambda_k^2\beta/d} - \cos\left(\frac{\lambda_k}{c}\alpha\right) - \frac{\lambda_k c}{d} \sin\left(\frac{\lambda_k}{c}\alpha\right). \quad (28)$$

Нетрудно заметить, что соотношение

$$A_{\alpha\beta}(k) \neq 0 \quad (29)$$

выполняется, если  $\alpha$  удовлетворяет условиям теоремы 1 при произвольном  $\beta > 0$ . Тогда, подобно теореме 1, справедлив критерий единственности для решения обратной задачи.

**Теорема 3.** *Если существует решение обратной задачи (1)–(5), то оно единственно при значениях  $\alpha$ , удовлетворяющих условиям теоремы 1 и для любых  $\beta > 0$ .*

Докажем существование решения обратной задачи. Подобно оценке (28), получим оценку для функции  $f(\rho)$ :

$$f(\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \left( \psi_k - \frac{\psi_k - \varphi_k}{A_{\alpha\beta}(k)} \right) e^{-\lambda_k^2\beta/d} J_0(\lambda_k \rho), \quad (30)$$

где функции  $\varphi(\rho)$  и  $\psi(\rho)$  удовлетворяют условиям теоремы из [13, с. 282] с некоторым  $s \geq 1$ . Тогда для коэффициентов Фурье — Бесселя этих функций справедливы оценки

$$|\varphi_k| \leq \frac{M_1}{\lambda_k^{2s-(1/2)}}, \quad |\psi_k| \leq \frac{M_3}{\lambda_k^{2s-(1/2)}},$$

а оценка для  $f(\rho)$  имеет следующий вид:

$$|f(\rho)| \leq N \frac{\lambda_k^2}{\lambda_k^{2s-(1/2)}}.$$

Из этой оценки и оценки (25) следует, что если  $s = 3$ , то согласно теореме из [13, с. 282] ряды в (17), (18), (30) и ряды, полученные дифференцированием в области  $G_+$  функции  $u(\rho, t)$  два раза по  $\rho$  и один раз по  $t$ , и ряды, полученные дифференцированием функции  $u(\rho, t)$  в области  $G_-$  дифференцированием два раза по  $\rho$  и по  $t$ , сходятся равномерно.

Таким образом, мы доказали основной результат настоящей работы.

**Теорема 4.** *Предположим, что функция  $\varphi(\rho)$  удовлетворяет условиям теоремы 2 и выполнены условия (29), а для функции  $\psi(\rho) \in C^6[0, 1]$  справедливы равенства*

$$\psi^{(i)}(0) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, 5, \quad \psi^{(j)}(1) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, 4.$$

*Тогда существует единственное решение задачи (1)–(5), которое определяется формулами (17), (18) и (30), где  $\psi^{(i)}$  —  $i$ -е производные функции  $\psi$ , а  $\psi_k$  — коэффициенты Фурье — Бесселя функции  $\psi$ .*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Гостехиздат, 1953.
2. Гельфанд И.М. Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1959. Т. 14, № 3. С. 3–19.
3. Франкль Ф.И. Избранные труды по газовой динамике. М.: Наука, 1973.
4. Трикоми Ф. О линейных уравнениях смешанного типа. М.: Гостехиздат, 1947.
5. Фикера Г. К единой теории краевых задач эллипτικο-параболических уравнений второго порядка // Математика. 1963. Т. 7, № 6. С. 99–121.

6. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов А. Краевые задачи для уравнений парабола-гиперболического типа. Ташкент: ФАН, 1986.
7. Сабитов К.Б. К теории уравнений смешанного парабола-гиперболического типа со спектральным параметром // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 1. С. 117–126.
8. Сабитов К.Б. Нелокальная задача для неоднородного уравнения парабола-гиперболического типа в прямоугольной области // Мат. заметки. 2011. Т. 89, № 4. С. 596–602.
9. Сабитов К.Б., Сафин Э.М. Обратная задача для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа в прямоугольной области // Изв. вузов. Математика. 2010. № 4. С. 55–62.
10. Сабитов К.Б., Сафин Э.М. Обратная задача для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа // Мат. заметки. 2010. Т. 87, № 6. С. 907–918.
11. Сабитов К.Б., Сидиров С.Н. Обратная задача для вырождающегося парабола-гиперболического уравнения с нелокальным граничным условием // Изв. вузов. Математика. 2015. № 1. С. 46–59.
12. Сабитов К.Б. Начально-граничная и обратные задачи для неоднородного уравнения смешанного парабола-гиперболического уравнения // Мат. заметки. 2017. Т. 102, № 3. С. 415–435.
13. Толстов Г.П. Ряды Фурье. М.: Гостехиздат, 1960.
14. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
15. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984.
16. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1994.
17. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. N. Y.: Marcel Dekker, 1999. (Pure Appl. Math., V. 231).
18. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное изд-во, 2009.
19. Hasanov Hasanoglu A, Romanov V.G. Introduction to Inverse Problems for Differential Equations, Springer Internat. Publ., 2017.
20. Дурдиев Д.К., Рахронов А.А. Задача об определении двумерного ядра в системе интегро-дифференциальных уравнений вязкоупругой пористой среды // Сиб. журн. индустр. математики. 2020. Т. 23, № 2. С. 63–80.
21. Дурдиев Д.К., Тотиева Ж.Д. О глобальной разрешимости одной многомерной обратной задачи для уравнения с памятью // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 2. С. 269–285.
22. Карчевский А.Л., Дедок В.А. Восстановление коэффициента диэлектрической проницаемости по модулю рассеянного электрического поля // Сиб. журн. индустр. математики. 2018. Т. 21, № 3. С. 50–59.
23. Romanov V.G., Karchevsky A.L. Determination of permittivity and conductivity of medium in a vicinity of a well having complex profile // Eurasian J. Math. Comput. Appl. 2018. Т. 6, N 4. P. 62–72.

UDC 517.968.72

INVERSE PROBLEM FOR AN EQUATION OF MIXED  
PARABOLIC-HYPERBOLIC TYPE WITH A BESSEL OPERATOR© 2022 D. K. Durdiev<sup>1,2a</sup>, Sh. B. Merajova<sup>2b</sup><sup>1</sup> Bukhara Branch of Institute of Mathematics UAS,  
ul. M. Ikbol 11, Bukhara 200117, Uzbekistan<sup>2</sup> Bukhara State University,  
ul. M. Ikbol 11, Bukhara 200117, UzbekistanE-mails: <sup>a</sup>d.durdiev@mathinst.uz, <sup>b</sup>shsharipova@mail.ru

Received 14.03.2022, revised 30.04.2022, accepted 22.06.2022

**Abstract.** In this work, for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type with a Bessel operator, we study the inverse problem associated with the search for an unknown right-hand side. On based method separation of variables, the problem is reduced to solving an ordinary differential equations with respect to the coefficients of the Fourier–Bessel expansion of unknown functions in orthonormal Bessel functions of the first kind of zero order. A criterion for the uniqueness and existence of a solution to the stated problem is established.

**Keywords:** Inverse problem, Fourier–Bessel series, eigenvalue, eigenfunction, uniqueness, existence.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.302

## REFERENCES

1. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. Equations of Mathematical Physics. Oxford: Pergamon Press, 1963.
2. Gelfand I.M. Nekotorye voprosy analiza i differentsial'nykh uravnenii [Some questions of analysis and differential equations]. *Uspekhi Mat. Nauk*, 1959, Vol. 14, No. 3, pp. 3–19. (in Russian).
3. Frankl F. I. Izbrannye trudy po gazovoi dinamike [Selected works on gas dynamics]. Moscow: Nauka, 1973 (in Russian).
4. Trikom F. O lineinykh uravneniyakh smeshannogo tipa [On linear equations of mixed type]. Moscow: Gostekhizdat, 1947 (in Russian).
5. Fikera G. K edinoi teorii kraevykh zadach elliptiko-parabolicheskikh uravnenii vtorogo poryadka [The unified theory of boundary value problems of elliptic-parabolic is second order]. *Mathematics*, 1963, Vol. 7, No. 6, pp. 99–121 (in Russian).
6. Dzhuraev T.D., Sopuev A., Mamazhanov A. Kraevye zadachi dlya uravnenii parabolo-giperbolicheskogo tipa [Boundary value problems for equations of parabolic-hyperbolic type]. Tashkent: FAN, 1986 (in Russian).
7. Sabitov K.B. K teorii uravnenii smeshannogo parabolo-giperbolicheskogo tipa so spektral'nyim parametrom [On the theory of equations of mixed parabolic-hyperbolic type with a spectral parameter]. *Differ. Equ.*, 1989, Vol. 25, No. 1, pp. 93–100 (in Russian).
8. Sabitov K.B. Nonlocal problem for a parabolic-hyperbolic equation in a rectangular domain. *Math. Notes*, 2011, Vol. 89, No. 4, pp. 562–567.
9. Sabitov K.B., Safin E.M. The inverse problem for a mixed-type parabolic-hyperbolic equation in a rectangular domain. *Russian Math.*, 2010, Vol. 54, No. 4, pp. 48–54.

10. Sabitov K.B., Safin E.M. The inverse problem for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type. *Math. Notes*, 2010, Vol. 87, No. 6, pp. 880–889.
11. Sabitov K.B., Sidorov S.N. Inverse problem for degenerate parabolic-hyperbolic equation with nonlocal boundary condition. *Russian Math.*, 2015, Vol. 59, No. 1, pp. 39–50.
12. Sabitov K.B. Initial boundary and inverse problems for the inhomogeneous equation of a mixed parabolic-hyperbolic equation. *Math. Notes*, 2017, Vol. 102, No. 3, pp. 378–395.
13. Tolstov G.P. Fourier Series. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice Hall, 1962.
14. Lavrentiev M.M., Romanov V.G., Shishatskii S.P. Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis. Providence: Amer. Math. Soc., 1986.
15. Romanov V.G. Obratnye zadachi matematicheskoi fiziki [Inverse problems of mathematical physics nauka]. Moscow: Nauka, 1984 (in Russian).
16. Denisov A.M. Vvedenie v teoriyu obratnykh zadach [Introduction to the theory of inverse problems]. Moscow: Nauka, 1994 (in Russian).
17. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. N. Y.: Marcel Dekker, 1999.
18. Kabanikhin S.I. Obratnye i nekorrektnye zadachi [Inverse and Ill-Posed Problems]. Novosibirsk: Sib. Press, 2009 (in Russian).
19. Hasanov Hasanoglu A., Romanov V.G. Introduction to Inverse Problems for Differential Equations. Springer Internat. Publ., 2017.
20. Durdiev D.K., Rahmonov A.A. The problem of determining the 2D-kernel in a system of integro-differential equations of a viscoelastic porous medium. *J. Appl. Industr. Math.*, 2020, Vol. 14, No. 2, pp. 281–295.
21. Durdiev D.K., Totieva Zh.D., О глобальной разрешимости одной многомерной обратной задачи для уравнения с памятью [About global solvability of a multidimensional inverse problem for an equation with memory]. *Siber. Zhurn. Indust. Mat.* 2021, Vol. 62, No. 2, pp. 215–229 (in Russian).
22. Karchevsky A.L., Dedok V.A. Reconstruction of permittivity from the modulus of a scattered electric field. *J. Appl. Indust. Math.*, 2018, Vol. 12, No. 3, pp. 470–478; DOI: 10.1134/S1990478918030079
23. Romanov V.G., Karchevsky A.L. Determination of permittivity and conductivity of medium in a vicinity of a well having complex profile. *Eurasian J. Math. Comput. Appl.*, 2018, Vol. 6, No. 4, pp. 62–72.