



# СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор В. Л. Береснев  
Зам. главного редактора А. Л. Карчевский  
Отв. секретарь В. А. Дедок

Журнал основан в 1998 году  
Выходит 4 раза в год  
**Том 25, №3(91)**  
Июль - сентябрь 2022 г.

## ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ

Г. В. Алексеев С. Б. Медведев  
Б. Д. Аннин Р. Г. Новиков  
В. С. Белоносов Д. Е. Пальчунов  
В. Н. Белых П. И. Плотников  
Ю. С. Волков В. Г. Романов  
В. П. Ильин Е. М. Рудой  
С. И. Кабанихин В. М. Садовский  
А. Н. Карапетянц Д. И. Свириденко  
М. В. Клибанов А. С. Терсенов  
С. С. Кутателадзе В. С. Тимофеев  
В. А. Левин В. В. Шайдуров  
Н. И. Макаренко

## СОДЕРЖАНИЕ

- Данилин А. Р., Шабуров А. А. Асимптотическое разложение решения задачи оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества и дешёвым управлением ..... 5
- Дурдиев Д. К., Меражова Ш. Б. Обратная задача для двумерного уравнения смешанного парабола-гиперболического типа в цилиндрической области ..... 14
- **Иванов В. В.** Притягивающий предельный цикл модели нечётномерной кольцевой генной сети ..... 25
- Имомназаров Б. Х., Имомназаров Ш. Х., Маматкулов М. М.,  
Худайназаров Б. Б. Фундаментальное решение для стационарного уравнения двухскоростной гидродинамики с равновесием фаз по давлению в диссипативном приближении ..... 33
- Ковалёв М. Д. О геометрическом определении шарнирного механизма, теореме Кемпе и перезрелой математике ..... 41
- Куликов И. М., Черных И. Г., Ульяничев И. С., Тутуков А. В. Математическое моделирование ядерного горения углерода в белых карликах с использованием 7-изотопной сети реакций ..... 55
- Купцова Е. В. Осциллятор Ван дер Поля под действием случайного шума ..... 67
- Лазарева Г. Г., Максимова А. Г. Численное моделирование распространения паров вольфрама над нагреваемой поверхностью ..... 81
- Мамажонов М., Шерматова Х. М. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка парабола-гиперболического типа в треугольной области с тремя линиями изменения типа уравнения ..... 93
- Минаков А. В., Лобасов А. С., Шебелев А. В., Зайцев Д. В., Кабов О. А. Режимы течения плёнки жидкости, увлекаемой потоком газа в плоском горизонтальном канале, в изотермических условиях ..... 104
- Митрофанов Г. М., Карчевский А. Л. Математическое моделирование для тонкослоистых упругих сред в сейсморазведке ..... 120
- Перцев Н. В., Топчий В. А., Логинов К. К. Численное стохастическое моделирование динамики взаимодействующих популяций ..... 135
- Романов В. Г., Бугуева Т. В. Задача об определении коэффициента при нелинейном члене квазилинейного волнового уравнения ..... 154
- Старовойтов В. Н., Старовойтова Б. Н. Усреднённая математическая модель периодической упругой структуры, насыщенной жидкостью Максвелла ..... 170

НОВОСИБИРСК

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

УДК 514.745.82

# ПРЯТАЮЩИЙ ПРЕДЕЛЬНЫЙ ЦИКЛ МОДЕЛИ НЕЧЁТНОМЕРНОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ГЕННОЙ СЕТИ

© 2022 В. В. Иванов

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
просп. Акад. Коптюга, 4, г. Новосибирск 630090, Россия*

Поступила в редакцию 01.04.2021 г.; после доработки 01.04.2021 г.;  
принята к публикации 22.06.2022 г.

Для нечётномерной автономной системы, моделирующей функционирование кольцевой генной сети, регулируемой отрицательными одноступенчатыми обратными связями, построена инвариантная область, гомеоморфная тору и содержащая один предельный цикл системы, который притягивает к себе траектории всех точек этой области.

**Ключевые слова:** модель кольцевой генной сети, отрицательные обратные связи, инвариантный тор, отображение Пуанкаре, неподвижная точка, предельный цикл.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.303

Самое интересное в генных сетях — это математические задачи, которые они порождают, и даже простейшие их модели способны порой удивить сочетанием элементарности предмета исследования и неожиданной содержательности связанных с ним вопросов... Одну из таких моделей мы и обсудим в этой работе. А именно, нам будут интересны периодические движения в  $n$ -мерном вещественном пространстве, описываемые дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}_1 + k_1 x_1 = f_1(x_n), \quad \dot{x}_2 + k_2 x_2 = f_2(x_1), \quad \dots, \quad \dot{x}_n + k_n x_n = f_n(x_{n-1}), \quad (1)$$

связывающими по кругу неотрицательные переменные  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , где  $n$  нечётно и  $n \geq 3$ , а функции  $f_i(x_{i-1})$  имеют вид ступенек, символизирующих отрицательные обратные связи:

$$f_i(x_{i-1}) = A_i \quad \text{при} \quad 0 \leq x_{i-1} < 1 \quad \text{и} \quad f_i(x_{i-1}) = 0 \quad \text{при} \quad x_{i-1} > 1. \quad (2)$$

Пусть все коэффициенты  $k_i$  и параметры  $A_i$  постоянны и положительны, а индекс  $i$  мы считаем циклическим периода  $n$ , так что  $i - 1$  при  $i = 1$  надо понимать как  $n$ . Значения  $f_i(x_{i-1})$  при  $x_{i-1} = 1$  мы никак не определяем, таким образом, изначально наша автономная система задана лишь в ортанте  $\mathbb{R}_+^n$ , из которого удалены все гиперплоскости  $x_i = 1$ . Но при тех условиях и в тех областях, о которых мы будем говорить, можно склеивать полные решения из их фрагментов, относящихся к связным частям системы, так что фактически речь у нас идёт о движениях в полноценной автономной системе, в целом непрерывной, но в основном гладкой, траектории которой, не разрываясь, резко меняют направление только на указанных  $n$  гиперплоскостях.

Как было показано в работе [1], система (1), (2) любой размерности  $n \geq 3$  может иметь замкнутую траекторию только в том случае, когда

$$A_i > k_i \quad \text{для всех} \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

но если  $n$  нечётно, как у нас, такой цикл и в самом деле есть. Это очень важный и далеко не случайный цикл. Где он лежит, легко описать, не привлекая никаких вычислений. Вскоре мы подробно и точно опишем положение этого цикла в фазовом ортанте системы, но уже сейчас заметим, что он заключён внутри инвариантной области, гомеоморфной полному тору,

составленному из  $2n$  параллелепипедов размерности  $n$ , упорядоченных в цепочку так, что её соседние звенья примыкают одно к другому по их общей грани. Такой тор и был построен в [1], но для особенно наглядного трёхмерного случая это было чуть раньше сделано в работе [2], а вслед за тем уже в работе [3], посвящённой той же трёхмерной системе, было доказано, что в нашем торе есть только один цикл, причём к нему притягиваются все другие траектории, начинающиеся в точках тора, так что это — настоящий предельный цикл. Здесь наша задача — доказать, что и для общей нечётномерной системы (1), (2), удовлетворяющей условиям (3), картина такая же: цикл в торе ровно один и он устойчив в том же смысле.

## 1. ИНВАРИАНТНЫЙ ТОР

Прежде всего мы построим главный параллелепипед, внутрь которого рано или поздно попадает любая траектория системы и уже навсегда остаётся там:

$$Q = [0, a_1] \times [0, a_2] \times \dots \times [0, a_n], \quad \text{где} \quad a_i = A_i/k_i. \quad (4)$$

Затем разобьём его на  $2^n$  меньших параллелепипедов, или блоков, при помощи уже знакомых нам  $n$  гиперплоскостей  $x_i = 1$ . Ясно, что каждый такой блок можно записать в виде

$$Q[\sigma] = I_1[\sigma_1] \times I_2[\sigma_2] \times \dots \times I_n[\sigma_n], \quad (5)$$

где  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$  означает двоичный вектор, чьи координаты  $s_i$  вправе принимать лишь два значения 0 или 1, а  $I_i[0]$  и  $I_i[1]$  означают отрезки оси  $x_i$ , определяемые неравенствами  $0 \leq x_i \leq 1$  и соответственно  $1 \leq x_i \leq a_i$ . Как и в [1], здесь уместно подчеркнуть, что имя каждого блока составлено из координат одной из вершин единичного куба, которая принадлежит самому блоку и среди всех его точек имеет наименьшие координаты. Блоки  $Q[\sigma]$  замечательны тем, что внутри каждого из них наша система (1) обретает простейшую линейно-диагональную форму:

$$\dot{x}_1 = -k_1(x_1 - c_1), \quad \dot{x}_2 = -k_2(x_2 - c_2), \quad \dots, \quad \dot{x}_n = -k_n(x_n - c_n), \quad (6)$$

где точка  $c(\sigma) = (c_1, c_2, \dots, c_n)$  служит одной из вершин параллелепипеда  $Q$ . Именно к ней стремились бы все траектории системы (6), выходящие из точек блока  $Q[\sigma]$ , если бы только не его граница, так что нам вполне естественно назвать её центром притяжения этого блока. Из формул (2) следует, что

$$c_1 = (1 - \sigma_n) a_1, \quad c_2 = (1 - \sigma_1) a_2, \quad \dots, \quad c_n = (1 - \sigma_{n-1}) a_n, \quad (7)$$

и мы видим, что действительно для каждого  $i$  либо  $c_i = 0$ , либо  $c_i = a_i$ , а значит, центром притяжения  $c(\sigma)$  блока  $Q[\sigma]$  служит одна из удалённых от него вершин блока  $Q[\sigma^*]$ , где

$$\sigma_1^* = 1 - \sigma_n, \quad \sigma_2^* = 1 - \sigma_1, \quad \dots, \quad \sigma_n^* = 1 - \sigma_{n-1}. \quad (8)$$

Для нас особенно интересны те индексы  $\sigma$ , для которых блоки  $Q[\sigma]$  и  $Q[\sigma^*]$  оказываются смежными в том смысле, что имеют общую грань. Такая пара блоков замечательна тем, что все траектории системы (6), отвечающей блоку  $Q[\sigma]$  и начинающиеся в точках этого блока, приходят именно на эту грань, а дальше уже вступают в силу новые уравнения для блока  $Q[\sigma^*]$ . Уже ясно, как было бы хорошо найти такую замкнутую цепочку смежных блоков

$$Q_1 \rightarrow Q_2 \rightarrow \dots \rightarrow Q_N \rightarrow Q_1, \quad (9)$$

что для любого  $s$  от единицы до  $N$  точка  $c(Q_s)$  лежит в блоке  $Q_{s+1}$ , где  $s + 1$  при  $s = N$  означает единицу. Тогда для любой точки тора

$$\mathbb{T} = Q_1 \cup Q_2 \dots \cup Q_N, \quad (10)$$

выходящая из неё траектория никогда не покидает этот тор, бесконечно много раз проходя последовательно через все эти блоки в полном согласии с диаграммой (9). При этом в блок  $Q_s$  она проникает через грань  $F_s = Q_{s-1} \cap Q_s$ , разделяющую блоки  $Q_{s-1}$  и  $Q_s$ , где  $s-1 = N$  при  $s = 1$ , а выходит из него через грань  $F_{s+1}$ , попадая в следующий за ней блок  $Q_{s+1}$ . Это означает, что у нас естественно возникает цепочка переходных отображений

$$\Pi_1^2: F_1 \rightarrow F_2, \quad \dots, \quad \Pi_s^{s+1}: F_s \rightarrow F_{s+1}, \quad \dots, \quad \Pi_N^1: F_N \rightarrow F_1, \quad (11)$$

отмечающих последовательные положения точки на перегородках между блоками при её нескончаемом вращении в торе  $\mathbb{T}$ . Если начать движение, например, на грани  $F_1$  и пройти весь круг (11), мы снова вернёмся на эту грань, но уже в точку, определяемую отображением последования

$$\Pi = \Pi_N^1 \circ \dots \circ \Pi_s^{s+1} \circ \dots \circ \Pi_1^2: F_1 \rightarrow F_1, \quad (12)$$

или отображением Пуанкаре. Точка  $\mathbb{E} = (1, 1, \dots, 1)$ , где пересекаются все блоки и которую мы назовём центральной, при всех переходах  $F_s^{s+1}$  остаётся на месте, а значит, представляет собой неподвижную точку отображения  $\Pi$ , но каждая другая его неподвижная точка имеет уже настоящую замкнутую траекторию.

Одним словом, нам теперь нужно понять, каким должен быть блок  $Q(\sigma)$ , чтобы блок  $Q(\sigma^*)$  имел с ним общую грань. Ясно, что такое случается в том и только том случае, когда имена  $\sigma$  и  $\sigma^*$  этих двух блоков отличаются ровно в одной позиции, но очевидно, что для этого необходимо и достаточно, чтобы вектор  $\sigma$  имел в точности одну пару равных соседних координат, если считать соседями первую и последнюю из них. Легко посчитать, что таких двоичных векторов ровно  $2n$  штук, причём все отвечающие им блоки укладываются в одну динамическую цепочку, как в строке (9), где  $N = 2n$ . Вот фрагмент этой цепочки блоков:

$$Q[10101 \dots 01] \rightarrow Q[00101 \dots 01] \rightarrow Q[01101 \dots 01]. \quad (13)$$

Если средний из них мы возьмём в качестве блока  $Q_1$  и будем двигаться от него к смежному по правилу (8), то получим сначала блок  $Q_2$ , правый в цепочке (13), а в конце пути окажется блок  $Q_{2n}$ , который там же мы видим слева. Все эти блоки, вместе взятые, и составляют именно тот инвариантный тор  $\mathbb{T}$ , который нам был нужен. Итак, мы приходим к замечательному выводу:

**Лемма 1.** *Среди всей совокупности имеющихся у нас  $2^n$  блоков есть ровно  $2n$  таких, которые образуют динамическую цепочку, и такая цепочка у нашей системы только одна.*

## 2. ОТОБРАЖЕНИЕ ПУАНКАРЕ

Согласившись с нашим выбором первого блока, абсолютно ничем не выделяющегося среди прочих блоков динамической цепочки, мы можем теперь для начальной его грани принять новое, особое обозначение  $\mathbb{F}$ , так что

$$\mathbb{F}: \quad x_1 = 0, \quad 0 \leq x_2 \leq 1, \quad 1 \leq x_3 \leq a_3, \quad \dots, \quad 0 \leq x_{n-1} \leq 1, \quad 1 \leq x_n \leq a_n, \quad (14)$$

а что касается заданного на ней отображения Пуанкаре  $\Phi$ , то для всех его  $2n$  составляющих, упомянутых в строке (12), легко получить явные формулы, и они уже указаны в работе [1]. Из них и вытекают все высказанные выше утверждения о нашей автономной системе.

**Теорема.** *Отображение  $\Pi: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$  имеет отличную от  $\mathbb{E}$  неподвижную точку, эта точка ровно одна, и к ней притягиваются  $\Pi$ -итерации любой точки из  $\mathbb{F}$ , кроме точки  $\mathbb{E}$ , и даже равномерно на каждом подмножестве грани  $\mathbb{F}$ , ограниченном от центральной точки. Это значит, что автономная система (1)–(3) имеет в торе  $\mathbb{T}$  единственный предельный цикл, который притягивает к себе траектории всех точек тора, кроме центральной.*

Именно это утверждение мы и доказываем на оставшихся страницах заметки. Первым делом, полагая  $m = n - 1$ , введём на грани  $\mathbb{F}$  новые линейные координаты  $u_1, u_2, \dots, u_m$  таким образом, что она превратится в единичный куб  $\mathbb{K}$  размерности  $m$ . Пусть

$$u_1 = 1 - x_2, \quad u_2 = \frac{x_3 - 1}{a_3 - 1}, \quad \dots, \quad u_{m-1} = 1 - x_m, \quad u_m = \frac{x_{m+1} - 1}{a_{m+1} - 1}. \quad (15)$$

Здесь каждая переменная  $u_i$  пробегает все значения от нуля до единицы, пока  $x_{i+1}$  движется вдоль соответствующего ребра параллелепипеда  $\mathbb{F}$  в направлении от единицы вплоть до нуля, если  $i$  нечётно, или до  $a_{i+1}$  при чётном  $i$ . При этом крайние точки  $\mathbb{E}$  и  $(1, 1, a_3, \dots, 1, a_n)$  главной диагонали  $\mathbb{F}$  переходят в  $m$ -мерные точки  $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$  и  $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$  куба  $\mathbb{K}$ , так что  $\Pi$  превращается в линейноподобное ему отображение  $\Phi: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ , которое наследует все свойства отображения Пуанкаре  $\Pi$ , уже известные нам по работам [1–3], только теперь они заметно симпатичней благодаря удачному выбору новых переменных.

**Лемма 2.** Пусть  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$  будут координатными функциями отображения  $\Phi$ . Все они в нуле равны нулю, но в каждой точке  $u$  куба  $\mathbb{K}$ , отличной от нуля,  $0 < \varphi_i(u) < 1$  для всех  $i$ . В кубе  $\mathbb{K}$  сколь угодно близко от нуля есть такие точки  $u$ , что  $\varphi_i(u) > u_i$  для всех  $i$ . Однако для нас важнее всего, что всюду в кубе  $\mathbb{K}$  все первые частные производные любой из этих координатных функций положительны, а все вторые — отрицательны.

Всё это можно увидеть в результате внимательного анализа (вполне элементарного, но далеко не самого простого) явных формул, определяющих координатные функции переходных отображений  $\Pi_s^{s+1}$  из цепочки (11). Здесь самое время посмотреть на формулы (17)–(20) из работы [1], где главное, что было замечено, это, пожалуй, чередование знаков в матрице Якоби отображения Пуанкаре и, как уже тогда было ясно, в трёхмерной матрице Гессе:

$$\text{sign} \left[ \frac{\partial \Pi_i}{\partial x_j} \right] = (-1)^{i+j}, \quad \text{sign} \left[ \frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial x_k \partial x_j} \right] = (-1)^{i+j+k}. \quad (16)$$

А если перейти к правильным координатам, как описано здесь и как было сделано в [3] для трёхмерных систем, то чередование исчезает: для первых производных все минусы заменяются на плюсы, а для вторых — плюсы на минусы. Надо только заметить, что ненулевые элементы матрицы Якоби преобразования (15) только диагональные и знаки их чередуются. Вот пример для пятимерной геномной сети с отрицательными обратными связями:

$$\begin{bmatrix} - & 0 & 0 & 0 \\ 0 & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & + \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} - & 0 & 0 & 0 \\ 0 & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & + \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} + & + & + & + \\ + & + & + & + \\ + & + & + & + \\ + & + & + & + \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Для точек  $u = (u_i)$  и  $v = (v_i)$  обычное неравенство  $u \leq v$  будет у нас означать, что  $u_i \leq v_i$  для всех  $i$ . Если при этом  $u_i < v_i$  хотя бы для одной координаты, мы запишем строгое неравенство  $u < v$ , но если  $u_i < v_i$  для всех  $i$ , мы выразим это сильным неравенством  $u \ll v$ . Например, теперь куб  $\mathbb{K}$  становится порядковым отрезком с концами  $\mathbf{0}$  и  $\mathbf{1}$ . Ещё пример:

$$\varphi(u) \ll \varphi(v) \quad \text{и} \quad \alpha\varphi(u) + \beta\varphi(v) \ll \varphi(\alpha u + \beta v), \quad (18)$$

если точки  $u$  и  $v$  из  $\mathbb{K}$  и положительные числа  $\alpha$  и  $\beta$  таковы, что  $u < v$  и  $\alpha + \beta = 1$ . Так при помощи наших значков можно компактно выразить вытекающие из леммы 2 важнейшие свойства отображения Пуанкаре, имеющие для нас решающее значение.

### 3. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ЦИКЛ

Теперь мы в полной мере готовы к доказательству нашей теоремы. Чтобы не говорить лишнего, мы считаем, что речь идёт всё о том же отображении  $\varphi$ , а все точки, какие нам далее встретятся, принадлежат прежнему стандартному кубу  $\mathbb{K}$ . На самом же деле здесь уже можно напрочь забыть как о происхождении этого отображения, так и о размерности куба, которая теперь может быть любой: нам более чем достаточно, чтобы оно обладало свойствами, которые для отображения Пуанкаре отмечены в лемме 2.

**Лемма 3.** Пусть точки  $p$  и  $q$  куба  $\mathbb{K}$  таковы, что  $p \ll q$ . Если  $p \ll \varphi(p)$  и  $\varphi(q) \ll q$ , то в порядковом отрезке между  $p$  и  $q$  есть ровно одна неподвижная точка отображения  $\varphi$ .

Это почти очевидное утверждение, справедливое для любых отображений, обладающих той монотонной выпуклостью, что отражена в неравенствах (18). Но мы, оставаясь ближе к теме, будем считать, что  $\varphi$  задано на произведении  $m$  числовых отрезков  $[p_i, q_i]$ , где  $p_i < q_i$ , а  $m \geq 1$ , что все его координатные функции  $\varphi_i$  имеют непрерывные частные производные первого и второго порядков по всем переменным, причём из них все первые положительны, а все вторые отрицательны, и при этом  $p_i < \varphi_i(p)$  и  $\varphi_i(q) < q_i$  для всех  $i$ , где  $p = (p_1, \dots, p_m)$  и  $q = (q_1, \dots, q_m)$ . И это всё, что нам нужно, и даже больше, а потому мы можем провести индукцию по размерности  $m$  и дойти до  $m = 1$ , хотя вся эта задача фактически одномерна...

Кстати, если  $m = 1$ , то речь у нас идёт о графике гладкой функции, которая монотонно растёт и выпукла вверх. Если этот график весь уместится в квадратике, причём выше нижней его стороны и ниже верхней, и идёт от левого края квадратика вплоть до правого, он ровно один раз пересечёт возрастающую диагональ квадрата в её внутренней точке, имея в этот момент положительный наклон, строго меньший единицы. Таков базис нашей индукции...

Если  $m \geq 2$ , пусть  $\mathbb{U}$  будет произведением всех  $m$  отрезков  $[p_i, q_i]$ , а в качестве  $\mathbb{I}$  и  $\mathbb{V}$  мы возьмём первый из них и произведение  $m - 1$  остальных, так что  $\mathbb{U} = \mathbb{I} \times \mathbb{V}$ . Тогда точки  $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$  превратятся в пары  $u = (u_1, v)$ , где  $u_1$  попадёт в отрезок  $\mathbb{I}$ , а  $v = (u_2, \dots, u_m)$  будет точкой из  $\mathbb{V}$ . После того, что мы заметили, глядя на графики в квадратике, мы ясно видим, что каждой точке  $v$  из  $\mathbb{V}$  отвечает ровно одна точка  $u_1$  из  $\mathbb{I}$ , для которой  $\varphi_1(u_1, v) = v$ . А ещё из той же элементарной картинке следует, что

$$p_1 < u_1 < q_1 \quad \text{и} \quad 0 < \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}(u_1, v) < 1. \quad (19)$$

Таким образом, полагая  $u_1 = \psi_1(v)$ , мы получим функцию  $\psi_1$  на  $\mathbb{V}$ , замечательную тем, что для всех точек  $(u_1, v)$  из  $\mathbb{U}$  равенства  $\varphi_1(u_1, v) = u_1$  и  $u_1 = \psi_1(v)$  будут эквивалентными. Отсюда следует, что все неподвижные точки отображения  $\varphi$ , сколько бы их ни было, обязаны лежать на графике функции  $\psi_1$ . В самом деле, если  $u = (u_1, v)$  и  $\varphi(u) = u$ , то, в частности,  $\varphi_1(u) = u_1$ , а тогда  $u_1 = \psi_1(v)$ . Одним словом, график функции  $\psi_1$ , представляющий собой расположенную в параллелепипеде  $\mathbb{U}$  поверхность размерности  $m - 1$ , имеет для нас важное значение, и мы должны его изучить, а это то же самое, что изучить функцию  $\psi_1$ .

Прежде всего заметим, что  $\varphi_1(\psi_1(v), v) = \psi_1(v)$  для всех  $v$  из  $\mathbb{V}$ . Более того, функцию  $\varphi_1$  можно охарактеризовать как единственное решение этого функционального уравнения. Для дальнейших наших шагов удобно представить его в развёрнутой форме:

$$\psi_1(u_2, \dots, u_m) \equiv \varphi_1(\psi_1(u_2, \dots, u_m), u_2, \dots, u_m). \quad (20)$$

Учитывая хрестоматийные обстоятельства, относящиеся к неявным функциям, мы вспомним, что по условию производная функции  $\varphi_1$  по переменной  $u_1$  всюду в  $\mathbb{U}$  больше нуля, так что функция  $\psi_1$ , определяемая уравнением (20), имеет непрерывные первые и вторые производные по всем переменным  $u_2, \dots, u_m$ . Дифференцируя теперь тождество (20) по любой

из этих  $m$  переменных  $u_i$ , а также учитывая неравенство (19) и положительность производных  $\varphi_1$  по  $u_1$  и  $u_i$ , мы видим, что производная  $\psi_1$  по  $u_i$  больше нуля. Так же легко, с учётом знаков первых и вторых производных функции  $\varphi_1$ , устанавливается, что все вторые производные функции  $\psi_1$  меньше нуля. Ясно, что здесь можно было бы составить целый сборник упражнений по дифференцированию функций нескольких переменных. Но нас ждут другие уравнения...

Неподвижная точка  $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$  отображения  $\varphi$  должна удовлетворять сразу всем уравнениям  $\varphi_i(u_1, u_2, \dots, u_m) = u_i$ , где  $i = 1, 2, \dots, m$ . Но первое из них удовлетворено тогда и только тогда, когда  $u_1 = \psi_1(u_2, \dots, u_m)$ , а это значит, что исходная система равносильна системе  $\psi_i(u_2, \dots, u_m) = u_i$ , где  $i = 2, \dots, m$ , а функции  $\psi_i$  задаются равенствами

$$\psi_i(u_2, \dots, u_m) = \varphi_i(\psi_1(u_2, \dots, u_m), u_2, \dots, u_m). \quad (21)$$

Составленное из них отображение  $\psi = (\psi_2, \dots, \psi_m)$  задано на параллелепипеде  $\mathbb{V}$  и все свои значения принимает, очевидно, внутри него. Что касается производных функций  $\psi_i$ , то все они имеют нужные знаки, что вытекает из явных формул (21) и уже известных нам свойств производных функции  $\psi_1$ . Размерность задачи уменьшилась на единицу. Лемма 3 доказана.

Приступая, наконец, к доказательству нашей теоремы, вернёмся к отображению Пуанкаре  $\varphi: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  и снова вспомним лемму 2. Среди прочего она гарантирует нам, что в кубе  $\mathbb{K}$  сколь угодно близко от точки  $\mathbf{0}$  можно найти такую точку  $p$ , что  $\varphi(p) \gg p$ .

Если мы выберем одну из таких точек  $p$ , а в качестве  $q$  возьмём точку  $\mathbf{1}$ , про которую мы уже знаем, что  $\varphi(q) \ll q$ , то увидим, что к порядковому отрезку с концами  $p$  и  $q$  применима лемма 3, так что неподвижная точка у нас уже есть. Но здесь и без леммы 3 все предельно ясно: итерации точек  $p$  и  $q$  стремятся навстречу друг другу, так что их пределы отличны от нуля и не сдвигаются отображением  $\varphi$ .

Предположим, что в кубе оказались две неподвижные точки  $p'$  и  $p''$ , обе отличные от нуля. Тогда среди тех точек  $p$  куба  $\mathbb{K}$ , для которых  $\varphi(p) \gg p$ , мы нашли бы такую, что  $p \ll p'$  и  $p \ll p''$ . Вновь полагая  $q = \mathbf{1}$ , мы получим, что  $p'$  и  $p''$  оказались в отрезке между  $p$  и  $q$ , чего не допускает лемма 3. Таким образом, отличная от нуля неподвижная точка ровно одна.

Нам остаётся взять любое множество  $M$ , лежащее в кубе  $\mathbb{K}$  и ограниченное от нуля в том смысле, что нуль не лежит в его замыкании, и доказать, что его итерации  $\varphi^k[M]$  при  $k \rightarrow \infty$  равномерно стягиваются к неподвижной точке. Мы можем и будем считать, что  $M$  компактно и не содержит точку нуль. Тогда его образ  $\varphi[M] \subset \mathbb{K}$  тоже компактен, а согласно лемме 2 этот образ лежит строго внутри куба  $\mathbb{K}$ . Для такого множества легко указать его нижнюю порядковую границу с положительными координатами: такую точку  $\hat{u} \gg \mathbf{0}$ , что  $\hat{u} \ll u$  для всех точек  $u$  из  $\varphi[M]$ . Ясно, что такой границей служит точка  $\hat{u} = (\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_m)$ , где  $\hat{u}_i$  означает расстояние от компакта  $\varphi[M]$  до  $(m-1)$ -мерной координатной плоскости, ортогональной  $i$ -й оси. Но, снова по лемме 2, в кубе найдётся такая точка  $p$ , что  $p \ll \varphi(p)$  и  $p \ll \hat{u}$ , так что всё множество  $\varphi[M]$  оказывается в отрезке между только что выбранной точкой  $p$  и прежней  $q$ . Отсюда следует, что множество  $\varphi^{k+1}[M]$  лежит в отрезке между точками  $\varphi^k(p)$  и  $\varphi^k(q)$ . Но итерации точек  $p$  и  $q$  очевидно стремятся к таким точкам, которые отображение  $\varphi$  оставляет на месте, а такая точка только одна. Теорема доказана.

Конечно же, это приятное свойство цикла — притягивать к себе траектории всех близких точек. Это заставляет их двигаться почти параллельно с ним и всё ближе к нему, но это не означает синхронности по времени геометрически близких движений, и временной сдвиг, который почти всегда есть, хотя бывают и абсолютно изохронные автономные системы, мог бы в принципе расти до бесконечности. Для полного исследования этой темы здесь нужны иные соображения, но излагать их лучше с чистого листа...

В случаях  $n = 3$  и  $n = 5$  теорема была установлена в [3] и [4].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Голубятников В.П., Иванов В.В. Циклы в нечётномерных моделях кольцевых генных сетей // Сиб. журн. индустр. математики. 2018. Т. 21, № 4. С. 28–38.
2. Голубятников В.П., Иванов В.В., Мишушкина Л.С. О существовании цикла в одной несимметричной модели кольцевой генной сети // Сиб. журн. чистой и прикл. математики. 2018. Т. 18, № 3. С. 26–32.
3. Голубятников В.П., Иванов В.В. Единственность и устойчивость цикла в трехмерных блочно-линейных моделях кольцевых генных сетей // Сиб. журн. чистой и прикл. математики. 2018. Т. 18, № 4. С. 19–28.
4. Аюпова Н.Б., Голубятников В.П. Об одном цикле в пятимерной модели кольцевой генной сети // Сиб. журн. индустр. математики. 2021. Т. 24, № 3. С. 19–29.

UDC 514.745.82

# AN ATTRACTING LIMIT CYCLE OF AN ODD-DIMENSIONAL CIRCULAR GENE NETWORK MODEL

© 2022 V. V. Ivanov

*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,  
pr. Acad. Koptiyuga 4, Novosibirsk 630090, Russia*

Received 01.04.2021, revised 01.04.2021, accepted 22.06.2022

**Abstract.** For an odd-dimensional autonomous system which simulates functioning of a circular gene network regulated by negative feedbacks only, we construct an invariant domain homeomorphic to torus. This domain contains a limit cycle of this system, and trajectories of all its points are attracted by this cycle.

**Keywords:** circular gene network model, negative feedbacks, invariant torus, Poincaré mapping, fixed point, limit cycle.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.303

## REFERENCES

1. Golubyatnikov V.P., Ivanov V.V. Cycles in the odd-dimensional models of circular gene networks. *J. Appl. Indust. Math.*, 2018, Vol. 12, No. 3, pp. 648–657; <https://doi.org/10.1134/S1990478918040051>
2. Golubyatnikov V.P., Ivanov V.V., Minushkina L.S. On existence of a cycle in one asymmetric gene network model. *Siber. J. Pure Appl. Math.*, 2018, Vol. 18, No. 3, pp. 26–32 (in Russian).
3. Golubyatnikov V.P., Ivanov V.V. [Uniqueness and stability of a cycle in three-dimensional block-linear circular gene network models]. *Siber. J. Pure Appl. Math.*, 2018, Vol. 18, No. 4., pp. 19–28 (in Russian).
4. Ayupova N.B., Golubyatnikov V.P. On a cycle in a 5-dimensional circular gene network model. *J. Appl. Ind. Math.*, 2021, Vol. 15, No. 3, pp. 376–383; <https://doi.org/10.1134/S1990478921030029>